

## RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

# Cours de Résistance des Matériaux SeaTech 2<sup>ème</sup> année

## Introduction

## Introduction

La Mécanique des Milieux Continus est l'outil de base nécessaire à toute modélisation en ingénierie !

RDM

Introduction

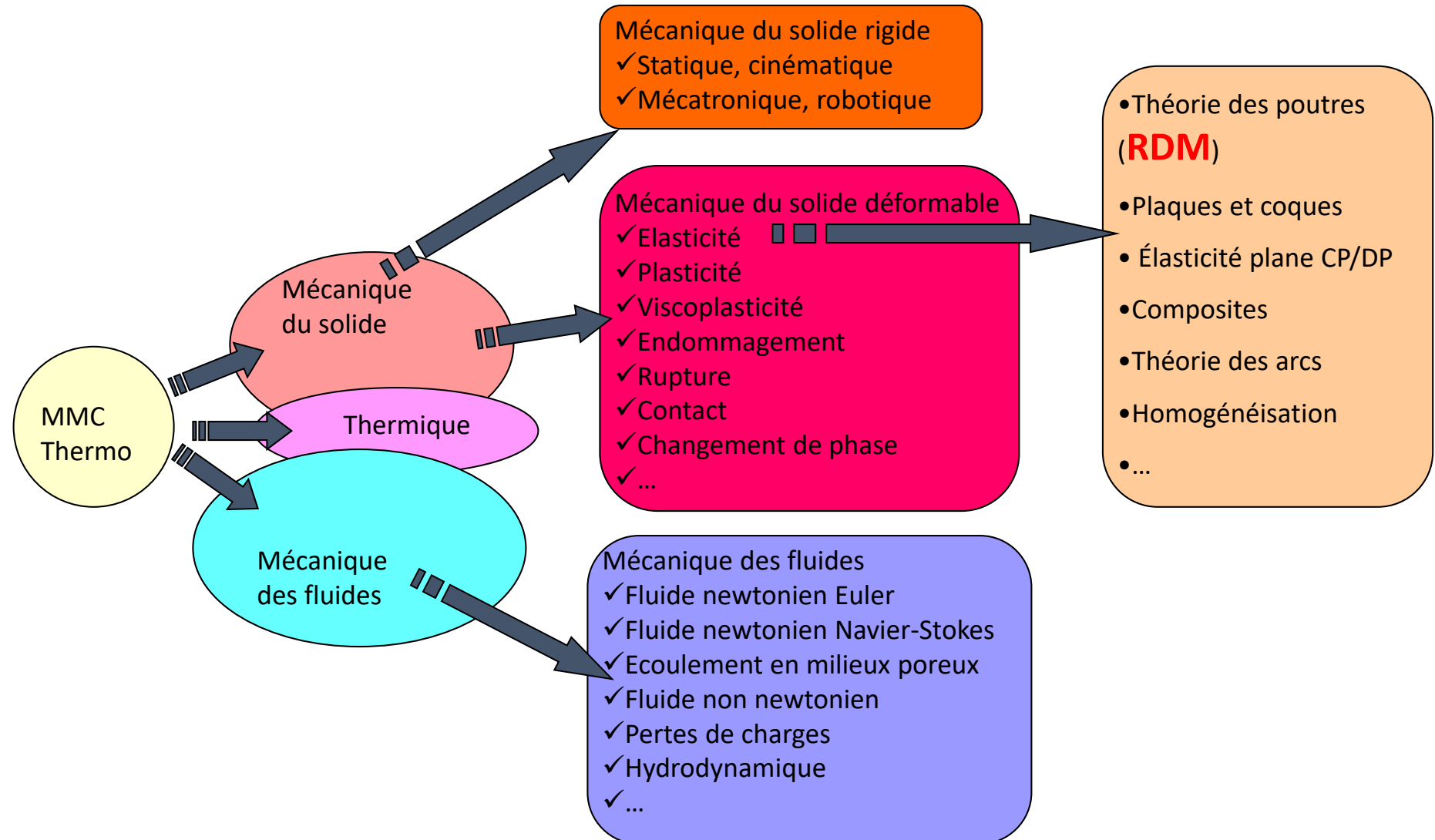
Théorie des poutres

Traction

Torsion

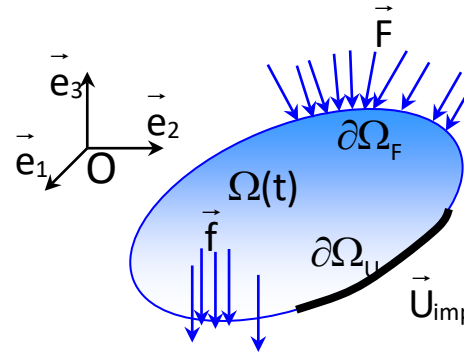
Flexion

Méthodes Énergétiques



## Introduction

### Le problème d'élasticité



### Hypothèse des petites perturbations

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u})$$

$$\vec{u} = \vec{U}_{imp} \quad \text{sur } \partial\Omega_u$$

### Equation de compatibilité

$$\text{div } \bar{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\bar{\sigma} \vec{n} = \begin{cases} \vec{F} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{R} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases}$$

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \vec{1} + 2\mu \bar{\varepsilon}$$

$\vec{u}$  Déplacement [m]

$\bar{\varepsilon}$  Déformation [-]

$\bar{\sigma}$  Contrainte [N/m<sup>2</sup>]

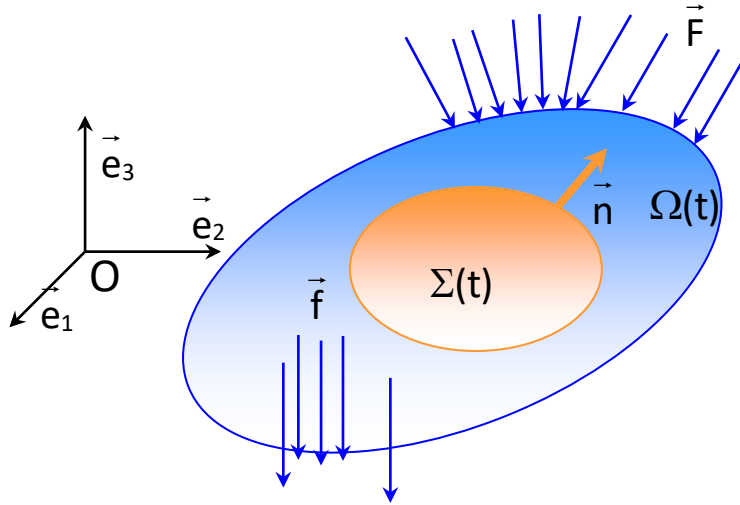
$\vec{f}$  force volumique (e.g. pesanteur  $\rho \vec{g}$ ) [N/m<sup>3</sup>]

$\vec{F}$  force surfacique (e.g. un effort de pression  $p \vec{n}$ ) [N/m<sup>2</sup>]

$\lambda, \mu$  coefficients de Lamé [N/m<sup>2</sup>]

# Introduction

## Rappel: Principe fondamental de la dynamique



## Principe Fondamental de la dynamique

Tenseur dynamique  
=  
Tenseur des action extérieures

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{v} dV &= \iiint_{\Sigma} \vec{f} dV + \iint_{\partial\Sigma} \vec{T} ds \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \overline{OM} \wedge \vec{v} dV &= \iiint_{\Sigma} \overline{OM} \wedge \vec{f} dV + \iint_{\partial\Sigma} \overline{OM} \wedge \vec{T} ds \end{aligned} \right.$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{v} dV = \iiint_{\Sigma} \vec{f} dV + \iint_{\partial\Sigma} \vec{T} ds$$

$$\iiint_{\Sigma} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_{\Sigma} \vec{f} dV + \iint_{\partial\Sigma} \vec{\sigma} n ds$$

Conservation de la masse

Définition du vecteur contrainte

$$\iiint_{\Sigma} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint_{\Sigma} \vec{f} dV + \iiint_{\Sigma} \text{div}(\vec{\sigma}) dV$$

Théorème de la divergence

$$\forall \Sigma \quad \iiint_{\Sigma} (\text{div} \vec{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma}) dV = \vec{0}$$

## Forme locale de l'équation d'équilibre

$$\left\{ \begin{aligned} \text{div} \vec{\sigma} + \vec{f} &= \rho \vec{\gamma} && \text{dans } \Omega \\ \vec{\sigma} n &= \vec{F} && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \right.$$



RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

## Introduction

### Autre approche: Le Principe des puissances virtuelles (PPV) (Germain 1972)

#### Axiome d'objectivité

*La puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle.*

#### Axiome d'équilibre

*Pour tout milieu matériel repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs et des efforts extérieurs.*

$$\Pi_i + \Pi_e = \Pi_a$$

Considérons un mouvement virtuel défini par une vitesse virtuelle  $\overline{\delta \mathbf{v}}$

$$\Pi_i = - \iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} : \overline{\overline{\delta \mathbf{D}}} \, dv$$

$$\text{où } \overline{\overline{\delta \mathbf{D}}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{\overline{\partial \delta \mathbf{v}}}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\overline{\overline{\partial \delta \mathbf{v}}}}{\partial \mathbf{x}}^T \right)$$

$$\Pi_e = \iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\mathbf{f}}} \cdot \overline{\overline{\delta \mathbf{v}}} \, dv + \iint_{\partial \Sigma} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \overline{\overline{\delta \mathbf{v}}} \, ds$$

où  $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$  est le vecteur contrainte

$$\Pi_a = \iiint_{\Sigma} \rho \overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}} \cdot \overline{\overline{\delta \mathbf{v}}} \, dv$$

où  $\overline{\overline{\boldsymbol{\gamma}}}$  représente l'accélération

## RDM

Introduction

**Théorie des poutres**

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

# Cours de Résistance des Matériaux SeaTech 2<sup>ème</sup> année

## Théorie des poutres

## Définitions & Hypothèses de Bernoulli

### Définition d'une poutre

On appelle poutre le solide engendré par une surface plane dont le centre de gravité décrit une courbe  $\gamma$ , la surface  $S$  restant normale à cette courbe, avec :

- \* La courbe  $\gamma$  est appelée ligne moyenne ou **fibre moyenne**
- \* La surface  $S$  est appelée **section** normale
- \* Le rayon de courbure en tout point de  $\gamma$  doit être grand par rapport aux dimensions de  $S$
- \* Les dimensions de  $S$  sont négligeables devant la longueur de la courbe  $\gamma$
- \* Les variations de forme et de dimension de  $S$  doivent être progressives



RDM

Introduction

**Théorie des poutres**

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli

Traction

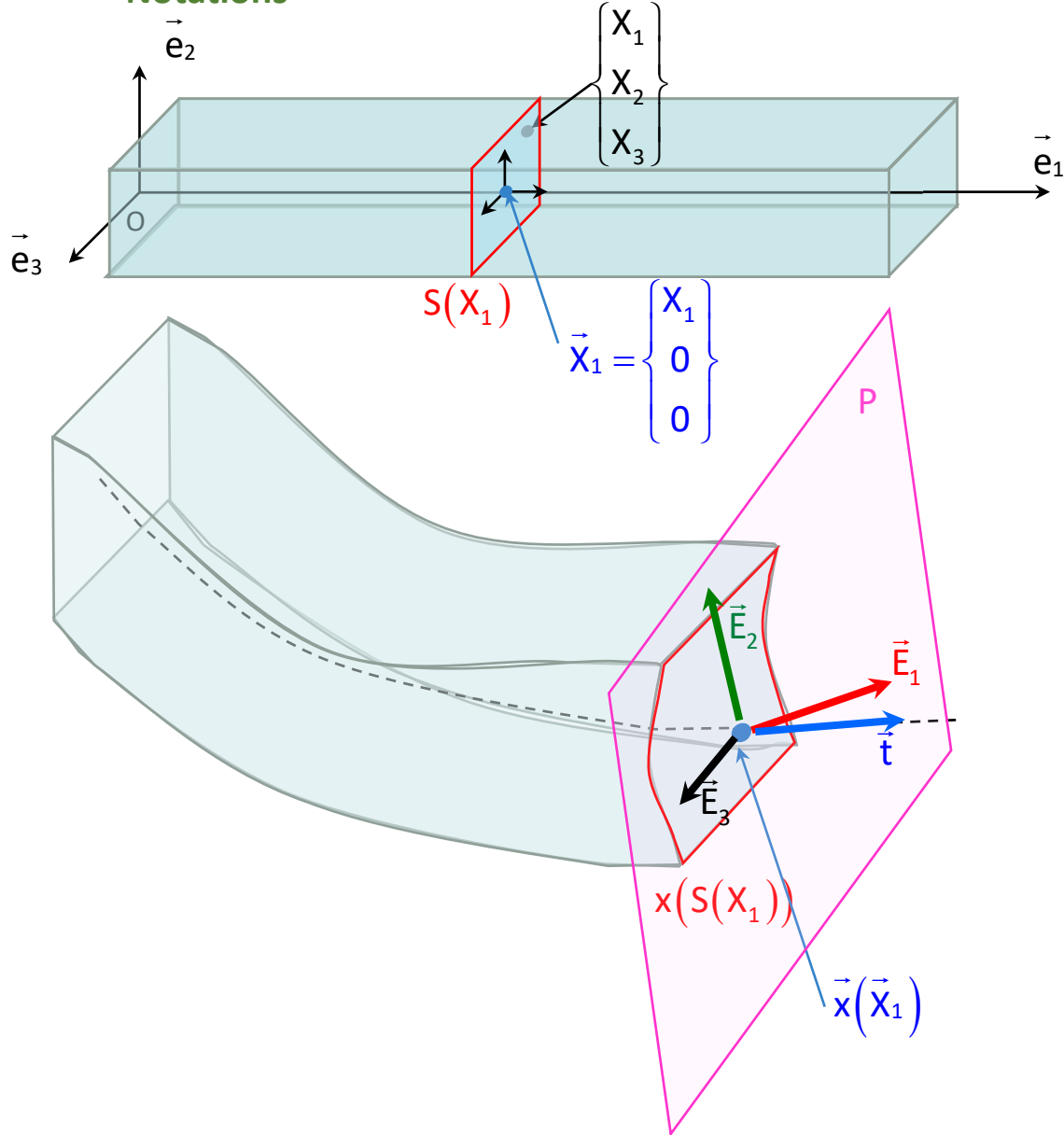
Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

# Définitions & Hypothèses de Bernoulli

## Notations



Dans la configuration déformée

le vecteur unitaire tangent à la déformée de la fibre moyenne

$$\vec{t}(X_1) = a \bar{F}(X_1) \bar{e}_1 \quad \text{avec} \quad a = \left\| \bar{F}(X_1) \bar{e}_1 \right\|^{-1}$$

Le plan  $P$  tangent en  $\vec{x}(\bar{X}_1)$  défini par le point  $\vec{x}(\bar{X}_1)$  et les vecteurs

$$\bar{F}(X_1) \bar{e}_3 \quad \text{et} \quad \bar{E}_2(X_1) = b \bar{F}(X_1) \bar{e}_2 \quad \text{avec} \quad b = \left\| \bar{F}(X_1) \bar{e}_2 \right\|^{-1}$$

Le vecteur unitaire  $\bar{E}_1(X_1)$  normal à  $P$

Le vecteur unitaire  $\bar{E}_3(X_1)$  tel que  $(x(X_1), \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$  soit un repère orthonormé

RDM

Introduction

Théorie des poutres  
 • Définitions & Hypothèses de Bernoulli

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques



# Définitions & Hypothèses de Bernoulli

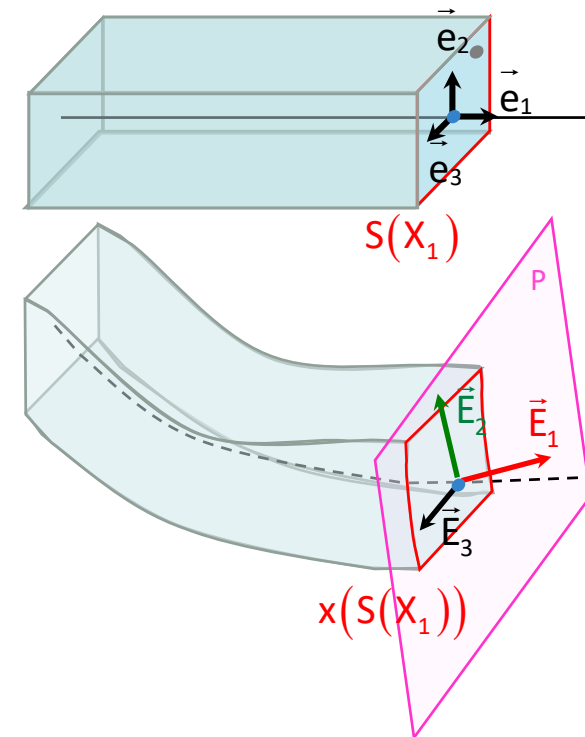
## Hypothèses de Bernoulli

- (i) Les sections droites restent planes*
- (ii) Les sections droites se déforment librement dans leur plan*
- (iii) La variation des déformations de la section le long de la poutre est très petite*

## Conséquences

$x(S(\vec{X}_1)) \equiv P(\vec{X}_1)$  On peut confondre la transformée de la section et le plan tangent

Le déplacement de la section droite peut être représenté par un vecteur translation et par un vecteur rotation passage de  $(\vec{X}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  à  $(x(\vec{X}_1), \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$



RDM

Introduction

Théorie des poutres

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- **Déplacement généralisé**

## Déplacement généralisé

### Déplacement généralisé

$$\forall X \in S(X_1) \quad \bar{\mathbf{u}}(\vec{X}) = \underbrace{\bar{\mathbf{u}}(X_1)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\bar{\omega}(X_1) \wedge \overrightarrow{X_1 X}}_{\text{Rotation}} + \underbrace{v_2(\vec{X}) \vec{E}_2(X_1) + v_3(\vec{X}) \vec{E}_3(X_1)}_{\text{Déplacement dans le plan}}$$

$$\forall X \in S(X_1) \quad \bar{\mathbf{u}}(\vec{X}) = \left\{ \begin{array}{l} u_1(X_1) + \omega_2(X_1)X_3 - \omega_3(X_1)X_2 \\ u_2(X_1) - \omega_1(X_1)X_3 + v_2(\vec{X}) \\ u_3(X_1) + \omega_1(X_1)X_2 + v_3(\vec{X}) \end{array} \right\}$$

### Remarques

$$\bar{\mathbf{F}}(X_1) \bar{\mathbf{e}}_2 = \overrightarrow{x(X_1) x(X_1, 1, 0)} = \vec{E}_2$$

$\bar{\mathbf{F}}(X_1) \bar{\mathbf{e}}_3$  est unitaire et orthogonal à  $\bar{\mathbf{F}}(X_1) \bar{\mathbf{e}}_2$

$$\left( \bar{\mathbf{F}}(X_1) \bar{\mathbf{e}}_1 \right) \cdot \left( \bar{\mathbf{F}}(X_1) \bar{\mathbf{e}}_2 \right) \approx u_{2,1}(X_1) - \omega_3(X_1) + \dots$$

$$\left( \bar{\mathbf{F}}(X_1) \bar{\mathbf{e}}_1 \right) \cdot \left( \bar{\mathbf{F}}(X_1) \bar{\mathbf{e}}_3 \right) \approx u_{3,1}(X_1) + \omega_2(X_1) + \dots$$



**Donc en général la déformée d'une section droite n'est pas, au second ordre près, orthogonale à la déformée de la fibre moyenne**

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- **Efforts généralisés**

## Efforts généralisés

### Travail virtuel des efforts extérieurs

Pour simplifier la présentation on se limite aux forces volumiques

$$\Pi_{\text{ext}} = \iiint_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dv$$

$$\iiint_{\Omega} \bullet \, dv = \int \left( \iint_{s(x_1)} \bullet \, dX_2 dX_3 \right) dX_1$$

$$\Pi_{\text{ext}} = \int \left( \iint_{s(x_1)} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dX_2 dX_3 \right) dX_1$$

$$\delta \vec{u}(\vec{X}) = \delta \vec{u}^f(x_1) + \delta \vec{\omega}(x_1) \wedge \overline{X_1 X} = \begin{Bmatrix} \delta u_1^f \\ \delta u_2^f \\ \delta u_3^f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \omega_1^f \\ \delta \omega_2^f \\ \delta \omega_3^f \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta u_1^f + \delta \omega_2^f X_3 - \delta \omega_3^f X_2 \\ \delta u_2^f - \delta \omega_1^f X_3 \\ \delta u_3^f + \delta \omega_1^f X_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Pi_{\text{ext}} = \int \delta \vec{u}^f \cdot \left( \iint_{s(x_1)} \vec{f} \, dX_2 dX_3 \right) dX_1 + \int \delta \vec{\omega} \cdot \left( \iint_{s(x_1)} \overline{X_1 X} \wedge \vec{f} \, dX_2 dX_3 \right) dX_1 \quad ((\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}))$$

### Efforts généralisés

$$\vec{f}^f(x_1) = \iint_{s(x_1)} \vec{f} \, dX_2 dX_3 \quad [\text{N/m}]$$

$$\vec{c}^f(x_1) = \iint_{s(x_1)} \overline{X_1 X} \wedge \vec{f} \, dX_2 dX_3 \quad [\text{Nm/m}]$$

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- **Déformations généralisées**

## Déformations généralisées

### Déformations généralisées

$$\vec{u}(\vec{X}) = \begin{cases} u_1(X_1) + \omega_2(X_1)X_3 - \omega_3(X_1)X_2 \\ u_2(X_1) - \omega_1(X_1)X_3 + v_2(\vec{X}) \\ u_3(X_1) + \omega_1(X_1)X_2 + v_3(\vec{X}) \end{cases} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_{1,1}^f + \omega_{2,1}X_3 - \omega_{3,1}X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(u_{2,1}^f - \omega_{1,1}X_3 - \omega_3) & v_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(u_{3,1}^f + \omega_{1,1}X_2 + \omega_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix}$$

On définit les déformations généralisées:

$$\begin{aligned} a_1(X_1) &= u_{1,1}^f(X_1) & \chi_1(X_1) &= \omega_{1,1}(X_1) \\ a_2(X_1) &= u_{2,1}^f(X_1) - \omega_3(X_1) & \chi_2(X_1) &= \omega_{2,1}(X_1) \\ a_3(X_1) &= u_{3,1}^f(X_1) + \omega_2(X_1) & \chi_3(X_1) &= \omega_{3,1}(X_1) \end{aligned}$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2X_3 - \chi_3X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1X_3) & v_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1X_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix}$$

**Théorie des poutres**

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- **Déformations généralisées**

## Déformations généralisées

### Déformations généralisées

$$\begin{aligned} a_1 &= u_{1,1}^f & \chi_1 &= \omega_{1,1} \\ a_2 &= u_{2,1}^f - \omega_3 & \chi_2 &= \omega_{2,1} \\ a_3 &= u_{3,1}^f + \omega_2 & \chi_3 &= \omega_{3,1} \end{aligned}$$

#### Cas1: $a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

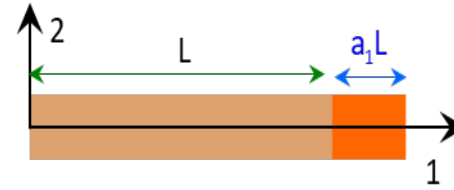
On en déduit

$$u_2^f = 0, u_3^f = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \vec{0}$$

soit

$$u_1(X) = a_1 X_1 \quad \text{et} \quad u_3(X) = u_2(X) = 0$$

La poutre est dans un état d'allongement pur



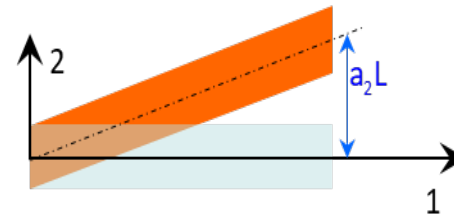
#### Cas2: $a_2 \neq 0, a_1 = a_3 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

On en déduit

$$u_1^f = 0, u_3^f = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \vec{0}$$

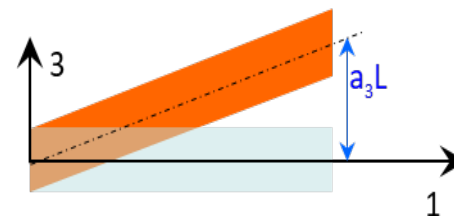
$$u_2^f(X_1) = a_2 X_1 \quad \text{et} \quad u_2(X) = a_2 X_1$$

La poutre est dans un état de glissement dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$



#### Cas3: $a_3 \neq 0, a_1 = a_2 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

La poutre est dans un état de glissement dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$



**Théorie des poutres**

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- **Déformations généralisées**

## Déformations généralisées

### Déformations généralisées

$$\begin{aligned} a_1 &= u_{1,1}^f & \chi_1 &= \omega_{1,1} \\ a_2 &= u_{2,1}^f - \omega_3 & \chi_2 &= \omega_{2,1} \\ a_3 &= u_{3,1}^f + \omega_2 & \chi_3 &= \omega_{3,1} \end{aligned}$$

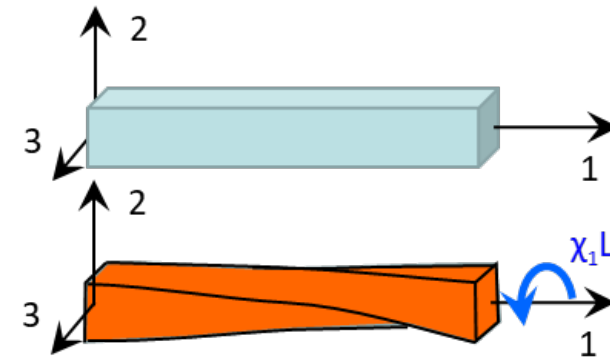
**Cas4:**  $\chi_1 \neq 0, a_1 = a_2 = a_3 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

On en déduit

$$a_i = 0 \text{ soit } \vec{u}^f = \vec{0}$$

$$\text{et } \omega_2 = \omega_3 = 0, \text{ et } \omega_1 = \chi_1 X_1$$

La poutre est dans un état de torsion autour de son axe



**Cas5:**  $\chi_2 \neq 0, a_1 = a_2 = a_3 = \chi_1 = \chi_3 = 0$

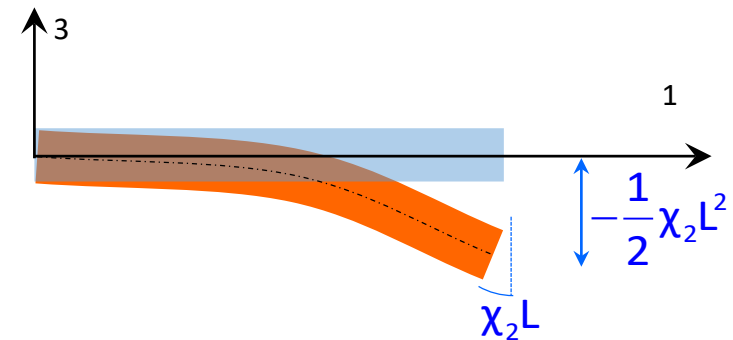
$$u_1^f = u_2^f = 0 \text{ et } \omega_1 = \omega_3 = 0$$

$$\text{Soit } \omega_2 = \chi_2 X_1 \text{ et } u_3^f(X_1) = -\frac{1}{2} \chi_2 X_1^2$$

$$\text{D'où } u_1(X) = \chi_2 X_1 X_3,$$

$$u_2(X) = 0, u_3(X) = -\frac{1}{2} \chi_2 X_1^2$$

La fibre moyenne se déforme selon une parabole dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ , la section droite tournant de  $\chi_2 X_1$  autour de  $\vec{e}_2$ .



## RDM

### Introduction

### Théorie des poutres

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- **Déformations généralisées**

### Traction

### Torsion

### Flexion

### Méthodes Énergétiques

## Déformations généralisées

### Déformations généralisées

$$a_1 = u_{1,1}^f \quad \chi_1 = \omega_{1,1}$$

$$a_2 = u_{2,1}^f - \omega_3 \quad \chi_2 = \omega_{2,1}$$

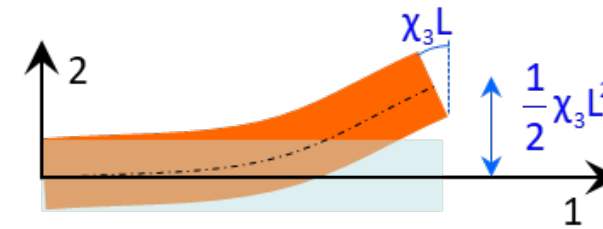
$$a_3 = u_{3,1}^f + \omega_2 \quad \chi_3 = \omega_{3,1}$$

### Cas6: $\chi_3 \neq 0$ , $a_1 = a_2 = a_3 = \chi_1 = \chi_2 = 0$

$\omega_1 = \omega_2 = 0$  et par suite  $u_1(X) = -\chi_3 X_1 X_2$ ,

$$u_3(X) = 0 \text{ et } u_2(X) = \frac{1}{2} \chi_3 X_1^2 \quad \text{La}$$

fibres moyennes se déforment selon une parabole dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , la section droite tournant de  $\chi_3 X_1$  autour de  $\vec{e}_3$



- $a_1$  est l'allongement unitaire de la fibre moyenne
- $a_2$  et  $a_3$  sont des glissements dans les plans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$
- $\chi_1$  est l'angle de torsion autour de l'axe  $\vec{e}_1$  par unité de longueur
- $\chi_2, \chi_3$  sont les courbures de la fibre moyenne dans les plans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- Déformations généralisées
- **Contraintes généralisées**

## Contraintes généralisées

### Travail Virtuel des efforts intérieurs

$$\Pi_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta\varepsilon}} \, dv$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Hypothèse de Bernoulli !**

$$\overline{\overline{\delta\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \delta a_1 + \delta \chi_2 X_3 - \delta \chi_3 X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(\delta a_2 - \delta \chi_1 X_3) & \delta v_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(\delta a_3 + \delta \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(\delta v_{2,3} + \delta v_{3,2}) & \delta v_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\iiint_{\Omega} \bullet \, dv = \int \left( \iint_{S(X_1)} \bullet \, dX_2 dX_3 \right) dX_1$$

$$-\Pi_{\text{int}} = \iiint_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta\varepsilon}} \, dv = \int_0^L \left( \iint_{S(X_1)} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta\varepsilon}} \, dX_2 dX_3 \right) dX_1$$

$$= \int_0^L \left( \delta a_1 \iint_{S(X_1)} \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 + \delta a_2 \iint_{S(X_1)} \sigma_{12} \, dX_2 dX_3 + \delta a_3 \iint_{S(X_1)} \sigma_{13} \, dX_2 dX_3 + \right) dX_1$$

$$+ \int_0^L \left( \delta \chi_1 \iint_{S(X_1)} (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) \, dX_2 dX_3 \right) dX_1$$

$$+ \int_0^L \left( \delta \chi_2 \iint_{S(X_1)} X_3 \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 - \delta \chi_3 \iint_{S(X_1)} X_2 \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 \right) dX_1$$



**Théorie des poutres**

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- Déformations généralisées
- **Contraintes généralisées**

## Contraintes généralisées

### Contraintes généralisées

$$T_1(X_1) = \iint_{S(X_1)} \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 \quad \text{Effort normal}$$

$$T_2(X_1) = \iint_{S(X_1)} \sigma_{12} \, dX_2 dX_3 \quad \text{Efforts tranchants}$$

$$T_3(X_1) = \iint_{S(X_1)} \sigma_{13} \, dX_2 dX_3$$

$$M_1(X_1) = \iint_{S(X_1)} (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) \, dX_2 dX_3 \quad \text{Moment de torsion}$$

$$M_2(X_1) = \iint_{S(X_1)} X_3 \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 \quad \text{Moments de flexion}$$

$$M_3(X_1) = -\iint_{S(X_1)} X_2 \sigma_{11} \, dX_2 dX_3$$

$$\vec{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \iint_{S(X_1)} \overrightarrow{\sigma e_1} \, dX_2 dX_3$$

$$\vec{M} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \iint_{S(X_1)} \overrightarrow{X_1 X} \wedge \overrightarrow{\sigma e_1} \, dX_2 dX_3$$

**la contrainte généralisée est constituée des éléments de réduction, au centre de la section, du torseur des forces appliquées par la partie droite de la poutre sur la partie gauche!**

$$\vec{T} = \sum \text{Forces "à droite"} = -\sum \text{Forces "à gauche"}$$

$$\vec{M} = \sum \text{Moments "à droite"} = -\sum \text{Moments "à gauche"}$$

# Équations d'équilibre

## PTV

$$\Pi_i + \Pi_e = \Pi_a$$

$$-\iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \delta \overline{\overline{D}} \, dv + \iiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dv = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \quad (\text{en ne tenant compte que des forces de volume pour simplifier})$$

$$\delta \vec{u} = \delta \vec{u}^f(X_1) + \delta \vec{\omega}(X_1) \wedge \overline{X_1 X}$$

$$\Pi_{\text{ext}} = \int \delta \vec{u}^f \cdot \vec{f} \, dX_1 + \int \delta \vec{\omega} \cdot \vec{c} \, dX_1$$

$$a_1 = u_{1,1}^f \quad \chi_1 = \omega_{1,1}$$

$$a_2 = u_{2,1}^f - \omega_3 \quad \chi_2 = \omega_{2,1}$$

$$a_3 = u_{3,1}^f + \omega_2 \quad \chi_3 = \omega_{3,1}$$

$$-\Pi_{\text{int}} = \int \left( \sum_{i=1}^3 (\delta a_i T_i + \delta \chi_i M_i) \right) dX_1$$

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_0^L \left( \delta \vec{u}_{,1}^f \cdot \vec{T} - \delta \omega_3 T_2 + \delta \omega_2 T_3 + \delta \vec{\omega}_{,1}^f \cdot \vec{M} \right) dX_1$$

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_0^L \left( \delta \vec{u}_{,1}^f \cdot \vec{T} + \delta \vec{\omega}_{,1}^f \cdot \vec{M} - \delta \vec{\omega}^f \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{T}) \right) dX_1 \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{T} = T_2 \vec{e}_3 - T_3 \vec{e}_2$$

$$\Pi_{\text{int}} = \int \left( \delta \vec{u}^f \cdot \vec{T}_{,1} + \delta \vec{\omega}^f \cdot \vec{M}_{,1} + \delta \vec{\omega}^f \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{T}) \right) dX_1 + \dots$$

$$\int \left( \delta \vec{u}^f \cdot \left( \vec{T}_{,1} + \vec{f}^f \right) + \delta \vec{\omega}^f \cdot \left( \vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} + \vec{c}^f \right) \right) dX_1 + \dots \quad \vec{T}_{,1} + \vec{f}^f = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} + \vec{c}^f = \vec{0}$$

...

Rmq: Sur un tronçon non chargé:  $\vec{T}_{,1} = \vec{0}$  et  $\vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dM_2}{dX_1} = T_3$  et  $\frac{dM_3}{dX_1} = -T_2$

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- Déformations généralisées
- Contraintes généralisées
- **Equations d'équilibre**

### RDM

#### Introduction

#### Théorie des poutres

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- Déformations généralisées
- Contraintes généralisées
- Equations d'équilibre
- **Loi de comportement**

#### Traction

#### Torsion

#### Flexion

#### Méthodes Énergétiques

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{\mathbf{1}} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1 X_3) & \nu_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(\nu_{2,3} + \nu_{3,2}) & \nu_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \iint_S \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 = \iint_S E \varepsilon_{11} \, dX_2 dX_3 = \iint_S E (a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2) \, dX_2 dX_3$$

$$T_2 = \iint_S \sigma_{12} \, dX_2 dX_3 = \iint_S \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12} \, dX_2 dX_3 = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (a_2 - \chi_1 X_3) \, dX_2 dX_3$$

$$T_3 = \iint_S \sigma_{13} \, dX_2 dX_3 = \iint_S \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{13} \, dX_2 dX_3 = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (a_3 + \chi_1 X_2) \, dX_2 dX_3$$

### RDM

#### Introduction

#### Théorie des poutres

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- Déformations généralisées
- Contraintes généralisées
- Equations d'équilibre
- **Loi de comportement**

#### Traction

#### Torsion

#### Flexion

#### Méthodes Énergétiques

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{\mathbf{1}} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1 X_3) & \nu_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(\nu_{2,3} + \nu_{3,2}) & \nu_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \iint_S (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) dX_2 dX_3 = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (-a_2 X_3 + a_3 X_2 + \chi_1 (X_2^2 + X_3^2)) dX_2 dX_3$$

$$M_2 = \iint_S X_3 \sigma_{11} dX_2 dX_3 = \iint_S E (a_1 X_3 + \chi_2 X_3^2 - \chi_3 X_2 X_3) dX_2 dX_3$$

$$M_3 = -\iint_S X_2 \sigma_{11} dX_2 dX_3 = -\iint_S E (a_1 X_2 - \chi_3 X_2^2 + \chi_2 X_2 X_3) dX_2 dX_3$$

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- Déformations généralisées
- Contraintes généralisées
- Equations d'équilibre
- **Loi de comportement**

## Loi de comportement

### Simplification, section d'une poutre

$$T_1 = \iint_S E (a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2) dX_2 dX_3$$

$$T_2 = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (a_2 - \chi_1 X_3) dX_2 dX_3$$

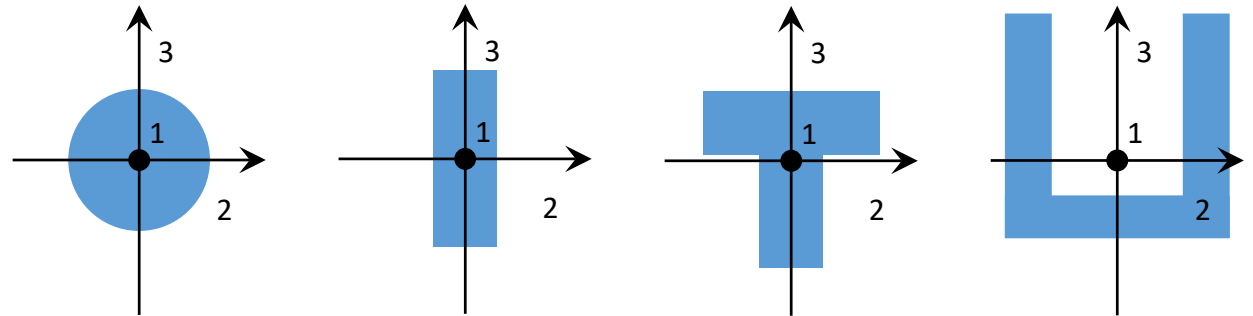
$$T_3 = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (a_3 + \chi_1 X_2) dX_2 dX_3$$

$$M_1 = \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (-a_2 X_3 + a_3 X_2 + \chi_1 (X_2^2 + X_3^2)) dX_2 dX_3$$

$$M_2 = \iint_S E (a_3 X_3 + \chi_2 X_3^2 - \chi_3 X_2 X_3) dX_2 dX_3$$

$$M_3 = -\iint_S E (a_1 X_2 - \chi_3 X_2^2 + \chi_2 X_2 X_3) dX_2 dX_3$$

$$\iint_{S(x_1)} E(X_1, X_2, X_3) \overrightarrow{OM} dX_2 dX_3 = \vec{0}$$



$$\iint_{S(x_1)} E X_3 dX_2 dX_3 = 0$$

$$\iint_{S(x_1)} E X_2 dX_2 dX_3 = 0$$

$$\iint_{S(x_1)} E X_2 X_3 dX_2 dX_3 = 0$$

$$T_1 = a_1 \iint_S E dX_2 dX_3$$

$$T_2 = a_2 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} dX_2 dX_3$$

$$T_3 = a_3 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} dX_2 dX_3$$

$$M_1 = \chi_1 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (X_2^2 + X_3^2) dX_2 dX_3$$

$$M_2 = \chi_2 \iint_S E X_3^2 dX_2 dX_3$$

$$M_3 = \chi_3 \iint_S E X_2^2 dX_2 dX_3$$

- Définitions & Hypothèses de Bernoulli
- Déplacement généralisé
- Efforts généralisés
- Déformations généralisées
- Contraintes généralisées
- Equations d'équilibre
- **Loi de comportement**

## Loi de comportement

### Cas mono matériaux

$$T_1 = a_1 \iint_S E \, dX_2 dX_3 \quad M_1 = \chi_1 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} (X_2^2 + X_3^2) \, dX_2 dX_3$$

$$T_2 = a_2 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} \, dX_2 dX_3 \quad M_2 = \chi_2 \iint_S E X_3^2 \, dX_2 dX_3$$

$$T_3 = a_3 \iint_S \frac{E}{2(1+\nu)} \, dX_2 dX_3 \quad M_3 = \chi_3 \iint_S E X_2^2 \, dX_2 dX_3$$

Si de plus les caractéristiques ne dépendent pas de l'espace (un seul matériau), on obtient :

$$T_1 = a_1 ES \quad , \quad T_2 = a_2 GS \quad , \quad T_3 = a_3 GS$$

$$M_1 = \chi_1 GI_1 \quad , \quad M_2 = \chi_2 EI_2 \quad , \quad M_3 = \chi_3 EI_3$$

Où G est le module de Coulomb  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$I_1 = \iint_S (X_2^2 + X_3^2) \, dX_2 dX_3$$

et  $I_1, I_2, I_3$  les moments quadratiques  $I_2 = \iint_S X_3^2 \, dX_2 dX_3$

$$I_3 = \iint_S X_2^2 \, dX_2 dX_3$$

## Traction

### Définition

$$T_1 \neq 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0$$

### Dans quel cas ?

Pour chaque intervalle  $]X_1^i, X_1^{i+1}[$

$$\vec{f}^f + \vec{T}_{,1} = \vec{0}$$

$$\vec{c}^f + \vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

Pour  $X_1^i \quad i = 1, \dots, J$

$$\vec{F}^i + \vec{T}(X_1^{i+}) - \vec{T}(X_1^{i-}) = \vec{0}$$

$$\vec{C}^i + \vec{M}(X_1^{i+}) - \vec{M}(X_1^{i-}) = \vec{0}$$



$$\vec{f}^f = f^f \vec{e}_1, \quad \vec{c}^f = \vec{0}, \quad \vec{F}^i = F^i \vec{e}_1, \quad \vec{C}^i = \vec{0}$$

## Traction

### Conséquences

$$T_1 = a_1 ES \quad , \quad T_2 = a_2 GS \quad , \quad T_3 = a_3 GS$$

$$M_1 = \chi_1 GI_1 \quad , \quad M_2 = \chi_2 EI_2 \quad , \quad M_3 = \chi_3 EI_3$$

$$\Rightarrow T_1 = a_1 ES, \quad a_2 = a_3 = 0 \text{ et } \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1 X_3) & v_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix} \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## RDM

Introduction

Théorie des poutres

**Traction**

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques



## Traction

### Relation contrainte – effort normal

$$T_1(X_1) = \iint_{S(X_1)} \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 \quad \longrightarrow \quad \sigma_n = \frac{T_1}{S}$$

### Allongement

$$\Delta L = \int_{\gamma} du_1 \quad \varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dX_1} = \frac{\sigma_n}{E}$$

$$\Delta L = \int_{\gamma} \varepsilon_{11} \, dX_1 = \int_{\gamma} \frac{\sigma_n}{E} \, dX_1 = \int_{\gamma} \frac{T_1}{SE} \, dX_1$$

$$\Delta L = \frac{T_1 L}{SE}$$

## Torsion

### Définition

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \quad M_1 \neq 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0$$

### Dans quel cas ?

Pour chaque intervalle  $]X_1^i, X_1^{i+1}[$

$$\vec{f}^f + \vec{T}_{,1} = \vec{0}$$

$$\vec{c}^f + \vec{M}_{,1} + \vec{e}_1 \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

Pour  $X_1^i \quad i = 1, \dots, J$

$$\vec{F}^i + \vec{T}(X_1^{i+}) - \vec{T}(X_1^{i-}) = \vec{0}$$

$$\vec{C}^i + \vec{M}(X_1^{i+}) - \vec{M}(X_1^{i-}) = \vec{0}$$



$$\vec{f}^f = \vec{0}, \quad \vec{c}^f = c^f \vec{e}_1, \quad \vec{F}^i = \vec{0}, \quad \vec{C}^i = C^i \vec{e}_1$$

## Torsion

### Conséquences

$$T_1 = a_1 ES \quad , \quad T_2 = a_2 GS \quad , \quad T_3 = a_3 GS$$

$$M_1 = \chi_1 GI_1 \quad , \quad M_2 = \chi_2 EI_2 \quad , \quad M_3 = \chi_3 EI_3$$



$$a_1 = a_2 = a_3 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \text{ et } M_1 = \chi_1 GI_1$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1 X_3) & v_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\chi_1 X_3}{2} & \frac{\chi_1 X_2}{2} \\ \frac{-\chi_1 X_3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\chi_1 X_2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

**Torsion**

Flexion

Méthodes Énergétiques

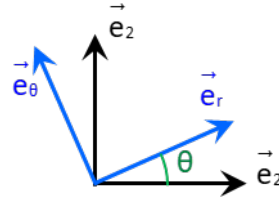
## Torsion

### Déplacement, déformation contrainte

Dans le repère  $(G, \vec{e}_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$$\forall M \quad \vec{u}(M) = -\omega_1 X_3 \vec{e}_2 + \omega_1 X_2 \vec{e}_3$$

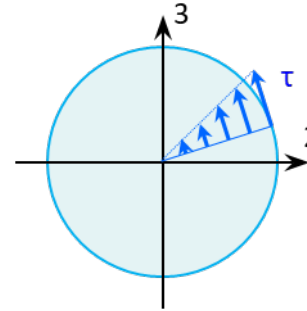
$$\vec{u}(M) = \omega_1 r \vec{e}_\theta$$



$$\overset{=}{\varepsilon}_{(G, \vec{e}_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{r \omega_{1,1}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{r \chi_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{=}{\sigma}_{(G, \vec{e}_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tau = 2 G \varepsilon_{x_1 \theta} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \tau = 2 G \varepsilon_{x_1 \theta} = Gr \chi_1 = \frac{M_1}{I_1} r$$

$$\tau = \frac{M_1}{I_1} r$$



$$\theta_{AB} = \int_{X_A}^{X_B} \chi_1 \, dX_1 = \int_{X_A}^{X_B} \frac{\tau}{Gr} \, dX_1$$

$$\theta_{AB} = \int_{X_A}^{X_B} \frac{M_1}{GI_1} \, dX_1$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

**Torsion**

Flexion

Méthodes Énergétiques

## Flexion

### Définition

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 \neq 0, \quad M_3 \neq 0$$

### Conséquences

$$T_1 = a_1 ES, \quad T_2 = a_2 GS, \quad T_3 = a_3 GS$$

$$M_1 = \chi_1 GI_1, \quad M_2 = \chi_2 EI_2, \quad M_3 = \chi_3 EI_3$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \chi_1 = 0 \text{ et } M_2 = \chi_2 EI_2, \quad M_3 = \chi_3 EI_3$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1 X_3) & v_{2,2} & \cdot \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & \cdot \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{bmatrix} \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = E\chi_2 X_3 - E\chi_3 X_2$$

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{I_2} X_3 - \frac{M_3}{I_3} X_2$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

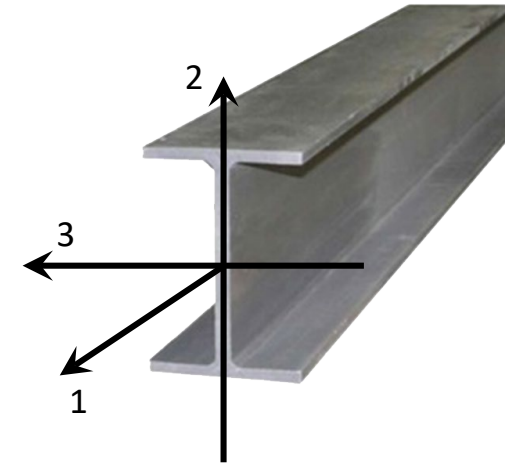
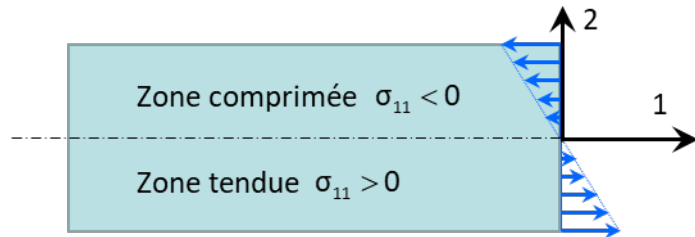
Méthodes Énergétiques

## Flexion

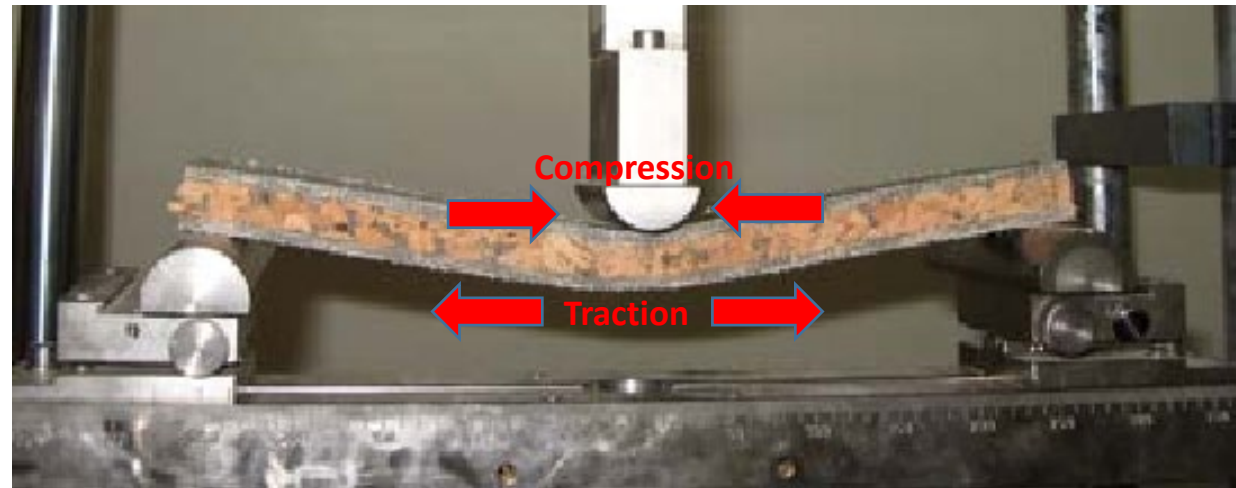
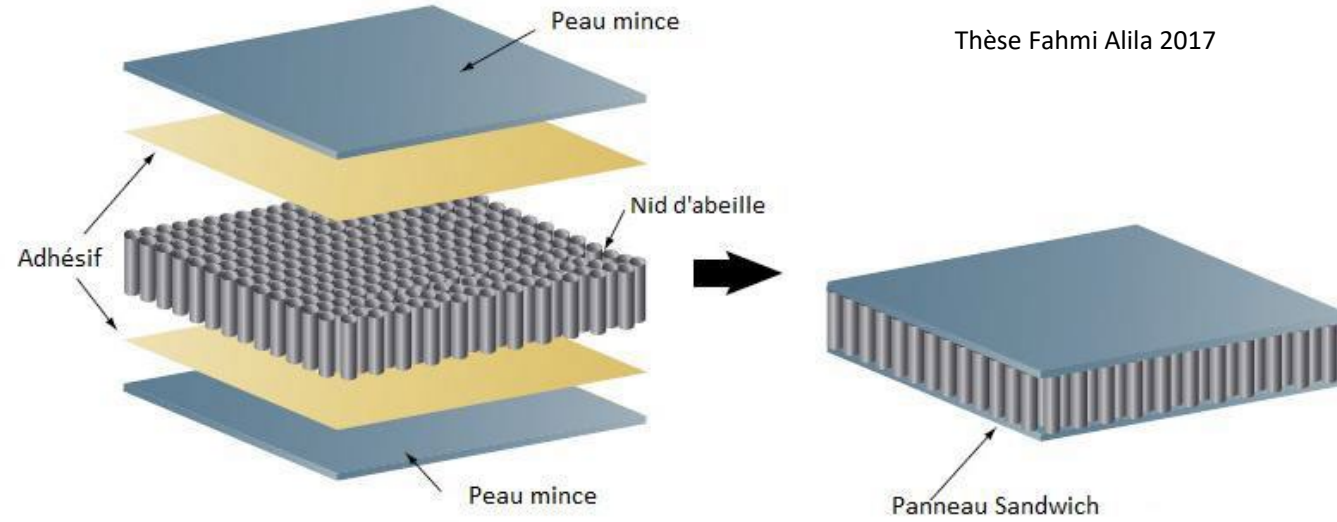
### Flexion pure plane

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 \neq 0$$

$$\sigma_{11} = -\frac{M_3}{I_3} X_2$$



$$I_3 > I_2$$



A. Mir, B. Bezzazi, Redouane Zitoune, Francis Collombet. Caractérisation mécanique d'un panneau sandwich à âme en liège et peaux jute/époxy. 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.25. hal-00597889

## Flexion

### Déformée de la poutre

$$\begin{aligned} a_1 = 0 &\rightarrow u_{1,1}^f = 0 \rightarrow u_1^f = \text{Cste} = 0 \\ \chi_1 = 0 &\rightarrow \omega_{1,1} = 0 \rightarrow \omega_1 = \text{Cste} = 0 \\ \chi_2 = 0 &\rightarrow \omega_{2,1} = 0 \rightarrow \omega_2 = \text{Cste} = 0 \\ a_3 = 0 &\rightarrow u_{3,1}^f = 0 \rightarrow u_3^f = \text{Cste} = 0 \\ a_2 = 0 &\rightarrow u_{2,1}^f = \omega_3 \rightarrow u_{2,11}^f = \omega_{3,1} = \chi_3 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u_2^f}{dX_1^2} = \frac{M_3}{EI_3}$$



## Flexion

### Flexion plane simple

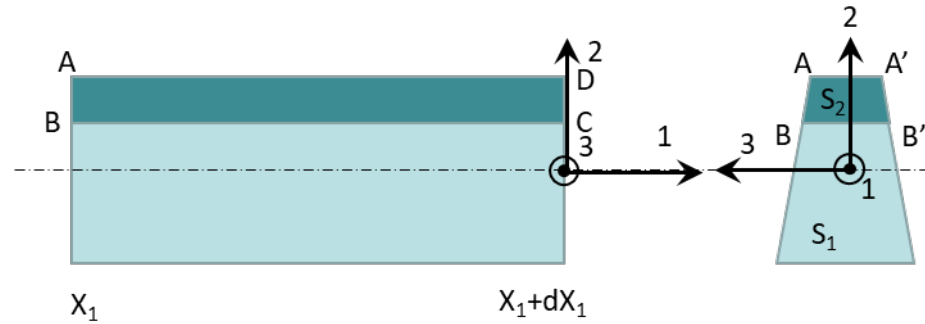
$$T_1 = 0, \quad T_2 \neq 0, \quad T_3 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 \neq 0$$

### Contraintes

$$\sigma_{11} = -\frac{M_3}{I_3} X_2$$

$$\sigma_{12} = \frac{T_2}{BB' I_3} \iint_{S_2} X_2 \, dX_2 dX_3$$

$$\sigma_{12} \ll \sigma_{11}$$



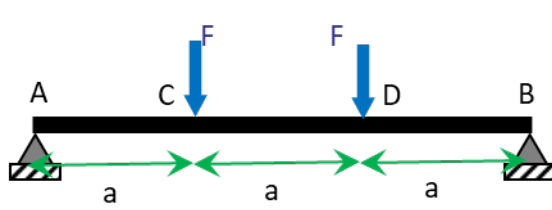
### Déformée de la fibre moyenne

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y')^{3/2}} \xrightarrow{y' \ll 1} \frac{1}{R} \approx y''$$

$$\frac{d^2 u_2^f}{dX_1^2} = \frac{M_3}{EI_3}$$

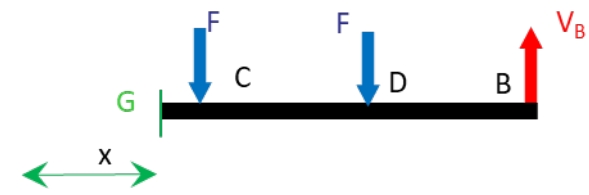
# Flexion

## Exemple de flexion pure



$$\text{PFS / A} \begin{cases} \vec{V}_A + \vec{F} + \vec{F} + \vec{V}_B = \vec{0} \\ \overline{AC} \wedge \vec{F} + \overline{AD} \wedge \vec{F} + \overline{AB} \wedge \vec{V}_B = \vec{0} \end{cases}$$

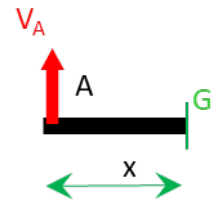
$$\begin{cases} V_A - F - F + V_B = 0 \\ -aF - 2aF + 3aV_B = 0 \end{cases} \quad V_A = V_B = F$$



### Sur la partie AC « à droite »

$$\begin{cases} \vec{T}_{AC} = \vec{F} + \vec{F} + \vec{V}_B \\ \vec{M}_{AC} = \overline{GC} \wedge \vec{F} + \overline{GD} \wedge \vec{F} + \overline{GB} \wedge \vec{V}_B \end{cases} \quad \vec{T}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F - F + V_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{M}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x-a)F + (x-2a)F + (3a-x)V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF \end{pmatrix}$$

Rmq:  $\frac{dM_3}{dx} = -T_2$



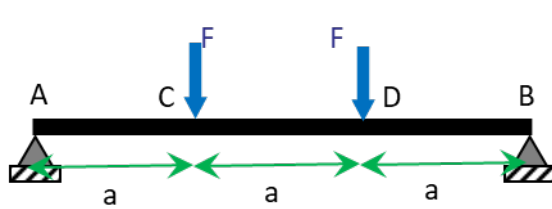
### Si on vérifie « à gauche »

$$\begin{cases} \vec{T}_{AC} = -(\vec{V}_A) \\ \vec{M}_{AC} = -(\overline{GA} \wedge \vec{V}_A) \end{cases} \quad \vec{T}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -V_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{M}_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(-xV_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF \end{pmatrix}$$

- RDM
- Introduction
- Théorie des poutres
- Traction
- Torsion
- Flexion**
- Méthodes Énergétiques

# Flexion

## Exemple de flexion pure

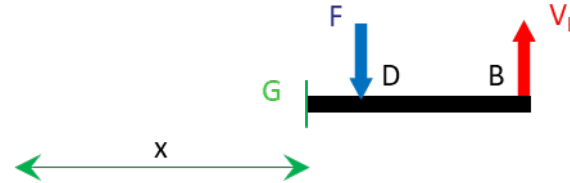


$$V_A = V_B = F$$

### Sur la partie AC « à droite »

$$\vec{T}_{AC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{M}_{AC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ xF \end{Bmatrix}$$

### Sur la partie CD



$$\begin{cases} \vec{T}_{CD} = \vec{F} + \vec{V}_B \\ \vec{M}_{CD} = \vec{GD} \wedge \vec{F} + \vec{GB} \wedge \vec{V}_B \end{cases} \quad \vec{T}_{CD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F + V_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{M}_{CD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x-2a)F + (3a-x)V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ aF \end{Bmatrix}$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

**Flexion**

Méthodes Énergétiques

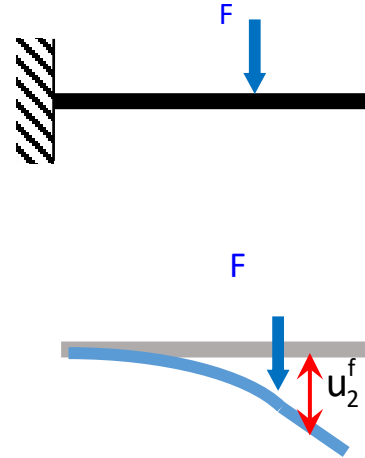
## Flexion

### Méthode de la double intégration: principe

$$\frac{d^2 u_2^f}{dX_1^2} = \frac{M_3}{EI_3}$$

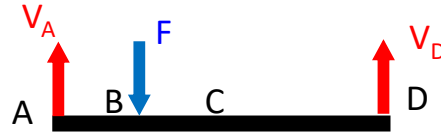
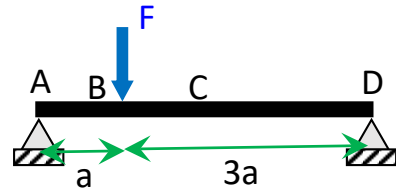
$$\frac{du_2^f}{dX_1} = \int \frac{M_3}{EI_3} dX_1 + C_1$$

$$u_2^f(X_1) = \int \left( \int \frac{M_3}{EI_3} dX_1 \right) dX_1 + C_1 X_1 + C_2$$



# Flexion

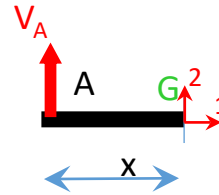
## Méthode de la double intégration: Exemple



$$\text{PFS} \begin{cases} \vec{V}_A + \vec{F} + \vec{V}_D = \vec{0} \\ /A \left\{ \begin{aligned} \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AD} \wedge \vec{V}_D &= \vec{0} \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A - F + V_D = 0 \\ -aF + 4aV_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \frac{3F}{4} \\ V_D = \frac{F}{4} \end{cases}$$

### Sur la partie AB



$$\vec{M}_{AB} = -\vec{GA} \wedge \vec{V}_A \quad M_{3AB} = xV_A = \frac{3}{4}Fx$$

$$EI_3 u_{2,11}^f|_{AB} = EI_3 y_{AB}'' = M_{3AB}$$

$$EI_3 y_{AB}' = \frac{F}{4} \left( \frac{3x^2}{2} + C_1 \right)$$

$$EI_3 y_{AB} = \frac{F}{4} \left( \frac{x^3}{2} + C_1 x + C_2 \right)$$

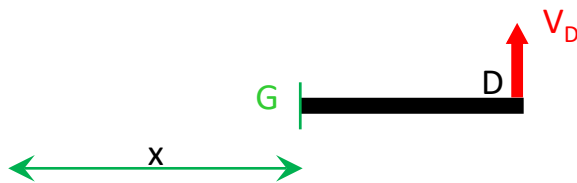
### Sur la partie BD

$$\vec{M}_{BD} = \vec{GD} \wedge \vec{V}_D$$

$$EI_3 y_{BD}' = \frac{F}{4} \left( -\frac{x^2}{2} + 4ax + C_3 \right)$$

$$M_{3BD} = (4a-x)V_D = \frac{F}{4}(4a-x)$$

$$EI_3 y_{BD} = \frac{F}{4} \left( -\frac{x^3}{6} + 2ax^2 + C_3 x + C_4 \right)$$



RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

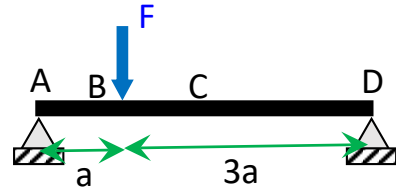
Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

## Flexion

### Méthode de la double intégration: Exemple



$$EI_3 y_{AB} = \frac{F}{4} \left( \frac{x^3}{2} + C_1 x + C_2 \right)$$

$$EI_3 y_{BD} = \frac{F}{4} \left( -\frac{x^3}{6} + 2ax^2 + C_3 x + C_4 \right)$$

RDM

Conditions aux limites

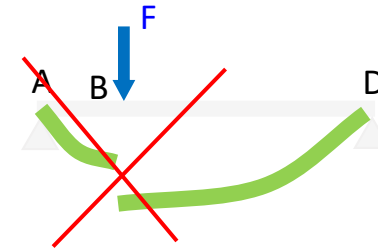
$$y_{AB}(0) = 0$$

$$y_{BD}(4a) = 0$$

Conditions de continuité

$$y_{AB}(a) = y_{BD}(a)$$

$$y'_{AB}(a) = y'_{BD}(a)$$



$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ \frac{a^3}{2} + C_1 a + C_2 = -\frac{a^3}{6} + 2a^3 + C_3 a + C_4 \\ \frac{3a^2}{2} + C_1 = -\frac{a^2}{2} + 4a^2 + C_3 \\ -\frac{64a^3}{6} + 32a^3 + 4aC_3 + C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{7}{2}a^2 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = -\frac{11}{2}a^2 \\ C_4 = \frac{2}{3}a^3 \end{cases}$$

$$EI_3 y_{AB} = \frac{F}{8} (x^3 - 7a^2 x)$$

$$EI_3 y_{BD} = \frac{F}{24} (-x^3 + 12ax^2 - 33a^2 x + 4a^3)$$

## Flexion

### Fonctions de singularité

$$f_n(X) \equiv \langle X-a \rangle^n \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} \text{Sin} < 0 & f_n(X) = \infty \quad \text{lorsque } X = a \\ & f_n(X) = 0 \quad \text{lorsque } X \neq a \\ \text{Sin} \geq 0 & f_n(X) = (X-a)^n \quad \text{lorsque } X \geq a \\ & f_n(X) = 0 \quad \text{lorsque } X < a \end{cases}$$

### Fonctions de singularité : utilisation pour le calcul des flèches

$[N/m]$   $q(X_1)$  Chargement linéique **perpendiculaire** à une poutre **droite**

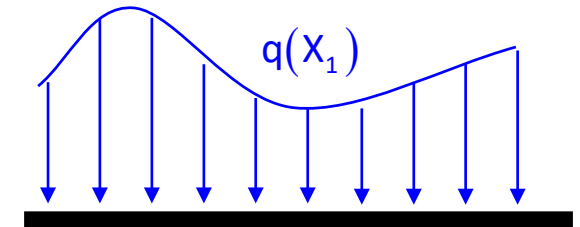
$$[N] \quad -T_2(X_1) = \int_{-\infty}^{X_1} q(x) \, dx \quad \text{Effort tranchant}$$

$$[Nm] \quad M_3(X_1) = -\int_{-\infty}^{X_1} T_2(x) \, dx \quad \text{Moment fléchissant}$$

### Règle d'intégration

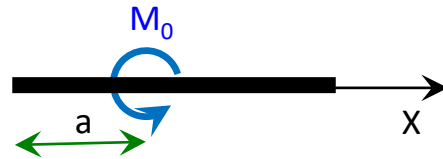
$$n < 0 \rightarrow \int_{-\infty}^x \langle X-a \rangle^n \, dX = \langle X-a \rangle^{n+1}$$

$$n < 0 \rightarrow \int_{-\infty}^x \langle X-a \rangle^n \, dX = \frac{\langle X-a \rangle^{n+1}}{n+1}$$

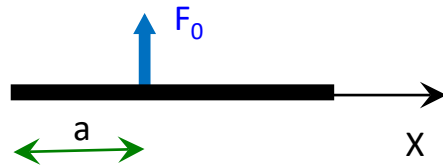


## Flexion

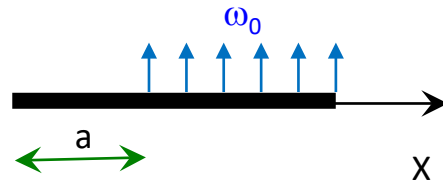
### Principales fonctions de singularité



$$q(x) = -M_0 \langle x - a \rangle^{-2}$$



$$q(x) = F_0 \langle x - a \rangle^{-1}$$

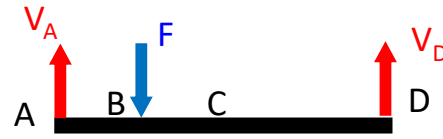
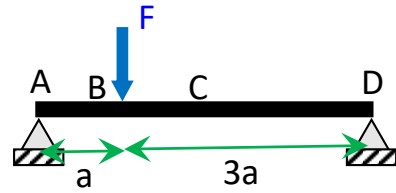


$$q(x) = \omega_0 \langle x - a \rangle^0$$

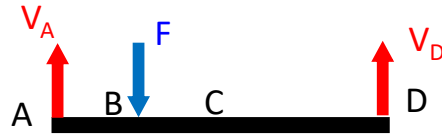


## Flexion

### Méthode singularités: Exemple



$$\begin{cases} V_A = \frac{3F}{4} \\ V_D = \frac{F}{4} \end{cases}$$



$$q(x) = V_A \langle x - 0 \rangle^{-1} + \dots$$

$$q(x) = V_A \langle x - 0 \rangle^{-1} - F \langle x - a \rangle^{-1} + \dots$$

$$q(x) = V_A \langle x - 0 \rangle^{-1} - F \langle x - a \rangle^{-1} + V_D \langle x - 4a \rangle^{-1}$$

$$q(x) = V_A \langle x \rangle^{-1} - F \langle x - a \rangle^{-1}$$

Introduction

Théorie des poutres

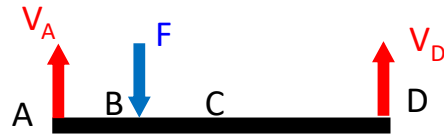
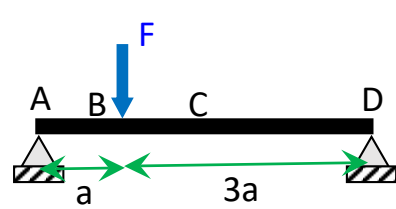
Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

## Méthode singularités: Exemple



$$\begin{cases} V_A = \frac{3F}{4} \\ V_D = \frac{F}{4} \end{cases}$$

$$q(x) = V_A \langle x \rangle^{-1} - F \langle x - a \rangle^{-1}$$

$$q(x) = \frac{F}{4} \left( 3 \langle x \rangle^{-1} - 4 \langle x - a \rangle^{-1} \right)$$

$$-T_2(x) = \frac{F}{4} \left( 3 \langle x \rangle^0 - 4 \langle x - a \rangle^0 + \text{cste} \right)$$

$$M_3(x) = \frac{F}{4} \left( 3 \langle x \rangle^1 - 4 \langle x - a \rangle^1 + \text{cste} \right)$$

$$EI_3 y' = \frac{F}{4} \left( 3 \frac{x^2}{2} - 2 \langle x - a \rangle^2 + C_1 \right)$$

$$EI_3 y = \frac{F}{4} \left( \frac{x^3}{2} - \frac{2}{3} \langle x - a \rangle^3 + C_1 x + C_2 \right)$$

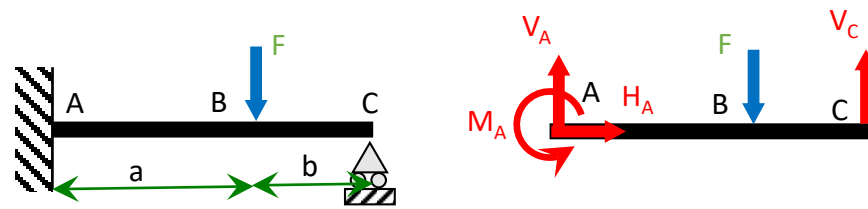
Conditions aux limites  $y(0) = 0$   $C_2 = 0$   
 $y(4a) = 0$   $C_1 = -\frac{7}{2}a^2$

$$EI_3 y = \frac{F}{24} \left( 3x^3 - 4 \langle x - a \rangle^3 - 21a^2 x \right)$$

$$EI_3 y_{AB} = \frac{F}{8} \left( x^3 - 7a^2 x \right)$$

$$EI_3 y_{BD} = \frac{F}{24} \left( -x^3 + 12ax^2 - 33a^2 x + 4a^3 \right)$$

## Exemple de système hyperstatique



$$\text{PFS} / A \begin{cases} \vec{R}_A + \vec{F} + \vec{R}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_A + \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AC} \wedge \vec{R}_C = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F + V_C = 0 \\ M_A - aF + (a+b)V_C = 0 \end{cases}$$

3 équations  
4 inconnues



Système hyperstatique de °1

$$y(a+b) = 0!$$

$$q(x) = -M_A \langle x-0 \rangle^{-2} + V_A \langle x-0 \rangle^{-1} - F \langle x-a \rangle^{-1} + V_C \langle x-(a+b) \rangle^{-1}$$

$$-T_2(x) = -M_A \langle x \rangle^{-1} + V_A \langle x \rangle^0 - F \langle x-a \rangle^0$$

$$M_3(x) = EI_3 y'' = -M_A \langle x \rangle^0 + V_A x - F \langle x-a \rangle^1$$

$$EI_3 y' = -M_A x + V_A \frac{x^2}{2} - \frac{F}{2} \langle x-a \rangle^2 + c_1$$

$$EI_3 y = -M_A \frac{x^2}{2} + V_A \frac{x^3}{6} - \frac{F}{6} \langle x-a \rangle^3 + c_1 x + c_2$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

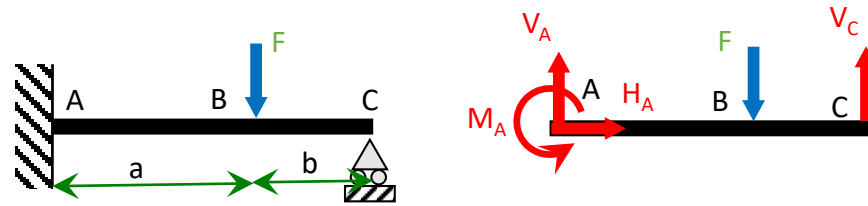
Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

## Exemple de système hyperstatique



$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F + V_C = 0 \\ M_A - aF + (a+b)V_C = 0 \end{cases}$$

$$EI_3 y = -M_A \frac{x^2}{2} + V_A \frac{x^3}{6} - \frac{F}{6} \langle x-a \rangle^3 + c_1 x + c_2 \quad \begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{matrix}$$

$$EI_3 y = -M_A \frac{x^2}{2} + V_A \frac{x^3}{6} - \frac{F}{6} \langle x-a \rangle^3$$

$$y(a+b) = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_A \frac{(a+b)^2}{2} + V_A \frac{(a+b)^3}{6} - \frac{F}{6} b^3 = 0$$

$$M_A = \frac{Fb[(a+b)^2 - b^2]}{2(a+b)^2}, \quad V_C = \frac{Fa^2[3(a+b) - a]}{2(a+b)^3}, \quad V_A = F - \frac{Fa^2[3(a+b) - a]}{2(a+b)^3}$$

RDM

Introduction

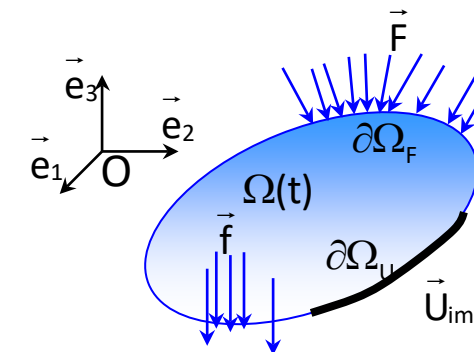
Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques



### RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

Hypothèse des petites perturbations

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u})$$

$$\vec{u} = \vec{U}_{imp} \quad \text{sur } \partial\Omega_u$$

Equation de compatibilité

$$\text{div } \bar{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\bar{\sigma} n = \begin{cases} \vec{F} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{R} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases}$$

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\varepsilon}$$

$\vec{u}$  Déplacement [m]

$\bar{\varepsilon}$  Déformation [-]

$\bar{\sigma}$  Contrainte [N/m<sup>2</sup>]

$\vec{f}$  force volumique (e.g. pesanteur  $\rho \vec{g}$ ) [N/m<sup>3</sup>]

$\vec{F}$  force surfacique (e.g. un effort de pression  $p \vec{n}$ ) [N/m<sup>2</sup>]

$$[\text{N/m}^2]$$

## Méthodes Énergétiques, définitions

### Déplacement Cinématiquement Admissible

$$\vec{v} = \vec{U}_{imp} \text{ sur } \partial\Omega_U$$

$\vec{v}$  continu et différentiable

### Contrainte Statiquement Admissible

$$\text{div} \vec{s} + \vec{f} = \vec{0} \text{ dans } \Omega$$

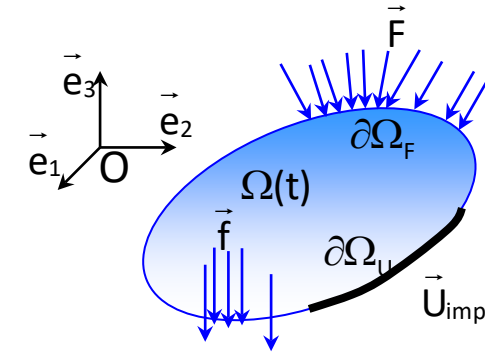
$$\vec{s} \cdot \vec{n} = \vec{F} \text{ sur } \partial\Omega_F$$

### Énergie de déformation élastique

$$W(\vec{e}) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{C} \vec{e} : \vec{e} \, d\Omega$$

### Énergie complémentaire élastique

$$W^*(\vec{s}) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{C}^{-1} \vec{s} : \vec{s} \, d\Omega$$



### Énergie potentielle élastique

$$\xi(\vec{v}) = W(\nabla_s \vec{v}) - \iiint_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega - \iint_{\partial\Omega_F} \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\partial\Omega$$

$$\xi^*(\vec{s}) = -W^*(\vec{s}) - \iint_{\partial\Omega_U} (\vec{s}(X) \cdot \vec{n}(X)) \cdot \vec{U}(X) \, d\partial\Omega$$

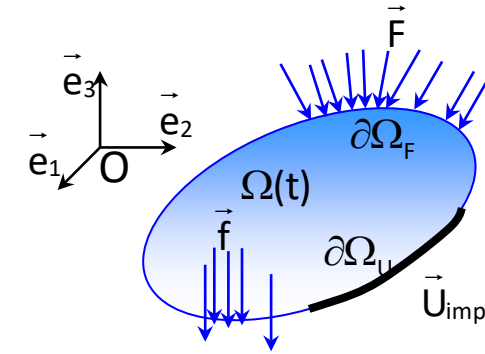
# Méthodes Énergétiques, Théorème

## Proposition

Pour tout champ de déformations  $\bar{\epsilon}$  et tout champ de contraintes  $\bar{s}$ , on a:

$$W(\bar{\epsilon}) + W^*(\bar{s}) - \iiint_{\Omega} \bar{\epsilon}(X) : \bar{s}(X) \, d\Omega \geq 0$$

et l'égalité n'a lieu que si et seulement si  $\bar{\epsilon}$  et  $\bar{s}$  satisfont la loi de comportement  $\bar{s} = \bar{C} : \bar{\epsilon}$



## RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

## Théorème

$\bar{u}$  est C.A.

$\bar{\sigma}$  est S.A.

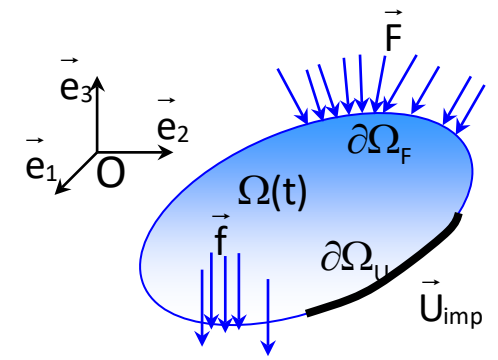
$\forall X \in \Omega \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + \nabla^T \bar{u})$  si et seulement si

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\epsilon}$$

$\forall \bar{v}$  C.A.

$\forall \bar{s}$  S.A.

$$\xi(\bar{v}) \geq \xi(\bar{u}) = \xi^*(\bar{\sigma}) \geq \xi^*(\bar{s})$$



$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\Omega + \frac{1}{2} \iint_{\partial\Omega_f} \vec{F} \cdot \vec{u} \, d\partial\Omega + \frac{1}{2} \iint_{\partial\Omega_u} \bar{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{U}_{imp} \, d\partial\Omega$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \varepsilon_{13}) \, dX_1 dX_2 dX_3$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\sigma_{11} (a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2) + \sigma_{12} (a_2 - \chi_1 X_3) + \sigma_{13} (a_3 + \chi_1 X_2)) \, dX_1 dX_2 dX_3$$

$$\iiint_{\Omega} \bullet \, dv = \int \left( \iint_{s(x_1)} \bullet \, dX_2 dX_3 \right) dX_1$$

$$T_1(X_1) = \iint_{s(x_1)} \sigma_{11} \, dX_2 dX_3 \quad M_1(X_1) = \iint_{s(x_1)} (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) \, dX_2 dX_3$$

$$T_2(X_1) = \iint_{s(x_1)} \sigma_{12} \, dX_2 dX_3 \quad M_2(X_1) = \iint_{s(x_1)} X_3 \sigma_{11} \, dX_2 dX_3$$

$$T_3(X_1) = \iint_{s(x_1)} \sigma_{13} \, dX_2 dX_3 \quad M_3(X_1) = -\iint_{s(x_1)} X_2 \sigma_{11} \, dX_2 dX_3$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \sum_{i=1}^3 (a_i T_i + \chi_i M_i) \right] dX_1$$

$$T_1 = a_1 ES, \quad T_2 = \frac{a_2 ES}{2(1+\nu)}, \quad T_3 = \frac{a_3 ES}{2(1+\nu)} \quad M_1 = \frac{\chi_1 EI_1}{2(1+\nu)}, \quad M_2 = E \chi_2 I_2, \quad M_3 = E \chi_3 I_3$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{T_1^2}{ES} + \frac{T_2^2}{GS} + \frac{T_3^2}{GS} + \frac{M_1^2}{GI_1} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{M_3^2}{EI_3} \right] dX_1 = \sum_i \frac{1}{2} (\vec{F}_i \cdot \vec{u}_i + \vec{C}_i \cdot \vec{\theta}_i)$$

### RDM

Introduction

Théorie des poutres

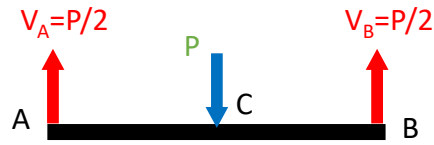
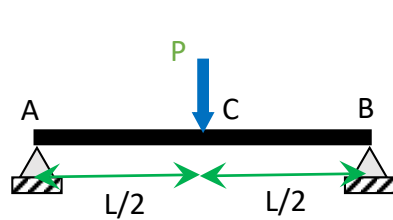
Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques





Section circulaire rayon R

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

$$q = \frac{P}{2} \langle x \rangle^{-1} - P \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1}$$

$$T_2 = -\frac{P}{2} \langle x \rangle^0 + P \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0$$

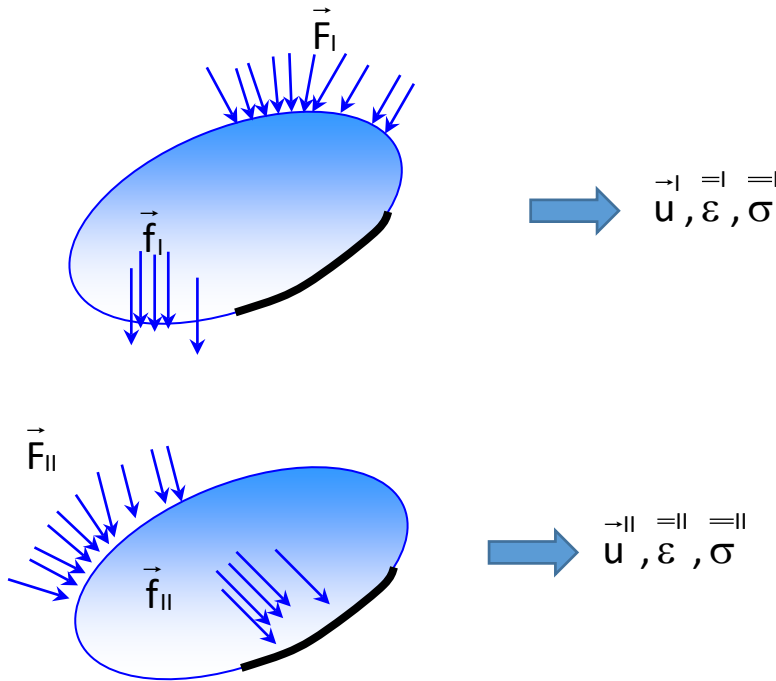
$$M_3 = \frac{P}{2} \langle x \rangle^1 - P \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^1$$

$$\int_0^L T_2^2 dX = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2}{4} dX + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{P^2}{4} dX = \frac{P^2 L}{4}$$

$$\int_0^L M_3^2 dX = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2 X^2}{4} dX + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{P^2}{4} (X-L)^2 dX = \frac{P^2 L^3}{48}$$

$$\text{Rmq: } \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{P^2}{4} (X-L)^2 dX = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2}{4} X^2 dX$$

$$\frac{\int_0^L \frac{T_2^2}{GS} dX_1}{\int_0^L \frac{M_3^2}{EI_3} dX_1} = \frac{2(1+\nu)}{E} \times \frac{1}{\pi R^2} \times \frac{P^2 L}{4} \times \frac{E \pi R^4}{4} \times \frac{48}{P^2 L^3} = 6(1+\nu) \left( \frac{R}{L} \right)^2 \ll 1 \quad \sigma_{12} \ll \sigma_{11}$$



D'après le PTV

$$-\iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \nabla_s \delta \vec{u} \, dv + \iiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dv + \iint_{\partial\Omega_f} \vec{F}^I \cdot \delta \vec{u} \, d\partial\Omega = 0 \quad \forall \delta \vec{u}$$

$$\iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}}^I : \nabla_s \delta \vec{u} \, dv = \iiint_{\Sigma} \vec{f}^I \cdot \delta \vec{u} \, dv + \iint_{\partial\Omega_f} \vec{F}^I \cdot \delta \vec{u} \, d\partial\Omega = 0 \quad \forall \delta \vec{u}$$

$$\iiint_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}}^I : \overline{\overline{\varepsilon}}^{II} \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{f}^I \cdot \vec{u}^{II} \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega_f} \vec{F}^I \cdot \vec{u}^{II} \, d\partial\Omega$$

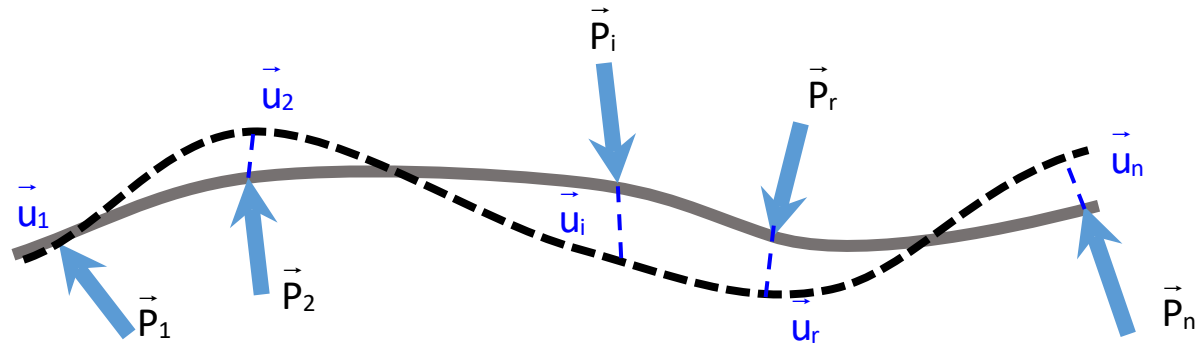
$$\iiint_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}}^{II} : \overline{\overline{\varepsilon}}^I \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{f}^{II} \cdot \vec{u}^I \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega_f} \vec{F}^{II} \cdot \vec{u}^I \, d\partial\Omega$$

Or,  $\overline{\overline{\sigma}}^I : \overline{\overline{\varepsilon}}^{II} = \overline{\overline{\varepsilon}}^I : \overline{\overline{\sigma}}^{II} = \overline{\overline{\sigma}}^{II} : \overline{\overline{\varepsilon}}^I = \overline{\overline{\varepsilon}}^{II} : \overline{\overline{\sigma}}^I$

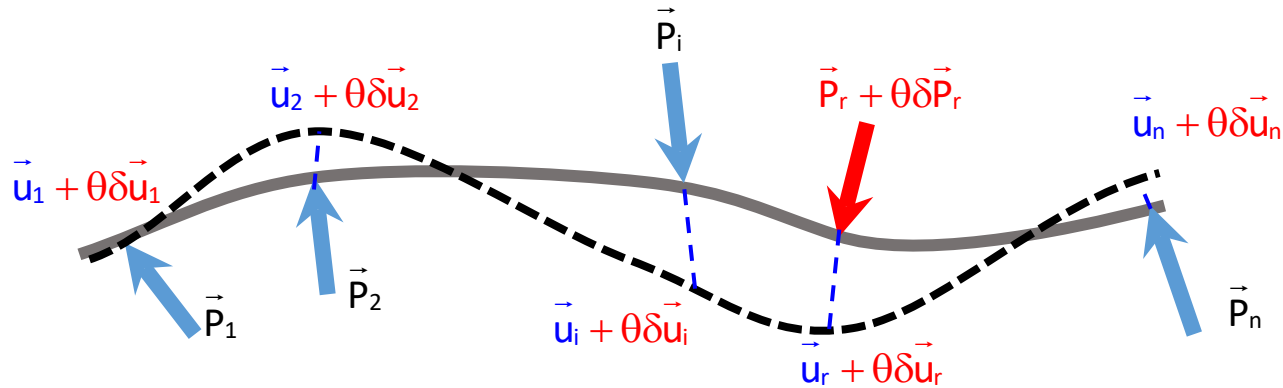
$$\iiint_{\Omega} \vec{f}^{II} \cdot \vec{u}^I \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega_f} \vec{F}^{II} \cdot \vec{u}^I \, d\partial\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{f}^I \cdot \vec{u}^{II} \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega_f} \vec{F}^I \cdot \vec{u}^{II} \, d\partial\Omega$$

# Méthodes Énergétiques

## Théorème de Castigliano



$$W_I = \frac{1}{2} \sum_i \vec{P}_i \cdot \vec{u}_i$$



$$W_{II} = \frac{1}{2} \sum_i (\vec{P}_i + \theta \delta \vec{P}_i) \cdot (\vec{u}_i + \theta \delta \vec{u}_i)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{P}_r} \cdot \delta \vec{P}_r = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (W(\vec{P}_r + \theta \delta \vec{P}_r) - W(\vec{P}_r))$$

Rmq, par application de Maxwell-Betti:  $\sum_i (\vec{P}_i + \theta \delta \vec{P}_i) \cdot \vec{u}_i = \sum_i \vec{P}_i \cdot (\vec{u}_i + \theta \delta \vec{u}_i) \quad \delta \vec{P}_r \cdot \vec{u}_r = \sum_i \vec{P}_i \cdot \delta \vec{u}_i$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

$$W_I = \frac{1}{2} \sum_i \vec{P}_i \cdot \vec{u}_i \quad W_{II} = \frac{1}{2} \sum_i (\vec{P}_i + \theta \delta \vec{P}_i) \cdot (\vec{u}_i + \theta \delta \vec{u}_i)$$

$$\delta \vec{P}_r \cdot \vec{u}_r = \sum_i \vec{P}_i \cdot \delta \vec{u}_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{P}_r} \cdot \delta \vec{P}_r = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (W(\vec{P}_r + \theta \delta \vec{P}_r) - W(\vec{P}_r))$$

$$\begin{aligned} W_{II} - W_I &= \frac{1}{2} \sum_i (\vec{P}_i + \theta \delta \vec{P}_i) \cdot (\vec{u}_i + \theta \delta \vec{u}_i) - \frac{1}{2} \sum_i \vec{P}_i \cdot \vec{u}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \vec{P}_i \cdot \theta \delta \vec{u}_i + \frac{1}{2} \sum_i \theta \delta \vec{P}_i \cdot (\vec{u}_i + \theta \delta \vec{u}_i) \\ &= \frac{1}{2} \theta \delta \vec{P}_r \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{2} \theta \delta \vec{P}_r \cdot (\vec{u}_r + \theta \delta \vec{u}_r) \\ &= \theta \delta \vec{P}_r \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{2} \theta^2 \delta \vec{P}_r \cdot \delta \vec{u}_r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{P}_r} \cdot \delta \vec{P}_r = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left( \frac{1}{2} \theta^2 \delta \vec{P}_r \cdot \delta \vec{u}_r + \theta \delta \vec{P}_r \cdot \vec{u}_r \right) = \delta \vec{P}_r \cdot \vec{u}_r$$

$$\frac{\partial W}{\partial P_r} = u_r$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

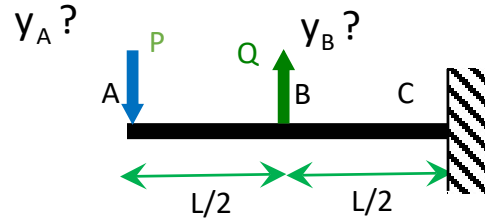
Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

# Méthodes Énergétiques

## Exemple: poutre console



Q Charge fictive

$$y_B = \left. \frac{\partial W}{\partial Q} \right|_{Q=0}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_3^2}{EI_3} dX_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2 X^2}{EI_3} dX_1 = \frac{P^2 L^3}{6EI_3}$$



$$y_A = - \frac{\partial W}{\partial P} = - \frac{PL^3}{3EI_3}$$

$$W = \frac{L^3}{48EI_3} (8P^2 + Q^2 - 5PQ)$$

$$y_B = \left. \frac{\partial W}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \frac{L^3}{48EI_3} (2Q - 5P) \Big|_{Q=0} = - \frac{5PL^3}{48EI_3}$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

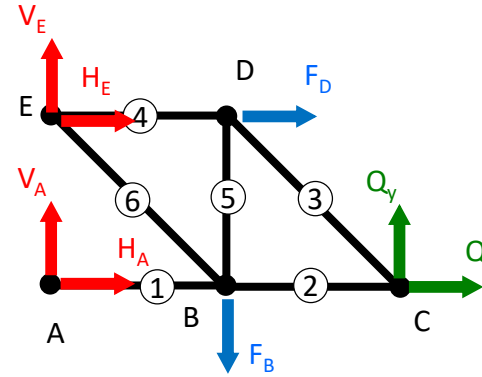
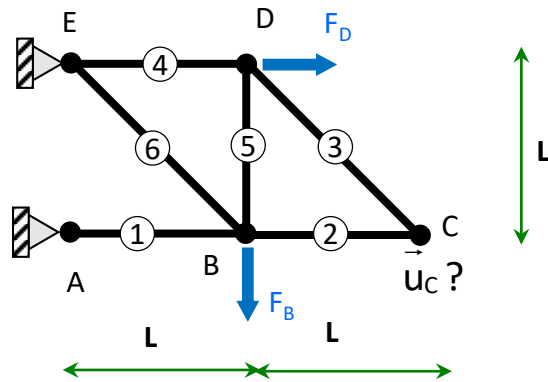
Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

# Méthodes Énergétiques

## Exemple: Treilli de poutre



Équilibre du nœud C

$$\begin{cases} -\frac{F_3}{\sqrt{2}} - F_2 + Q_x = 0 \\ \frac{F_3}{\sqrt{2}} + Q_y = 0 \end{cases}$$

Équilibre du nœud D

$$\begin{cases} -F_4 + \frac{F_3}{\sqrt{2}} + F_D = 0 \\ -\frac{F_3}{\sqrt{2}} - F_5 = 0 \end{cases}$$

Équilibre du nœud B

$$\begin{cases} F_2 - \frac{F_6}{\sqrt{2}} - F_1 = 0 \\ \frac{F_6}{\sqrt{2}} + F_5 - F_B = 0 \end{cases}$$

$$F_1 = Q_x + 2Q_y - F_B, \quad F_2 = Q_x + Q_y, \quad F_3 = -Q_y\sqrt{2}, \quad F_4 = F_D - Q_y, \quad F_5 = Q_y, \quad F_6 = \sqrt{2}(F_B - Q_y)$$

$$W = \sum_{i=1}^6 \frac{F_i^2 L_i}{2S_i E_i} = \frac{1}{2SE} \sum_{i=1}^6 F_i^2 L_i$$

$$\frac{\partial W}{\partial Q_y} \Big|_{\substack{Q_x=0 \\ Q_y=0}} = \frac{L}{2SE} \left( 4(Q_x + 2Q_y - F_B) - 2(Q_x + Q_y) - 4\sqrt{2}Q_y - 2(F_D - Q_y) + 2Q_y - 4\sqrt{2}(F_B - Q_y) \right) \Big|_{\substack{Q_x=0 \\ Q_y=0}} \Delta y_C = -\frac{L}{SE} (2F_D + 4F_B(1 + \sqrt{2}))$$

$$\Delta x_C = \frac{\partial W}{\partial Q_x} \Big|_{\substack{Q_x=0 \\ Q_y=0}} = \frac{L}{2SE} (2(Q_x + 2Q_y - F_B) + 2(Q_x + Q_y)) \Big|_{\substack{Q_x=0 \\ Q_y=0}} \quad \Delta x_C = -\frac{2LF_B}{SE}$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

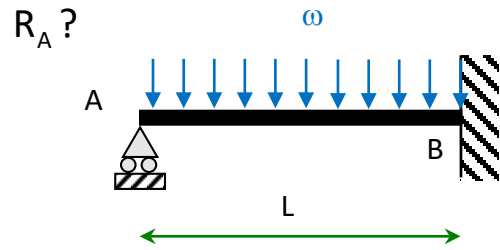
Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques

# Méthodes Énergétiques

## Exemple: Système hyperstatique



$$M_3 = R_A x - \omega \frac{x^2}{2}$$

$$W = \int_0^L \frac{M_3^2}{2EI_3} dx = \frac{1}{2EI_3} \left( R_A^2 \frac{L^3}{3} - \omega R_A \frac{L^4}{4} + \frac{\omega L^5}{20} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI_3} \left( 2R_A \frac{L^3}{3} - \omega \frac{L^4}{4} \right) = 0 \quad \text{Th de Ménabréa}$$

$$R_A = \frac{3\omega L}{8}$$

RDM

Introduction

Théorie des poutres

Traction

Torsion

Flexion

Méthodes Énergétiques