Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Cours de Mécanique des Milieux Continus
SeaTech 1ère année

Chapitre 1

Notations Tensorielles

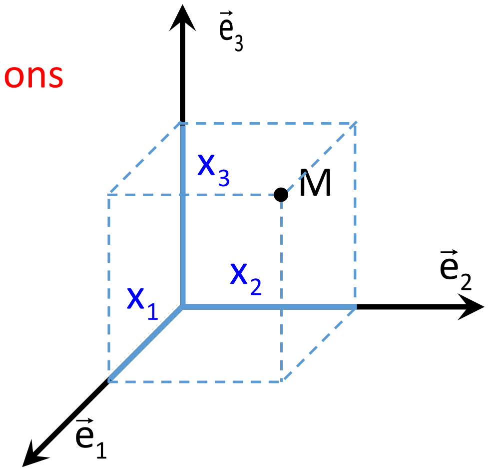
F. Golay

Vecteurs et tenseurs

Cas particulier le plus souvent rencontré qui simplifie les notations

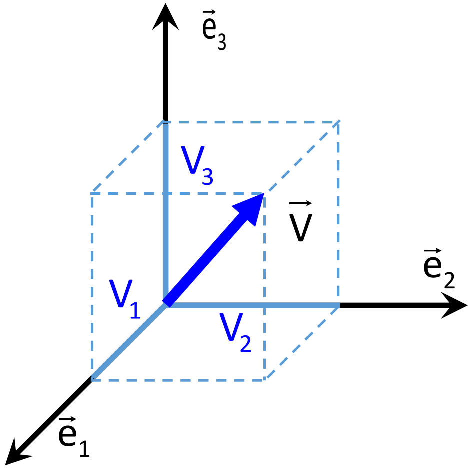
Vecteur

On se place dans un espace euclidien $\mathcal{E}$ à 3 dimensions de base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
On repère la position de tout point M, à l'instant t, par ses coordonnées x_1, x_2, x_3.



Soit $\vec{V}$ un vecteur

$$\vec{V}(\vec{x},t) = \{\vec{V}\} = \begin{Bmatrix} V_1(x_1,x_2,x_3,t) \\ V_2(x_1,x_2,x_3,t) \\ V_3(x_1,x_2,x_3,t) \end{Bmatrix} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} V_i\vec{e}_i$$



Convention de sommation d'Einstein

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i\vec{e}_i = V_i\vec{e}_i$$

i indice « muet »

Rmq 1: $\vec{V} = V_i\vec{e}_i = V_k\vec{e}_k$

Rmq 2: vecteur transposé $\vec{V}^T = \{\vec{V}\}^T = \langle\vec{V}\rangle = \langle V_1, V_2, V_3\rangle$

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Vecteurs et tenseurs

Application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$

Soit A une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ représenté par une matrice 3x3 [A]

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Considérons l'image $\vec{W}$ d'un vecteur $\vec{V}$ par l'application linéaire A

$$\vec{W}=A\vec{V} \quad ; \quad \{\vec{W}\}=[A]\{\vec{V}\} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} A_{11}V_1+A_{12}V_2+A_{13}V_3 \\ A_{21}V_1+A_{22}V_2+A_{23}V_3 \\ A_{31}V_1+A_{32}V_2+A_{33}V_3 \end{Bmatrix}$$

Convention de sommation d'Einstein

$$W_i\vec{e}_i=A_{ij}V_j\vec{e}_i$$

Cas particulier de l'application identité que l'on peut représenter par les symboles de Kronecker

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j \end{cases} \qquad [I]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

Vecteurs et tenseurs

Application bilinéaire de $\mathcal{E}x\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$

Soit A une application bilinéaire de $\mathcal{E}$ x $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ représentée par la matrice A telle que

$$A\left(\vec{V},\vec{W}\right)=\left\langle\vec{V}\right\rangle[A]\left\{\vec{W}\right\}=\left\langle V_1 \quad V_2 \quad V_3\right\rangle\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix}=A_{ij}V_iW_j$$

Cas particulier du produit scalaire

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$$

$$\vec{V}\cdot\vec{W}=\left\langle\vec{V}\right\rangle\left\{\vec{W}\right\}=\left(V_i\vec{e}_i\right)\cdot\left(W_j\vec{e}_j\right)=V_iW_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=V_iW_j\delta_{ij}=V_iW_i$$

Vecteurs et tenseurs

Tenseur

Définition Wikipédia:

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K; l'espace dual V est l'espace vectoriel formé de toutes les formes linéaires définies sur V. L'espace V* est aussi de dimension n. Les éléments de V et V* sont appelés respectivement vecteurs et co-vecteurs. Un tenseur d'ordre (h+k) est une application multilinéaire* $T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{h} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to K$

Cours Samuel Forest : http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/amphis/tenseurs.pdf

Cours Jean Garrigues : http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html

Jean Salençon : « Mécanique des Milieux Continus », tome 1, ed. Ecole polytechnique, 2005.

Rappel: On se place dans un espace euclidien $\mathcal{E}$ à 3 dimensions de base orthonormée

Jean Coirier : « Mécanique des Milieux Continus », ed. Dunod, Paris, 2001 (à la bibliothèque de SeaTech!).

Définition :

On appelle tenseur d'ordre n sur $\mathcal{E}$ toute forme n-linéaire $T : \underbrace{\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}}_{\text{n fois}}$

Prenons donc un raccourci simplificateur ….

Un tenseur d'ordre 0 « est » un scalaire à 3^0=1 composante
Un tenseur d'ordre 1 « est » un vecteur à 3^1=3 composantes
Un tenseur d'ordre 2 « est » une matrice à 3^2=9 composantes
.. etc …

Vecteurs et tenseurs

Tenseur du second ordre

Un tenseur du second ordre T est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur $\vec{V}$ de l'espace euclidien un vecteur $\vec{W}$ de ce même espace

$$\vec{W} = T(\vec{V}) \qquad W_i = T_{ij} V_j \qquad \text{Notation}: T, [T], \overline{\overline{T}}$$

- Un tenseur est dit symétrique si $T_{ij} = T_{ji}$
- Un tenseur est dit antisymétrique si $T_{ij} = -T_{ji}$
- Un tenseur est dit isotrope si $T_{ij} = t\delta_{ij}$

Rmq: On peut toujours décomposer un tenseur en une partie symétrique et antisymétrique

$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right)}_{\text{Symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)}_{\text{Antiymétrique}}$$

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Produit tensoriel

On définit le produit tensoriel du vecteur $\vec{U}$ par le vecteur $\vec{V}$, noté $\vec{U} \otimes \vec{V}$, comme le tenseur d'ordre 2 , défini par la forme bilinéaire qui aux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ fait correspondre $(\vec{U} \cdot \vec{X})(\vec{V} \cdot \vec{Y})$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}$$

Les 9 produits tensoriels $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ définissent une base de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

… etc …

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = T_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Vecteurs et tenseurs

Produit contracté

Produit contracté de 2 tenseurs d'ordre 1

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(u_i\vec{e}_i\right)\cdot\left(v_j\vec{e}_j\right)=u_iv_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=u_iv_j\delta_{ij}=u_iv_i=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

C'est le produit scalaire de 2 vecteurs!

Produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et d'un tenseur d'ordre 1

$$\overline{\overline{T}}\cdot\vec{v}=\left(T_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right)\cdot\left(v_k\vec{e}_k\right)=T_{ij}v_k\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k=T_{ik}v_k\vec{e}_i$$

C'est un produit matrice vecteur!

Tenseur ordre p « contracté » tenseur ordre q = tenseur ordre p+q-2

Produit **doublement** contracté de 2 tenseurs d'ordre 2

$$\overline{\overline{A}}:\overline{\overline{B}}=\left(A_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right):\left(B_{pq}\vec{e}_p\otimes\vec{e}_q\right)=A_{ij}B_{pq}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j:\vec{e}_p\otimes\vec{e}_q=A_{ip}B_{pq}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_q=A_{ip}B_{pi}$$

Produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 2 avec le tenseur **identité**

$$\overline{\overline{A}}:\overline{\overline{I}}=A_{ip}\delta_{pi}=A_{pp}=A_{11}+A_{22}+A_{33}=\mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{A}}\right)$$

Permutation et déterminants

Symbole de permutation

On définit les symbole de permutation ou tenseur du 3ème ordre de Levi-Civita par

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right) = \begin{cases} +1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation paire de } 1,2,3 \text{ cad : } 123,\ 231,\ 312 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation impaire de } 1,2,3 \text{ cad : } 213,\ 132,\ 321 \\ 0 & \text{si deux indices sont répétés} \end{cases}$$

Produit mixte

Avec un peu de patience on peut démontrer les résultats suivants:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \end{cases}$$

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Permutation et déterminants

Déterminant

$$\mathrm{Det}(A) = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp}$$

Produit vectoriel

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$c_i\vec{e}_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k\vec{e}_i$$

Exemple, montrons que : $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$

Analyse vectorielle

Notation

Rappel: On se place dans un espace euclidien $\mathcal{E}$ à 3 dimensions de base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
Tout tenseur dépend des variables t, $x_1,\ x_2, x_3$.

Notation dérivée partielle: $_{,i} \leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Opérateur Gradient : $\nabla(*) = (*)_{,j} \otimes \vec{e}_j$ Ordre +1

Opérateur Divergence : $\mathrm{div}(*) = \nabla(*) : \overline{\overline{I}} = (*)_{,j} \cdot \vec{e}_j$ Ordre -1

Analyse vectorielle

Soit f une fonction scalaire

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \nabla f = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = f_{,i}\, \vec{e}_i$$

Le laplacien d'une fonction scalaire est un scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = f_{,ii}$$

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Analyse vectorielle

Soit $\vec{V}$ un vecteur

Le gradient d'un vecteur est une matrice

$$\nabla\,\vec{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \left(v_i\,\vec{e}_i\right)_{,j} \otimes \vec{e}_j = v_{i,j}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Le laplacien d'un vecteur est un vecteur

$$\Delta\,\vec{v} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{Bmatrix} = \mathrm{div}\left(\nabla\vec{v}\right) = \left(v_{i,j}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right)_{,k} \cdot \vec{e}_k = v_{i,jj}\,\vec{e}_i$$

Analyse vectorielle

Soit $\vec{V}$ un vecteur

La divergence d'un vecteur est un scalaire

$$\mathrm{Div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \left(v_i\,\vec{e}_i\right)_{,j} \cdot \vec{e}_j = v_{i,j}\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = v_{i,i}$$

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\,\vec{e}_i$$

Analyse vectorielle

Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur d'ordre 2

La divergence d'un tenseur d'ordre 2 est un vecteur

$$\mathrm{Div}\,\overline{\overline{T}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \left(T_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right)_{,k} \cdot \vec{e}_k = T_{ij,j}\,\vec{e}_i$$

Exemple, montrons que : $\mathrm{Div}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{b}$

Notations Tensorielles

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

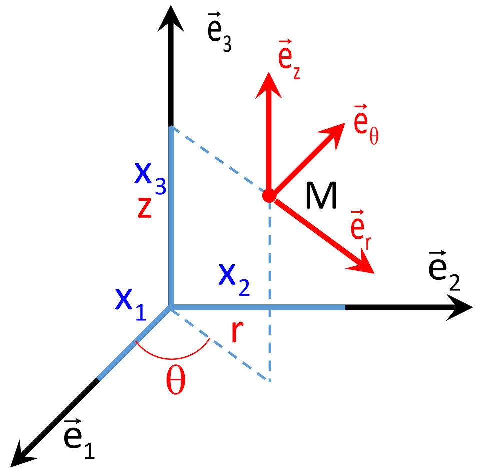
Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques

Système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = r\cos\theta\vec{e}_1 + r\sin\theta\vec{e}_2 + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$



$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_z dz \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \,, \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2 \\ \vec{e}_z = \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \,, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 \,, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \,, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \,, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0 \,, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = 0 \,, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0$$

Notation: pour i=r,θ,z on considère $,i = \frac{\partial}{\partial r} \,, \; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \,, \; \frac{\partial}{\partial z}$

$$\vec{e}_{r,\theta} = \frac{\vec{e}_\theta}{r} \quad \text{et} \quad \vec{e}_{\theta,\theta} = -\frac{\vec{e}_r}{r}$$

Coordonnées cylindriques

Formulaire en système de coordonnées cylindriques

Soit $f(r,\theta,z)$ une fonction scalaire, alors

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}
\nabla f &= (f)_{,i} \otimes \vec{e}_i \\
&= f_{,i}\vec{e}_i \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \mathrm{div}(\nabla f) \\
&= \left(f_{,i}\vec{e}_i\right)_{,j} \cdot \vec{e}_j \\
&= f_{,ij}\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j + f_{,i}\vec{e}_{i,j} \cdot \vec{e}_j \\
&= f_{,ii} + f_{,i}\vec{e}_{i,\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\
&= f_{,ii} + f_{,r}\frac{\vec{e}_\theta}{r} \cdot \vec{e}_\theta - f_{,\theta}\frac{\vec{e}_r}{r} \cdot \vec{e}_\theta \\
&= f_{,ii} + \frac{f_{,r}}{r} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

SEATECH TOULON

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques

Formulaire en système de coordonnées cylindriques

Soit $\vec{V}(r,\theta,z)$ un vecteur, alors

$$\mathrm{grad}(\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla\left(\vec{V}\right) &= \left(V_i\vec{e}_i\right)_{,j} \otimes \vec{e}_j \\ &= V_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + V_i\vec{e}_{i,j} \otimes \vec{e}_j \\ &= V_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + V_i\vec{e}_{i,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\ &= V_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + V_r\vec{e}_{r,\theta} \otimes \vec{e}_\theta + V_\theta\vec{e}_{\theta,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\ &= V_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \frac{V_r}{r}\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta - \frac{V_\theta}{r}\vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \mathrm{Tr}\left(\nabla(\vec{v})\right) = \nabla\vec{v} : \overline{\overline{I}} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

SEATECH TOULON

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques

Formulaire en système de coordonnées cylindriques

Soit $\vec{V}(r,\theta,z)$ un vecteur, alors

$$\Delta\vec{V} = \mathrm{div}\left(\nabla\vec{V}\right) = \left(\Delta V_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - \frac{V_r}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - \frac{V_\theta}{r^2}\right)\vec{e}_\theta + \Delta V_z\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\left(\nabla\vec{V}\right) = \left(V_{i,j}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j + \frac{V_r}{r}\vec{e}_\theta\otimes\vec{e}_\theta - \frac{V_\theta}{r}\vec{e}_r\otimes\vec{e}_\theta\right)_{,k}\cdot\vec{e}_k$$

$$= V_{i,jk}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k + V_{i,j}\vec{e}_{i,\theta}\otimes\vec{e}_j\cdot\vec{e}_\theta + V_{i,j}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_{j,\theta}\cdot\vec{e}_\theta + \left(\frac{V_r}{r}\right)_{,k}\vec{e}_\theta\otimes\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_k - \left(\frac{V_\theta}{r}\right)_{,k}\vec{e}_r\otimes\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_k$$

$$+\frac{V_r}{r}\vec{e}_{\theta,\theta}\otimes\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta + \frac{V_r}{r}\vec{e}_\theta\otimes\vec{e}_{\theta,\theta}\cdot\vec{e}_\theta - \frac{V_\theta}{r}\vec{e}_{r,\theta}\otimes\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta - \frac{V_\theta}{r}\vec{e}_r\otimes\vec{e}_{\theta,\theta}\cdot\vec{e}_\theta$$

$$= V_{i,kk}\vec{e}_i + V_{i,\theta}\vec{e}_{i,\theta} + V_{i,r}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_{r,\theta}\cdot\vec{e}_\theta + \left(\frac{V_r}{r}\right)_{,\theta}\vec{e}_\theta - \left(\frac{V_\theta}{r}\right)_{,\theta}\vec{e}_r + \frac{V_r}{r}\vec{e}_{\theta,\theta} - \frac{V_\theta}{r}\vec{e}_{r,\theta}$$

$$= V_{i,kk}\vec{e}_i + \frac{1}{r}V_{r,\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r}V_{\theta,\theta}\vec{e}_r + \frac{1}{r}V_{i,r}\vec{e}_i + \frac{V_{r,\theta}}{r}\vec{e}_\theta - \frac{V_{\theta,\theta}}{r}\vec{e}_r - \frac{V_r}{r^2}\vec{e}_r - \frac{V_\theta}{r^2}\vec{e}_\theta$$

$$= \left(\Delta V_i\right)\vec{e}_i + \left(-2\frac{V_{\theta,\theta}}{r} - \frac{V_r}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left(2\frac{V_{r,\theta}}{r} - \frac{V_\theta}{r^2}\right)\vec{e}_\theta$$

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques

Formulaire en système de coordonnées cylindriques

Soit $\vec{V}(r,\theta,z)$ un vecteur, alors

$$\text{rot}\vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

$$\text{rot}\vec{V} = \overset{\equiv}{\varepsilon} : \nabla\vec{V}$$

$$= \left(\varepsilon_{mnp}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \otimes \vec{e}_p\right) : \left(V_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \frac{V_r}{r}\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta - \frac{V_\theta}{r}\vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta\right)$$

$$= \varepsilon_{mnp}V_{i,j}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \otimes \vec{e}_p : \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \varepsilon_{mnp}\frac{V_r}{r}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \otimes \vec{e}_p : \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta - \varepsilon_{mnp}\frac{V_\theta}{r}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \otimes \vec{e}_p : \vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta$$

$$= \varepsilon_{mnp}V_{p,n}\vec{e}_m + \varepsilon_{m\theta\theta}\frac{V_r}{r}\vec{e}_m - \varepsilon_{m\theta r}\frac{V_\theta}{r}\vec{e}_m$$

$$= \varepsilon_{mnp}V_{p,n}\vec{e}_m - \varepsilon_{z\theta r}\frac{V_\theta}{r}\vec{e}_z$$

$$= \varepsilon_{mnp}V_{p,n}\vec{e}_m - \frac{V_\theta}{r}\vec{e}_z$$

Notations Tensorielles

Vecteurs et tenseurs

Permutations et déterminants

Analyse vectorielle

Coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques

Formulaire en système de coordonnées cylindriques

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

Soit $\bar{\bar{T}}(r,\theta,z)$ un tenseur d'ordre 2, alors

$$\mathrm{div}(\bar{\bar{T}}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \dfrac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \dfrac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{T_{r\theta}}{r} + \dfrac{T_{\theta r}}{r} \\ \dfrac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \dfrac{T_{zr}}{r} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\bar{\bar{T}}) &= \left(T_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right)_{,k} \cdot \vec{e}_k \\
&= T_{ij,k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k + T_{ij}\,\vec{e}_{i,k} \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k + T_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j,k} \cdot \vec{e}_k \\
&= T_{ij,k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k + T_{ij}\,\vec{e}_{i,\theta} \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_\theta + T_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j,\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\
&= T_{ij,k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k + \frac{T_{rj}}{r}\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_\theta - \frac{T_{\theta j}}{r}\vec{e}_r \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_\theta + \frac{T_{ir}}{r}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta - \frac{T_{i\theta}}{r}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \\
&= T_{ik,k}\,\vec{e}_i + \frac{T_{r\theta}}{r}\vec{e}_\theta - \frac{T_{\theta\theta}}{r}\vec{e}_r + \frac{T_{ir}}{r}\vec{e}_i
\end{aligned}$$

Cinématique

Le mouvement et ses représentations

Déformation d'un milieux continu

Transport, dérivées particulaires

Cours de Mécanique des Milieux Continus
SeaTech 1ère année

Chapitre 2

Cinématique

F. Golay

Notion de milieu continu

Fluide: « qui n'est ni solide, ni épais, qui coule aisément »
Solide: « qui a de la consistance, qui n'est pas liquide, tout en pouvant être plus ou moins mou »
Liquide: « tout corps qui coule ou tend à couler »

Petit Robert

Liquide: « un liquide modifie sa forme pour épouser celle du récipient »

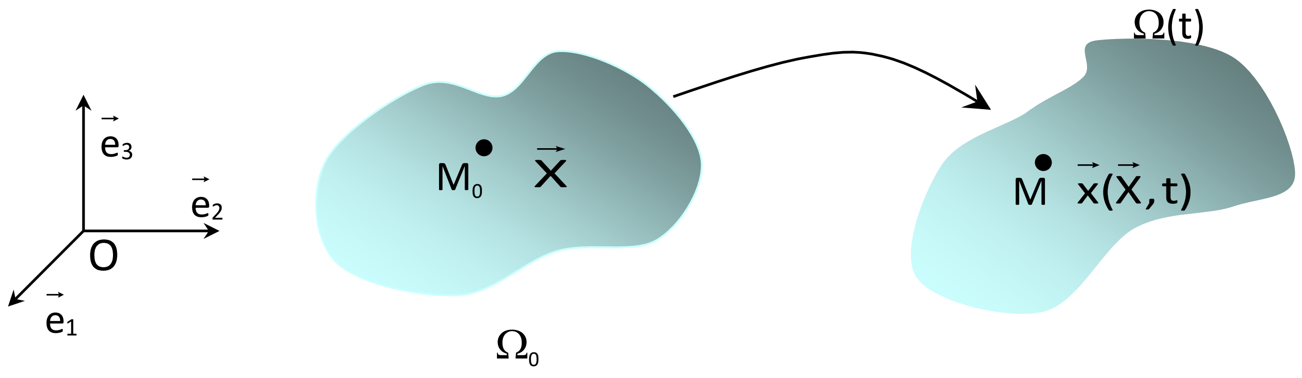
« Les chats sont-ils liquides ou solides ?»
Prix Ig Nobel de physique 2017,Marc-Antoine Fardin, Institut Jacques Monod, CNRS, Paris diderot.

Milieu continu: « milieu dont le comportement macroscopique peut être schématisé en supposant la matière répartie sur tout le domaine qu'il occupe »

J. Coirier

Le mouvement et ses représentations

Configuration



Configuration de référence à l'instant t_0

Configuration actuelle à l'instant t

$(\vec{X},t)$:Variables de Lagrange (en général mécanique du solide)

$(\vec{x},t)$:Variables d'Euler (en général mécanique des fluides)

Vitesse $$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\begin{Bmatrix}\dfrac{dx_1}{dt}\\ \dfrac{dx_2}{dt}\\ \dfrac{dx_3}{dt}\end{Bmatrix}$$

Accélération $$\vec{\Gamma}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\begin{Bmatrix}\dfrac{dV_1}{dt}\\ \dfrac{dV_2}{dt}\\ \dfrac{dV_3}{dt}\end{Bmatrix}$$

Le mouvement et ses représentations

Trajectoire

On appelle trajectoire d'une particule, la courbe géométrique lieu des positions occupées par cette particule au cours du temps

$$\vec{x}(\vec{X},t)$$

En description eulérienne, sachant que $\vec{V}(\vec{x},t)=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\dfrac{dx_1}{dt}\vec{e}_1+\dfrac{dx_2}{dt}\vec{e}_2+\dfrac{dx_3}{dt}\vec{e}_3$

On trouve la trajectoire par intégration des 3 équations $\dfrac{dx_1}{V_1(x_1,x_2,x_3,t)}=\dfrac{dx_2}{V_2(x_1,x_2,x_3,t)}=\dfrac{dx_3}{V_3(x_1,x_2,x_3,t)}=dt$

Lignes de courant

À un instant donné, on appelle lignes de courant du mouvement, les lignes qui sont en tout point tangentes au vecteur vitesse de la particule située en ce point.

$$d\vec{x}\wedge\vec{V}=\vec{0}$$

À t fixé on intègre les 2 équations $\dfrac{dx_1}{V_1}=\dfrac{dx_2}{V_2}=\dfrac{dx_3}{V_3}$

Rmq: pour un mouvement permanent (ou stationnaire), les lignes de courants et les trajectoires sont confondues.

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \qquad \vec{V}(\vec{x},t)=\vec{V}(\vec{x})$$

Cinématique

Le mouvement et ses représentations

Déformation d'un milieux continu

Transport, dérivées particulaires

Cinématique

Le mouvement et ses représentations

Déformation d'un milieux continu

Transport, dérivées particulaires

Le mouvement et ses représentations

Dérivée en temps en variables de Lagrange

$$A = A(\vec{X}, t)$$

$$\frac{dA}{dt}(\vec{X}, t) = \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{X}, t)$$

Dérivée en temps en variables d'Euler

$$A = A(\vec{x}, t)$$

$$\frac{dA}{dt}\left(\vec{x}(\vec{X}, t), t\right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + V_i\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)A = \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla A \cdot \vec{V}$$

Dérivée particulaire

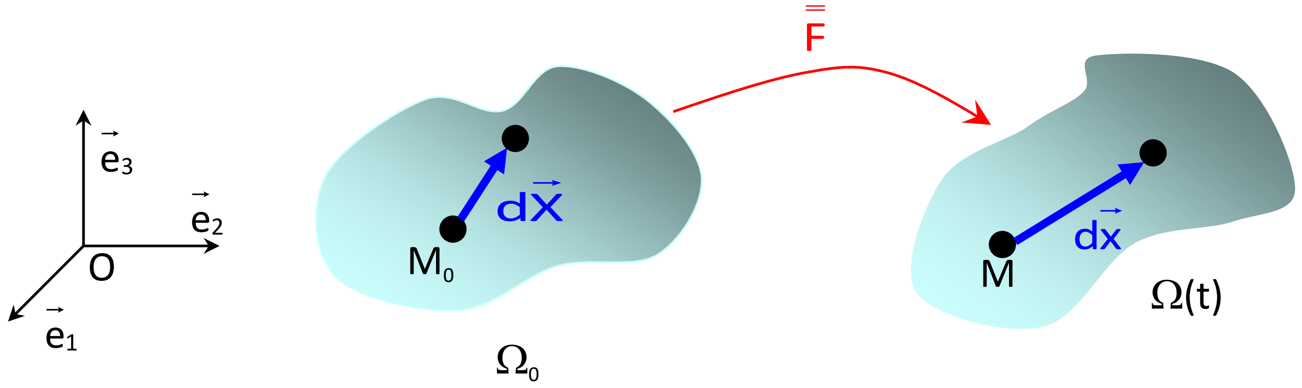
Attention à l'abus de notation

Rmq: application à l'accélération

$$\vec{\Gamma}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\vec{V}^2 + \overrightarrow{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Déformation d'un milieux continu

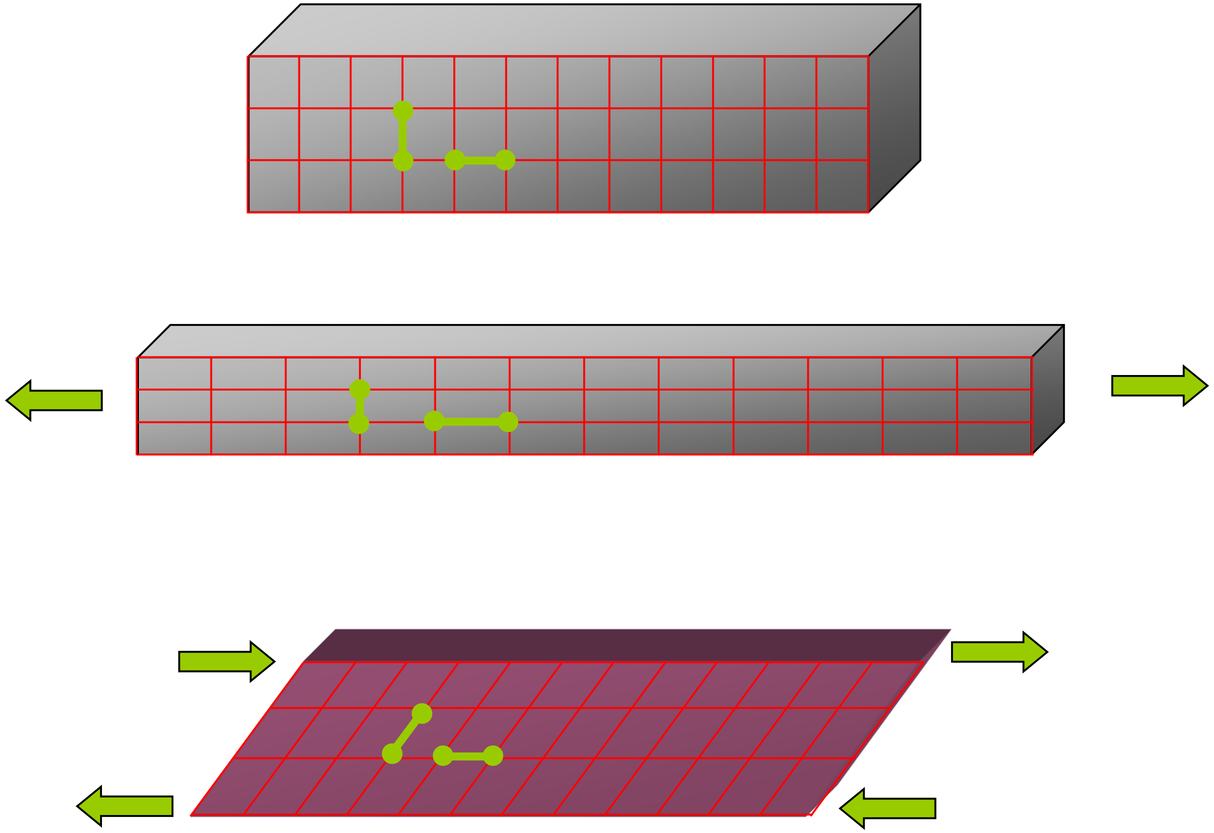
Application linéaire tangente



Application linéaire tangente $\quad \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\frac{\partial x}{\partial X}}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$

Déformation d'un milieux continu

Notion de déformation



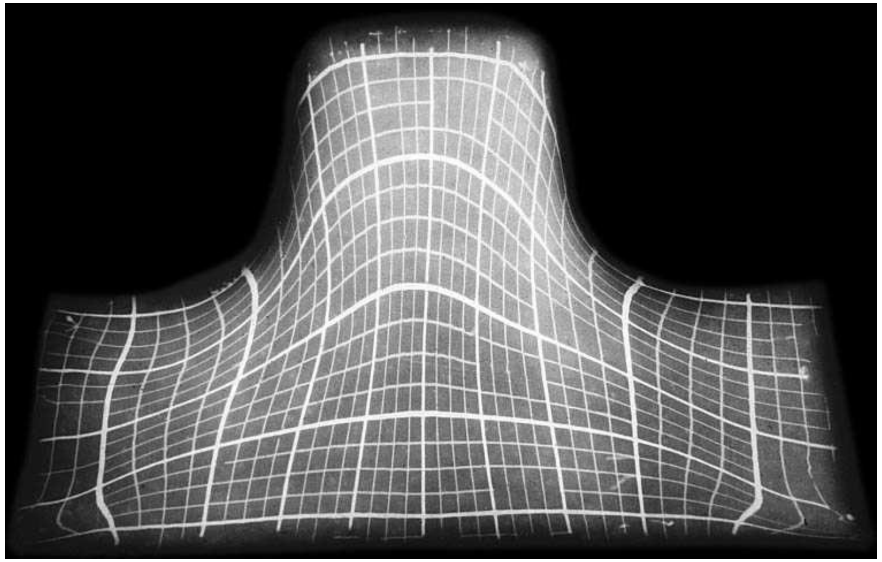
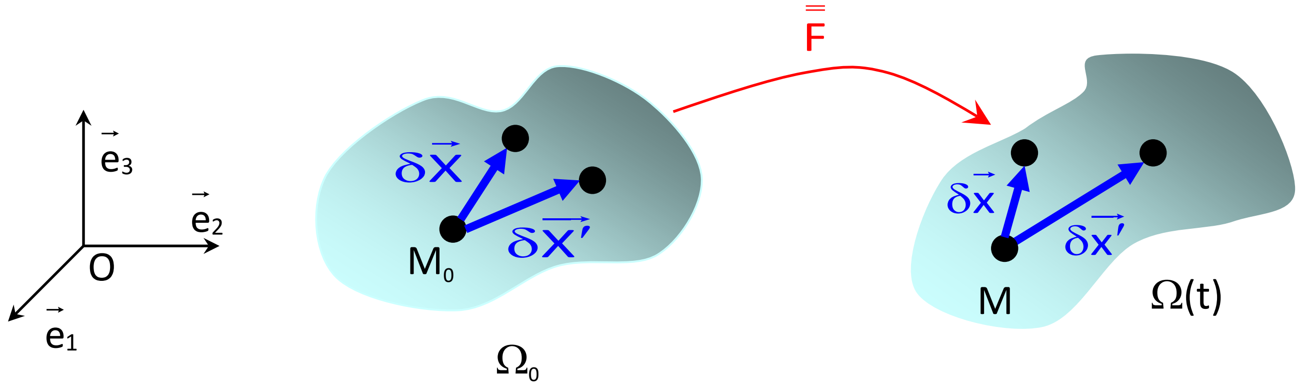


Image issue du cours de MMC de Jean Salençon, (thèse de Le Douaron, 1977, CEMEF)

Déformation d'un milieux continu

Tenseur des déformations



$$
\begin{aligned}
\delta\vec{x}\cdot\delta\vec{x}' - \delta\vec{X}\cdot\delta\vec{X}' &= \delta\vec{x}^{T}\delta\vec{x}' - \delta\vec{X}^{T}\delta\vec{X}' \\
&= \left(\bar{\bar{F}}\delta\vec{X}\right)^{T}\left(\bar{\bar{F}}\delta\vec{X}'\right) - \delta\vec{X}^{T}\delta\vec{X}' \\
&= \delta\vec{X}^{T}\bar{\bar{F}}^{T}\bar{\bar{F}}\delta\vec{X}' - \delta\vec{X}^{T}\delta\vec{X}' \\
&= \delta\vec{X}^{T}\left(\bar{\bar{F}}^{T}\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}\right)\delta\vec{X}'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\vec{x}\cdot\delta\vec{x}' - \delta\vec{X}\cdot\delta\vec{X}' &= \delta x_i \delta x'_j \delta_{ij} - \delta X_i \delta X'_j \delta_{ij} \\
&= F_{ik}\delta X_k F_{jn}\delta X'_n \delta_{ij} - \delta X_i \delta X'_j \delta_{ij} \\
&= \delta X_i F_{pi} F_{qj} \delta X'_j \delta_{pq} - \delta X_i \delta X'_j \delta_{ij} \\
&= \delta X_i \left(F_{pi}F_{qj}\delta_{pq} - \delta_{ij}\right)\delta X'_j \\
&= \delta X_i \left(F_{pi}F_{pj} - \delta_{ij}\right)\delta X'_j \\
&= \delta\vec{X}^{T}\left(\bar{\bar{F}}^{T}\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}\right)\delta\vec{X}'
\end{aligned}
$$

On définit ainsi le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{F}}^{T}\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}\right)$$

Rmq: $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est symétrique

Cinématique

Le mouvement et ses représentations

Déformation d'un milieux continu

Transport, dérivées particulaires

Cinématique

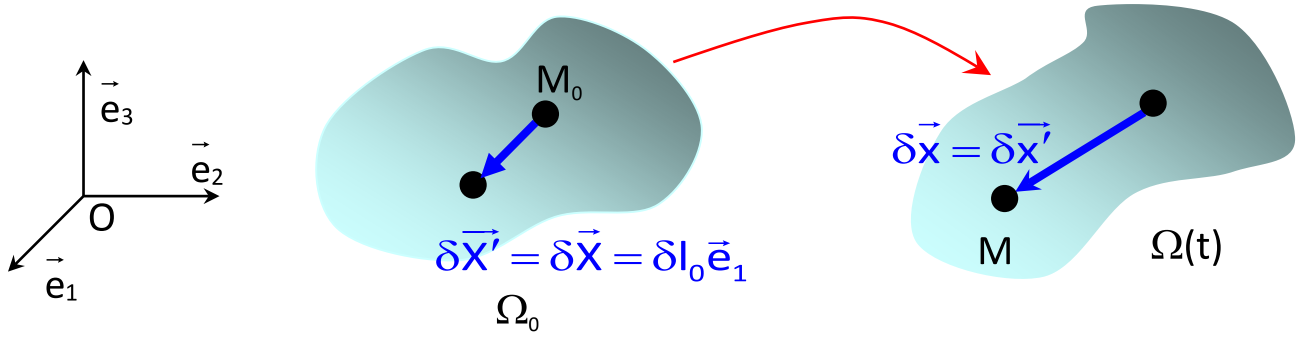
Le mouvement et ses représentations

Déformation d'un milieux continu

Transport, dérivées particulaires

Déformation d'un milieux continu

Approche plus physique …



$$\delta\vec{x}\cdot\delta\vec{x}' - \delta\vec{X}\cdot\delta\vec{X}' = \delta l^2 - \delta l_0^2 = 2\,\delta\vec{X}^T\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\delta\vec{X}' = 2\langle \delta l_0 \quad 0 \quad 0\rangle \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta l_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2\delta l_0^2 \varepsilon_{11}$$

ou encore, si les déformations sont petites

$$\frac{\delta l}{\delta l_0} = \sqrt{1+2\varepsilon_{11}} \approx 1+\varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon_{11} \approx \frac{\delta l - \delta l_0}{\delta l_0}$$

Variation de longueur dans la direction 1

Déformation d'un milieux continu

Tenseur des déformations sous l'hypothèse des petites perturbations

Soit $\vec{u}$ le déplacement

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$$

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{1}} + \nabla\vec{u}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla^T\vec{u} + \nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}.\nabla\vec{u}\right)$$

HPP

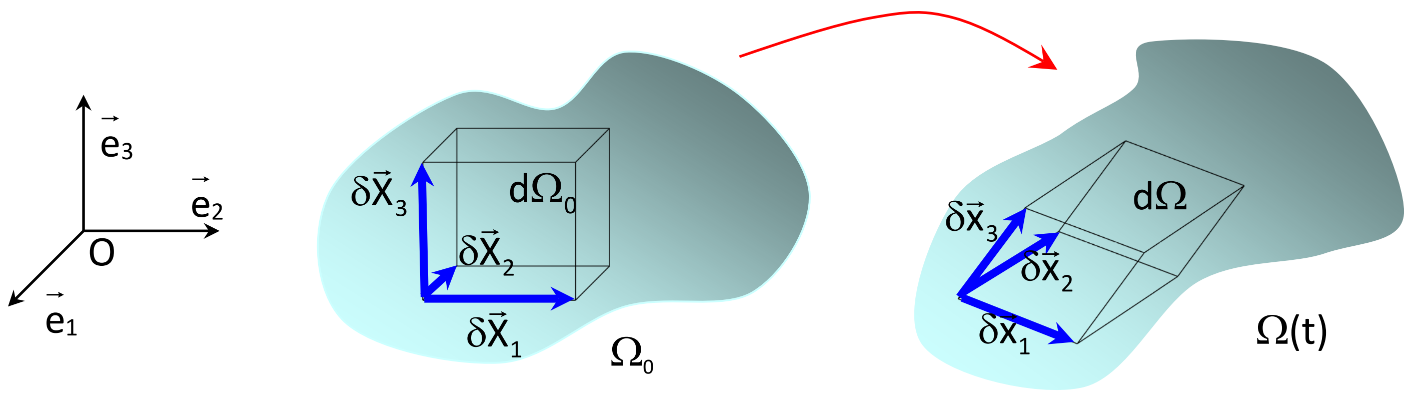
$$\left\|\nabla\vec{u}\right\| << 1$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{HPP} = \frac{1}{2}\left(\nabla^T\vec{u} + \nabla\vec{u}\right)$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{HPP} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & .. & .. \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & .. \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Transport, dérivées particulaires

Transport d'un élément de volume



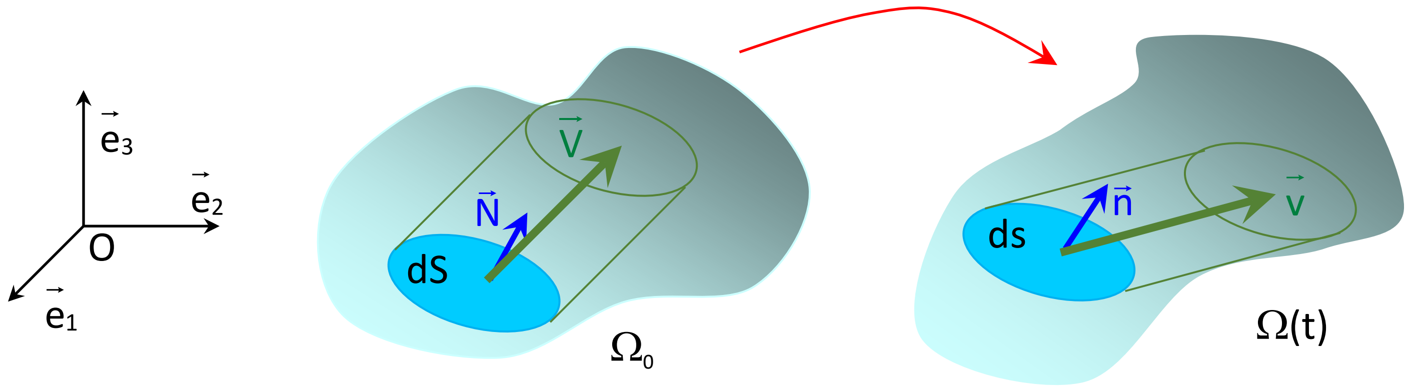
$$
\begin{aligned}
d\Omega &= \left(\delta\vec{x}_1 \wedge \delta\vec{x}_2\right)\cdot\delta\vec{x}_3 \\
&= \varepsilon_{ijk}\delta x_{1i}\delta x_{2j}\delta x_{3k} \\
&= \varepsilon_{ijk}\left(F_{ip}\delta X_{1p}\right)\left(F_{jq}\delta X_{2q}\right)\left(F_{kr}\delta X_{3r}\right) \\
&= \varepsilon_{ijk}F_{ip}F_{jq}F_{kr}\delta X_{1p}\delta X_{2q}\delta X_{3r} \\
&= \varepsilon_{pqr}\det\left(\bar{\bar{F}}\right)\delta X_{1p}\delta X_{2q}\delta X_{3r} \\
&= \det\left(\bar{\bar{F}}\right)\left(\delta\vec{X}_1 \wedge \delta\vec{X}_2\right)\cdot\delta\vec{X}_3
\end{aligned}
$$

$$d\Omega = \det\left(\bar{\bar{F}}\right)d\Omega_0 = J\,d\Omega_0$$

Rmq: Pour un milieu incompressible $\det\left(\bar{\bar{F}}\right) = 1$

Transport, dérivées particulaires

Transport d'un élément de surface



$$ds\,\vec{n}\cdot\vec{v} = \det(\overline{\overline{F}})\,dS\,\vec{N}\cdot\vec{V}$$

$$ds\,\vec{n}\cdot\left(\overline{\overline{F}}\vec{V}\right) = \det(\overline{\overline{F}})\,dS\,\vec{N}\cdot\vec{V}$$

$$\overline{\overline{F}}^{T}ds\,\vec{n}\cdot\vec{V} = \det(\overline{\overline{F}})\,dS\,\vec{N}\cdot\vec{V}$$

$$ds\,\vec{n}\cdot\vec{V} = \det(\overline{\overline{F}})\,dS\,\overline{\overline{F}}^{-T}\vec{N}\cdot\vec{V}$$

$$ds\,\vec{n} = \det(\overline{\overline{F}})\,dS\,\overline{\overline{F}}^{-T}\vec{N}$$

SEATECH TOULON

Cinématique

Le mouvement et ses représentations

Déformation d'un milieux continu

Transport, dérivées particulaires

Transport, dérivées particulaires

Dérivée d'une intégrale de volume

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x},t)\, d\Omega = ?$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x},t)\, d\Omega = \frac{d}{dt}\iiint_{\Omega_0} k(\vec{X},t)\, J\, d\Omega_0$$

$$= \iiint_{\Omega_0}\left(\frac{dk}{dt}J + k\frac{dJ}{dt}\right) d\Omega_0 \qquad \frac{dJ}{dt} = ?$$

$$J = \det\overline{\overline{F}} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}F_{ip}F_{jq}F_{kr}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial F_{ip}}{\partial t}F_{jq}F_{kr} \qquad \frac{\partial F_{ip}}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_i(\vec{X},t)}{\partial t\,\partial X_p} = \frac{\partial}{\partial X_p}\left(V_i(\vec{X},t)\right) = \frac{\partial}{\partial X_p}\left(v_i(\vec{x},t)\right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_p} = \frac{\partial v_i}{\partial x_l}F_{lp}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}F_{lp}F_{jq}F_{kr} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\varepsilon_{ljk}\det\left(\overline{\overline{F}}\right) = \frac{1}{2}2\delta_{il}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}J = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}J = J\,\mathrm{div}\left(\vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x},t)\, d\Omega = \iiint_{\Omega_0}\left(\frac{dk}{dt}J + k\,J\,\mathrm{div}\vec{v}\right) d\Omega_0$$

$$= \iiint_{\Omega_0}\left(\frac{dk}{dt} + k\,\mathrm{div}\vec{v}\right) J\, d\Omega_0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x},t)\, d\Omega = \iiint_{\Omega(t)}\left(\frac{dk}{dt} + k\,\mathrm{div}\vec{v}\right) d\Omega$$

Transport, dérivées particulaires

Dérivée d'une intégrale de volume : Application fondamentale!

$$M = \iiint_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t)\, d\Omega$$

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Conservation de la masse}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div}\vec{v} = 0$$

ou

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0$$

Transport, dérivées particulaires

Dérivée d'une intégrale de volume : compléments

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x},t)\,d\Omega = \iiint_{\Omega(t)}\left(\frac{dk}{dt} + k\,\mathrm{div}\vec{v}\right)d\Omega$$

$$= \iiint_{\Omega(t)}\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla k + k\,\mathrm{div}\vec{v}\right)d\Omega$$

$$= \iiint_{\Omega(t)}\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \mathrm{div}\left(k\vec{v}\right)\right)d\Omega$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} \vec{A}(\vec{x},t)\,d\Omega = \iiint_{\Omega(t)}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\vec{A}\otimes\vec{v}\right)\right)d\Omega$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x},t)\,\rho d\Omega = \iiint_{\Omega(t)}\left(\frac{d\rho k}{dt} + \rho k\,\mathrm{div}\vec{v}\right)d\Omega$$

$$= \iiint_{\Omega(t)}\left(\rho\frac{dk}{dt} + k\frac{d\rho}{dt} + \rho k\,\mathrm{div}\vec{v}\right)d\Omega$$

$$= \iiint_{\Omega(t)}\frac{dk}{dt}\rho d\Omega$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} *\,\rho d\Omega = \iiint_{\Omega(t)}\frac{d*}{dt}\rho d\Omega$$

Transport, dérivées particulaires

Dérivée d'une intégrale de surface

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma(t)}\vec{k}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,d\Sigma = ?$$

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma(t)}\vec{k}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,d\Sigma = \frac{d}{dt}\iint_{\Sigma_0}\vec{k}\left(\vec{X},t\right)\cdot J\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{N}d\Sigma_0$$

$$= \iint_{\Sigma_0}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot J\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{N}+\vec{k}\cdot\frac{dJ}{dt}\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{N}+\vec{k}\cdot J\frac{d\underline{\underline{F}}^{-T}}{dt}\vec{N}\right)d\Sigma_0$$

$$\frac{d\underline{\underline{F}}^{-T}}{dt} = ?$$

$$\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{I}} \Rightarrow \frac{d\underline{\underline{F}}^{-1}}{dt}\underline{\underline{F}}+\underline{\underline{F}}^{-1}\frac{d\underline{\underline{F}}}{dt}=\underline{\underline{0}} \Rightarrow \frac{d\underline{\underline{F}}^{-1}}{dt}=-\underline{\underline{F}}^{-1}\frac{d\underline{\underline{F}}}{dt}\underline{\underline{F}}^{-1}$$

$$\frac{d\underline{\underline{F}}}{dt}\underline{\underline{F}}^{-1}=\frac{\partial v_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=\nabla\vec{v}$$

$$\frac{d\underline{\underline{F}}^{-T}}{dt}=-\left(\underline{\underline{F}}^{-1}\nabla\vec{v}\right)^T=-\nabla^T\vec{v}\,\underline{\underline{F}}^{-T}$$

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma(t)}\vec{k}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,d\Sigma = \iint_{\Sigma_0}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot J\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{N}+\vec{k}\cdot J\mathrm{div}\vec{v}\,\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{N}-\vec{k}\cdot J\,\nabla^T\vec{v}\,\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{N}\right)d\Sigma_0$$

$$= \iint_{\Sigma_0}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}+\vec{k}\,\mathrm{div}\vec{v}-\vec{k}\nabla^T\vec{v}\right)\cdot J\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{N}d\Sigma_0$$

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma(t)}\vec{k}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,d\Sigma = \iint_{\Sigma(t)}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}+\vec{k}\,\mathrm{div}\vec{v}-\vec{k}\nabla^T\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\,d\Sigma$$

Efforts dans les milieux continus

Notion de contrainte

Équilibre

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Cours de Mécanique des Milieux Continus
SeaTech 1ère année

Chapitre 3

Efforts dans les milieux continus

F. Golay

Notion de contrainte

Notion de contrainte

Efforts extérieurs

Efforts intérieurs

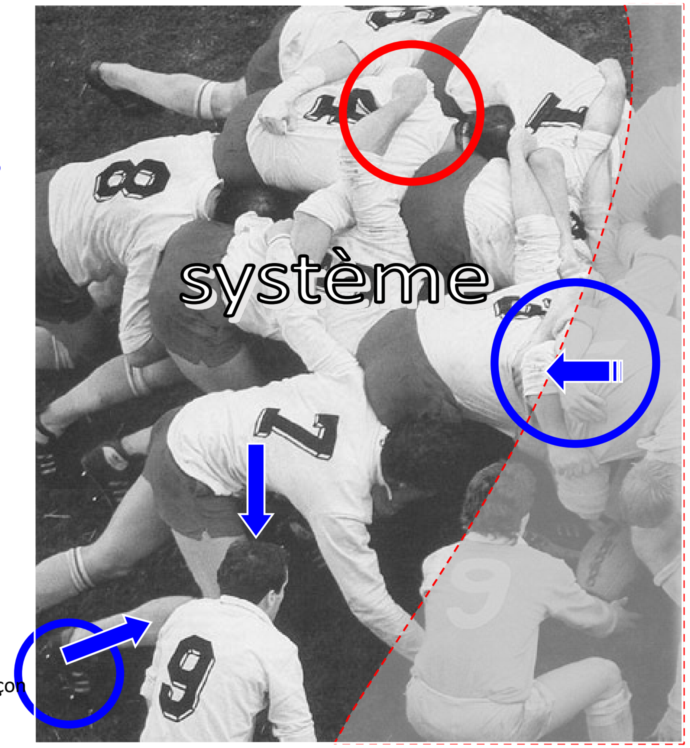
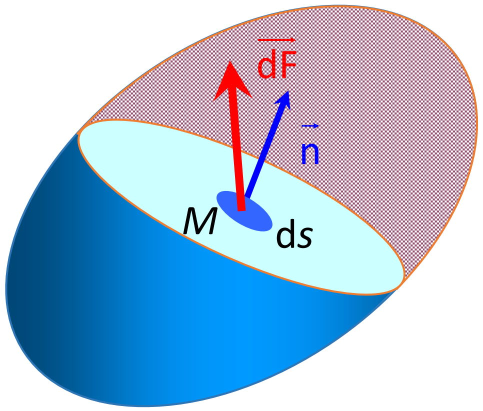


Photo extraite
de *Le Rugby*
P. VILLEPREUX
Cours de J.Salençon
Polytechnique



Effort de "cohésion" $\overrightarrow{dF}(\vec{x},t,\vec{n},ds)$ [N]

$$\overrightarrow{dF}(\vec{x},t,\vec{n},ds)=\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})ds$$

$\vec{T}$: Vecteur contrainte [N/m^2]

$$\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})=\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t)\vec{n}$$

$\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x},t)$ Tenseur des contraintes de Cauchy

[N/m^2]

Efforts dans les milieux continus

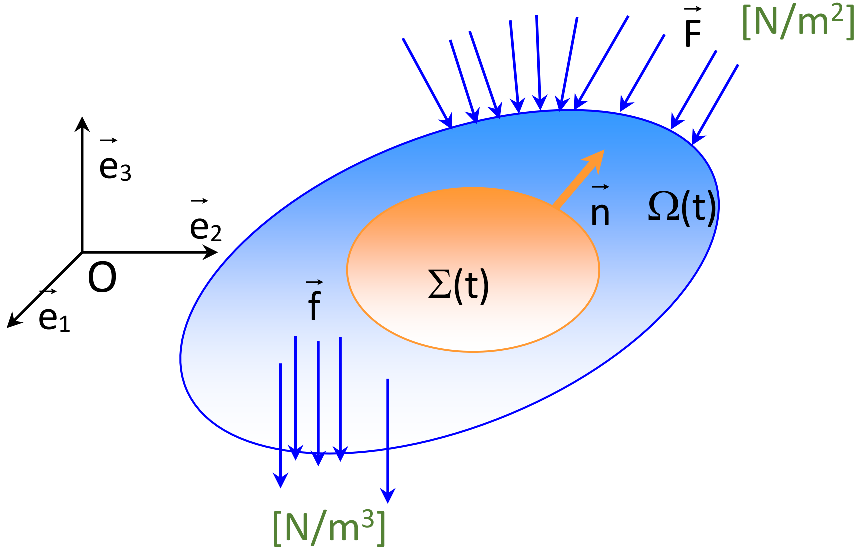
Notion de contrainte

Équilibre

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Équilibre

Principe fondamental de la dynamique



Principe Fondamental de la dynamique

Torseur dynamique
=
Torseur des action extérieures

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\iiint_\Sigma \rho\vec{v}\,dV = \iiint_\Sigma \vec{f}\,dV + \iint_{\partial\Sigma} \vec{T}\,ds \\ \dfrac{d}{dt}\iiint_\Sigma \rho\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}\,dV = \iiint_\Sigma \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}\,dV + \iint_{\partial\Sigma} \overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}\,ds \end{cases}$$

Équilibre

Forme locale de l'équilibre

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Sigma}\rho\vec{v}\,dV=\iiint_{\Sigma}\vec{f}\,dV+\iint_{\partial\Sigma}\vec{T}\,ds$$

$$\iiint_{\Sigma}\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,dV=\iiint_{\Sigma}\vec{f}\,dV+\iint_{\partial\Sigma}\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}\,ds$$

Conservation de la masse

Définition du vecteur contrainte

$$\iiint_{\Sigma}\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,dV=\iiint_{\Sigma}\vec{f}\,dV+\iiint_{\Sigma}\mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)dV$$

Théorème de la divergence

$$\forall\Sigma\quad\iiint_{\Sigma}\left(\mathrm{div}\overline{\overline{\sigma}}+\vec{f}-\rho\vec{\gamma}\right)dV=\vec{0}$$

Forme locale de l'équation d'équilibre

$$\begin{cases}\mathrm{div}\overline{\overline{\sigma}}+\vec{f}=\rho\vec{\gamma} & \text{dans } \Omega \\ \overline{\overline{\sigma}}\vec{n}=\vec{F} & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

[N/m³]

[N/m²]

Équilibre

Forme locale de l'équilibre des moments

$$\frac{d}{dt}\iiint_\Sigma \rho\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}\,dV=\iiint_\Sigma \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}\,dV+\iint_{\partial\Sigma}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}\,ds$$

Pas de densité de moments extérieurs!

$$\iiint_\Sigma \rho\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}\right)dV=\iiint_\Sigma \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}\,dV+\iint_{\partial\Sigma}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}\,ds$$

$$\iiint_\Sigma \rho\vec{v}\wedge\vec{v}\,dV+\iiint_\Sigma \rho\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}\,dV=\iiint_\Sigma \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}\,dV+\iint_{\partial\Sigma}\overrightarrow{OM}\wedge\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}\,ds$$

$$\iiint_\Sigma \varepsilon_{ijk}x_j(\rho\gamma_k-f_k)\,\vec{e}_i\,dx=\iint_{\partial\Sigma}\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}n_l\,\vec{e}_i\,dx$$

Notations indicielles

$$\iiint_\Sigma\left[\varepsilon_{ijk}x_j(\rho\gamma_k-f_k)-\frac{\partial}{\partial x_p}(\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kp})\right]\vec{e}_i\,dx=0$$

Théorème de la divergence

$$\iiint_\Sigma\left[\varepsilon_{ijk}x_j(\rho\gamma_k-f_k-\sigma_{kp,p})-\varepsilon_{ijk}\sigma_{kp}\delta_{pj}\right]\vec{e}_i\,dx=0$$

Équilibre

$$\forall\Sigma\quad \iiint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}\,\vec{e}_i\,dx=0$$

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}\,\vec{e}_i=\vec{0}$$

$$\varepsilon_{123}\sigma_{23}+\varepsilon_{132}\sigma_{32}=0 \qquad +\sigma_{23}-\sigma_{32}=0$$

$$\varepsilon_{213}\sigma_{13}+\varepsilon_{231}\sigma_{31}=0 \qquad -\sigma_{13}+\sigma_{31}=0$$

$$\varepsilon_{312}\sigma_{12}+\varepsilon_{321}\sigma_{21}=0 \qquad +\sigma_{12}-\sigma_{21}=0$$

$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}\text{ est symétrique!}}$

Efforts dans les milieux continus

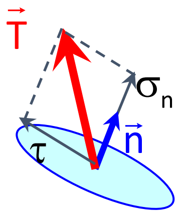
Notion de contrainte

Équilibre

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Contrainte normale et tangentielle



σ_n contrainte normale
τ contrainte tangentielle

Contraintes principales et directions principales

$\overline{\overline{\sigma}}$ est symétrique $\Rightarrow$ $\overline{\overline{\sigma}}$ est diagonalisable

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : contraintes principales
Vecteurs propres : directions principales

Invariants

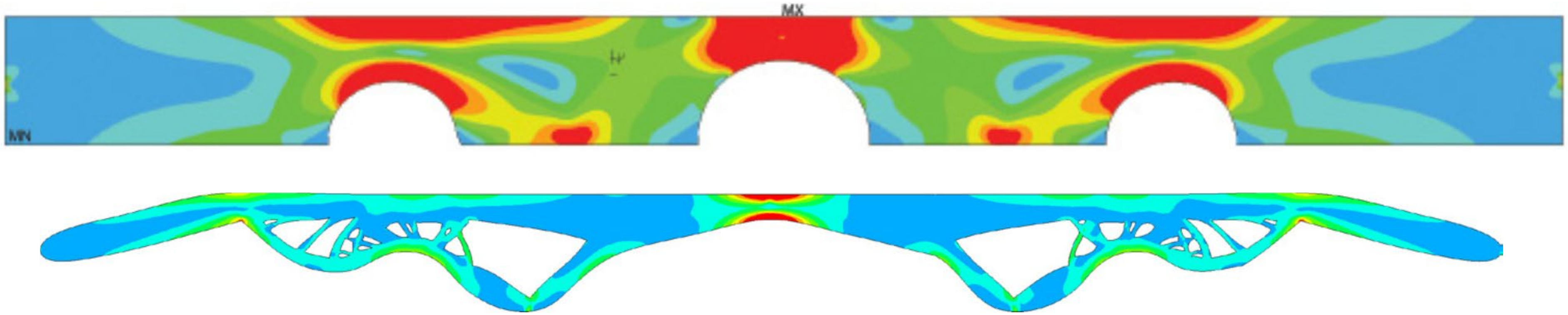
$$\Sigma_I = \mathrm{Tr}(\overline{\overline{\sigma}}) = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$\Sigma_{II} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(\overline{\overline{\sigma}})^2 - \mathrm{Tr}(\overline{\overline{\sigma}}^2)\right] = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I$$

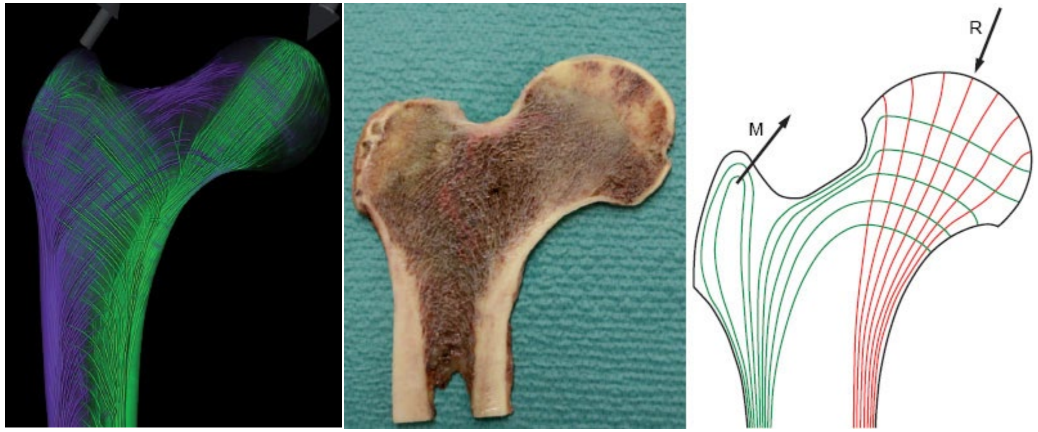
$$\Sigma_{III} = \mathrm{Det}(\overline{\overline{\sigma}}) = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$$

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Illustrations



“Topology Optimisation for Steel Structural Design with Additive Manufacturing”, Ren S., Galjaard S., Conference: Design Modelling Symposium 2015, Copenhagen, doi=10.1007/978-3-319-24208-8_3



Christian Dick, Joachim Georgii, Rainer Burgkart, and Rüdiger Westermann. Stress tensor field visualization for implant planning in orthopedics. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proceedings of IEEE Visualization 2009), 15(6):1399–1406, 2009.

Efforts dans les milieux continus

Notion de contrainte

Équilibre

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Cercles de Mohr

$\overline{\overline{\sigma}}$ donné

$\vec{n}$ varie

$\vec{T}$??

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}, \quad \overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T} = \begin{Bmatrix} n_1\,\sigma_I \\ n_2\,\sigma_{II} \\ n_3\,\sigma_{III} \end{Bmatrix}$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$\sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

$$\tau^2 + \sigma_n^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}$$

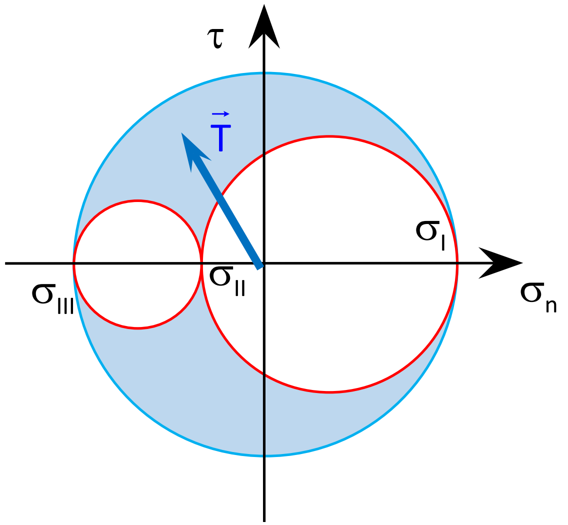
$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2$$

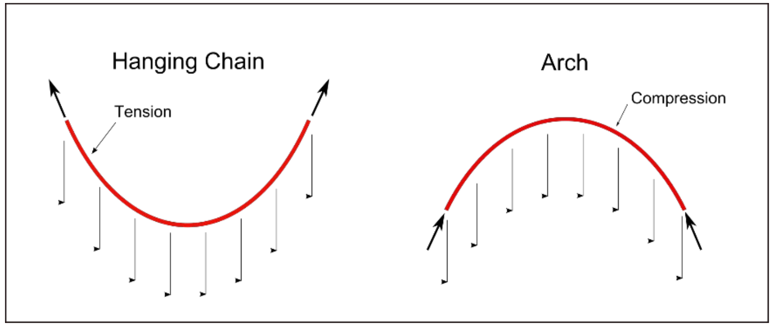


$$\tau_{max} = \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right|$$

Illustration: optimisation topologique, arc, …

Chainette - caténaire

Robert Hooke (1635-1703): «*Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* »
« De même que pend un fil flexible, de même, en inversant, on trouve les pièces contiguës d'une arche »



Source wikipedia :https://fr.wikipedia.org/wiki/Cha%C3%AEnette

L'arc de Ctésiphon du palais de Taq-i Kisra, près de Baghdad en Iraq (531 après J.C.).(source https://artkarel.com/tag/chainette/)

Le grenier du temple du Ramasséum, près de Thèbes en Egypte (XIII^{ème} siècle av. J.-C.). (source https://artkarel.com/tag/chainette/)

SEATECH TOULON

Efforts dans les milieux continus

Notion de contrainte

Équilibre

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Efforts dans les milieux continus

Notion de contrainte

Équilibre

Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Cours de Mécanique des Milieux Continus
SeaTech 1ère année

Chapitre 4

Élasticité, thermoélasticité et introduction à la mécanique des fluides

F. Golay

Introduction

Loi de comportement

$$\Re\left(\overline{\overline{\sigma}},\overline{\overline{\varepsilon}},\frac{d\overline{\overline{\sigma}}}{dt},\frac{d\overline{\overline{\varepsilon}}}{dt},T,\alpha,\ldots\right)=0$$

Lecture conseillée :

P. Germain, *Mécanique*, ed. ellipse, école polytechnique, tomes I et II

J. Lemaitre, J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, ed. Dunos 1996

Jean Coirier : « *Mécanique des Milieux Continus* », ed. Dunod, Paris, 2001.

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

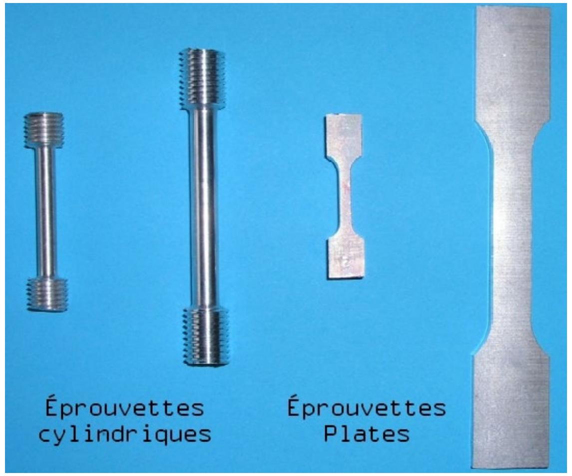
Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

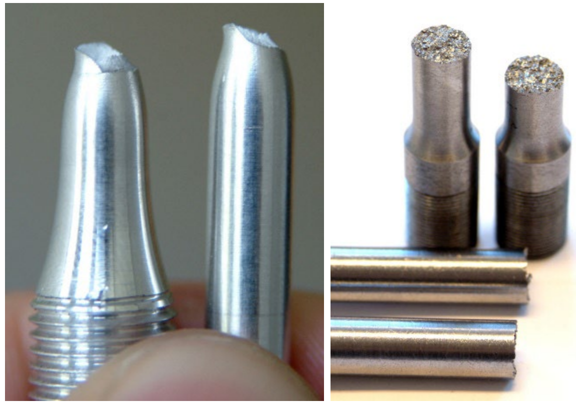
Loi de comportement

Essai de traction

Machine de traction SIM/UTLN



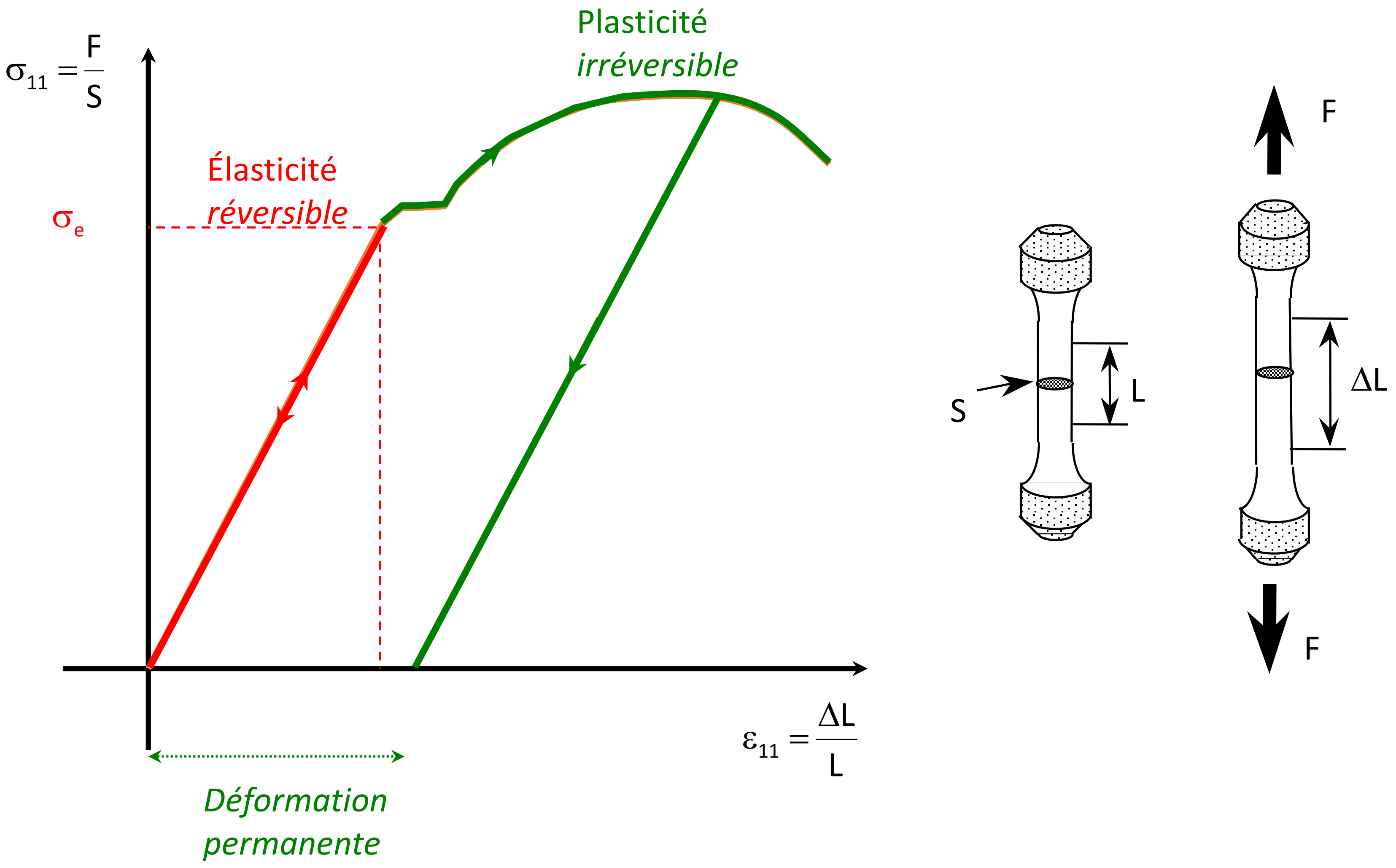
Exemple d'éprouvettes
(source Wikipédia)



Exemples de rupture d'éprouvettes
(source Wikipédia)

Loi de comportement

Courbe de traction



Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Loi de comportement

Loi de comportement générale d'élasticité

$$\overline{\overline{\sigma}}(\vec{x},t)=\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}(\vec{x}):\overline{\overline{\varepsilon}}(\vec{x},t)$$

$$\sigma_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=C_{ijpq}\,\varepsilon_{pq}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}=C_{jilk}$ ⇒ 21 termes

Loi de comportement d'élasticité linéaire isotrope

$$\overline{\overline{\sigma}}=\lambda \mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\overline{\overline{I}}+2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}$$

$$\sigma_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=\left(\lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}+2\mu\,\varepsilon_{ij}\right)\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

σ $[N/m^2]$

ε $[-]$

λ,μ $[N/m^2]$ Coefficients de Lamé

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=-\frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\overline{\overline{I}}+\frac{1+\nu}{E}\overline{\overline{\sigma}}$$

$$\varepsilon_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=\left(-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}\right)\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

σ $[N/m^2]$

ε $[-]$

ν $[-]$ Coefficient de Poisson

E $[N/m^2]$ Module d'Young

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\quad \text{et}\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

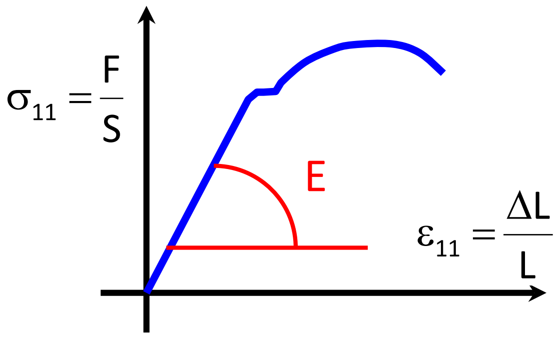
$$\mu=\frac{E}{2\,(1+\nu)}\quad \text{et}\quad \lambda=\frac{\nu\,E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$$

Loi de comportement

Application à l'essai de traction

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\left(\bar{\bar{\sigma}}\right)\bar{\bar{I}} + \frac{1+\nu}{E}\bar{\bar{\sigma}}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{bmatrix}$$



SEATECH TOULON

Élasticité …

Loi de comportement

Aparté: Matériaux composites, généralités

Matrice + Renfort = composite

- Métallique
- Céramique
- Organique
  - Thermoplastique
  - Thermodurcissable
  - Bio-polymère
- …

- Verre
- Carbone
- Kevlar
- Métallique
- Céramiques
- Naturelles
- …

Exemple : le torchis !

http://www.branche-rouge.org/les-articles/tous-les-articles/artisanats/architecture-et-construction/la-construction-dun-maison-an-mil-avec-des-outils-depoque

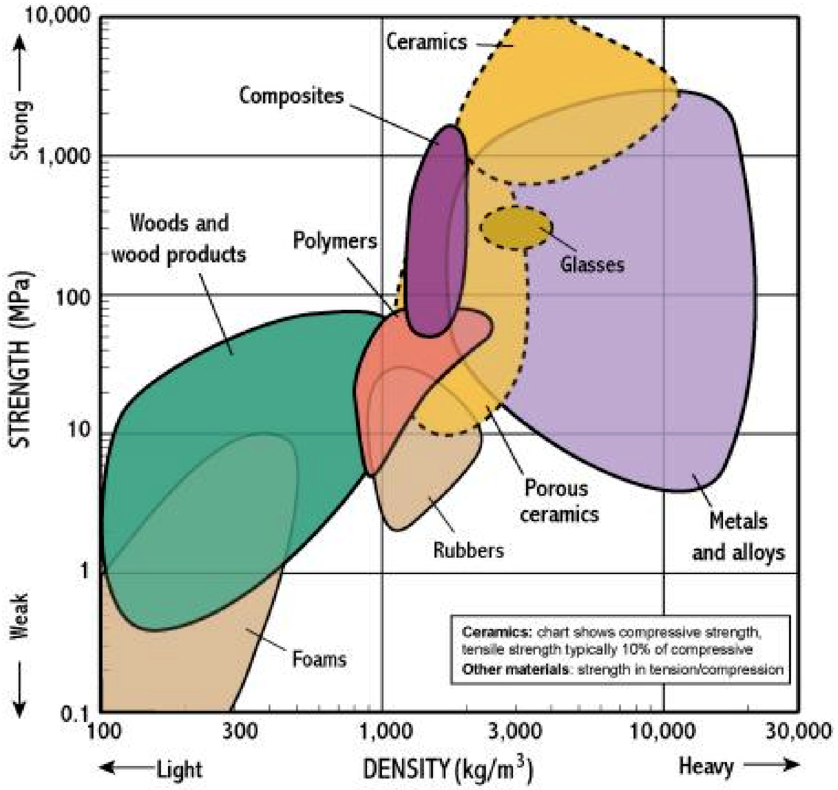
Conseil de lecture :

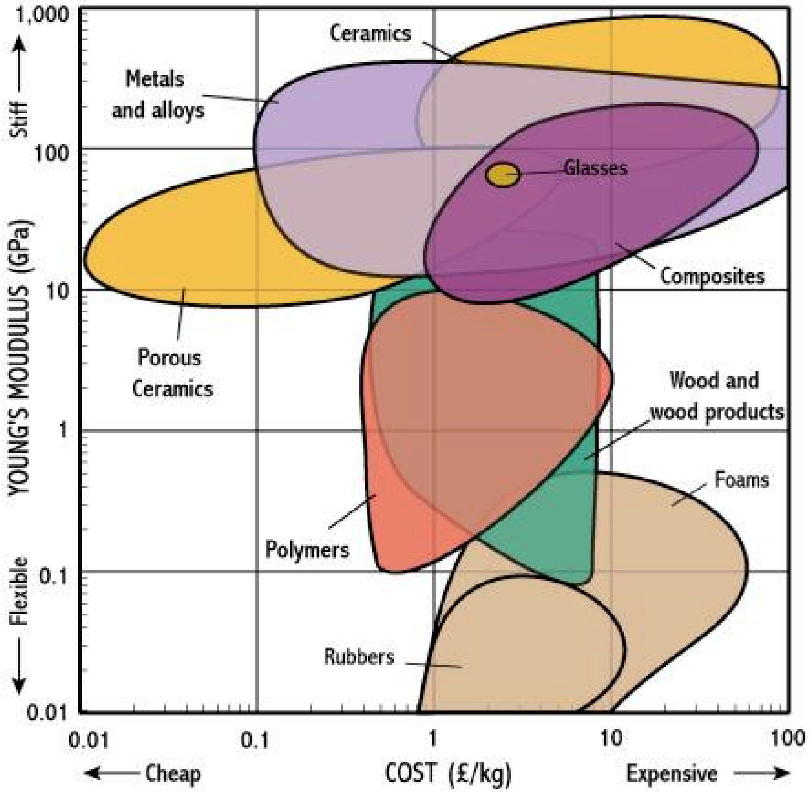
« *Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures* », BERTHELOT Jean-Marie, ed. Lavoisier.

« *Matériaux composites* », GAY Daniel, ed. Lavoisier,

Loi de comportement

Aparté: Matériaux composites, pourquoi ?





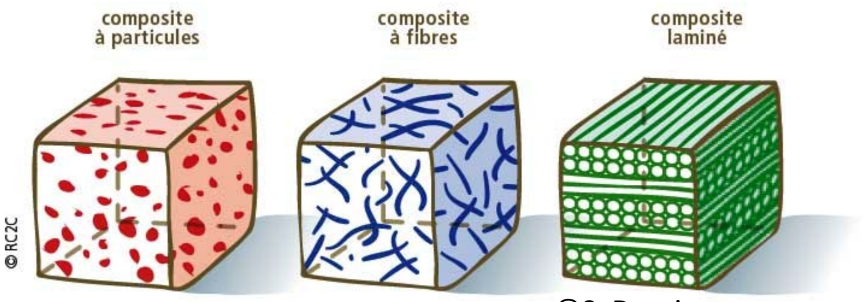
Cours de Sylvain Drapier Mines de Saint-Etienne

http://www.emse.fr/~drapier/index_fichiers/CoursPDF/RMP-Composites/RMP-composites-SDrapier.pdf

MINES Saint-Étienne

Loi de comportement

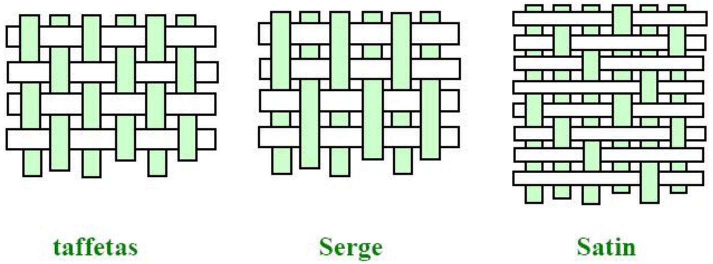
Aparté: Matériaux composites, types de renfort



©S. Drapier

Mat : fibres courtes

Tissu



Fibres longues bobinées
©CEA

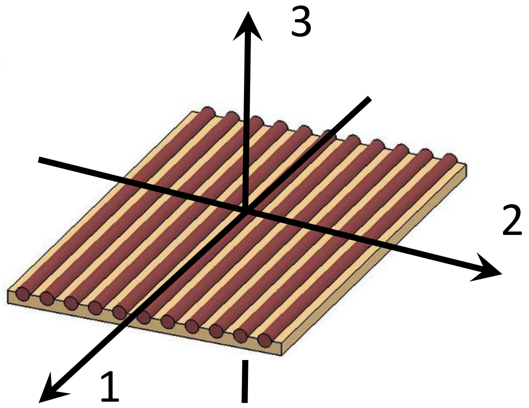
Tissage 3D
©Eric Drouin / Snecma / Safran

SEATECH TOULON

Élasticité …

Loi de comportement

Loi de comportement Élastique orthotrope



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

Matrice de souplesse

Loi de comportement

Critères limites

Critère de Tresca

$$\frac{1}{2}\mathrm{Sup}\left\{\left|\sigma_{I}-\sigma_{II}\right|,\left|\sigma_{I}-\sigma_{III}\right|,\left|\sigma_{II}-\sigma_{III}\right|\right\} \quad \leq \quad \sigma_0$$

Critère de Von-Mises

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_{I}-\sigma_{II})^2+(\sigma_{I}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2\right)} \quad \leq \quad \sigma_0$$

Critère de Hill

$$F(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{33})^2+G(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+2L\sigma_{23}^2+2M\sigma_{13}^2+2N\sigma_{12}^2=1$$

Élasticité …

Loi de comportement

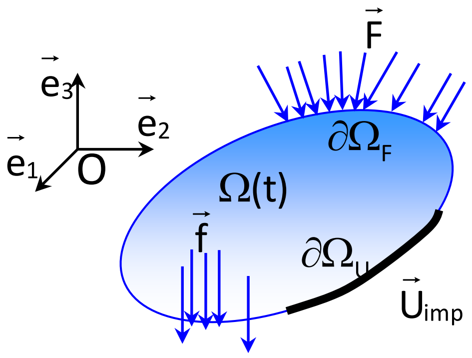
Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Le problème d'élasticité

Cas général



Hypothèse des petites perturbations

$[-]$ $$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}\right)$$

Equation de compatibilité

$[N/m^3]$ $$\mathrm{div}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \rho\vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega$$

$[N/m^2]$ $$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda\,\mathrm{tr}\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\overline{\overline{1}} + 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}$$

Conditions aux limites

$[m]$ $$\vec{u} = \vec{U}_{imp} \quad \text{sur } \partial\Omega_U$$

$[N/m^2]$ $$\overline{\overline{\sigma}}\vec{n} = \begin{cases} \vec{F} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{R} & \text{sur } \partial\Omega_U \end{cases}$$

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Le problème d'élasticité

Formulation en déplacement

$$\mathrm{div}\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}}) + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\lambda\nabla(\mathrm{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})) + 2\mu\,\mathrm{div}(\bar{\bar{\varepsilon}}) + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\lambda\nabla(\mathrm{div}\vec{u}) + \mu\,\mathrm{div}(\nabla\vec{u}) + \mu\,\mathrm{div}(\nabla^T\vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}\,\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij,j}\vec{e}_i$$
$$= \left(\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\right)_{,j}\vec{e}_i$$
$$= \left(\lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu u_{i,j} + \mu u_{j,i}\right)_{,j}\vec{e}_i$$
$$= \lambda u_{k,ki}\vec{e}_i + \mu u_{i,jj}\vec{e}_i + \mu u_{j,ij}\vec{e}_i$$
$$= (\lambda+\mu)\left(u_{k,k}\right)_{,i}\vec{e}_i + \mu\left(u_i\vec{e}_i\right)_{,jj}$$

Équation de Navier

$$(\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div}\vec{u}) + \mu\,\mathrm{div}(\nabla\vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

Formulation en contraintes

Équation de Michell (ou Beltrami sans forces volumiques)

$$\mathrm{div}(\nabla\bar{\bar{\sigma}}) + \frac{1}{1+\nu}\nabla(\nabla\,\mathrm{Tr}(\bar{\bar{\sigma}})) + \frac{\nu}{1-\nu}\mathrm{div}\vec{f}\,\bar{\bar{I}} + \nabla\vec{f} + \nabla^T\vec{f} = \bar{\bar{0}}$$

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Le problème d'élasticité

Élasticité plane en contraintes planes

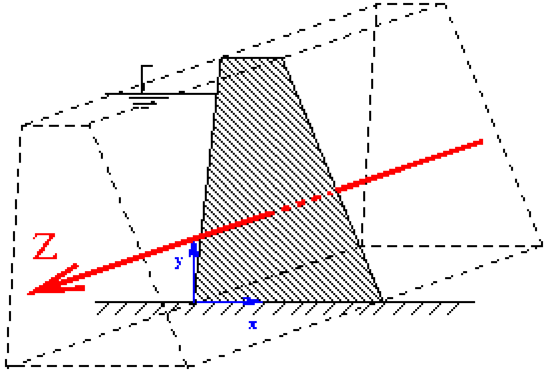
Structures minces dans la direction 3

$$\overline{\overline{\sigma}}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0\\ \sigma_{21}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0\\ 0 & 0 & \color{red}{0}\end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & 0\\ \varepsilon_{21}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0\\ 0 & 0 & \color{red}{\varepsilon_{33}(x_1,x_2)}\end{bmatrix}$$

Élasticité plane en déformations planes

Structures élancées dans la direction 3

$$\overline{\overline{\sigma}}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0\\ \sigma_{21}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0\\ 0 & 0 & \color{red}{\sigma_{33}(x_1,x_2)}\end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & 0\\ \varepsilon_{21}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0\\ 0 & 0 & \color{red}{0}\end{bmatrix}$$



Images: Campus numérique Mecagora

Le problème d'élasticité

Élasticité plane en déformations planes: Fonction d'Airy

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{33} = \nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}=0 \\ \sigma_{21,1}+\sigma_{22,2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\phi(x_1,x_2) \quad / \, \sigma_{11}=\phi_{,2} \quad \text{et} \quad \sigma_{12}=-\phi_{,1} \\ \exists\psi(x_1,x_2) \quad / \, \sigma_{21}=\psi_{,2} \quad \text{et} \quad \sigma_{22}=-\psi_{,1} \end{cases} \Rightarrow \exists\chi(x_1,x_2) \quad / \, \phi=\chi_{,2} \quad \text{et} \quad \psi=-\chi_{,1}$$

$$\exists\chi(x_1,x_2) \quad / \begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} \end{cases}$$

Beltrami $\Rightarrow \Delta\Delta\chi = 0$ Fonction d'Airy

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

SeaTech Toulon

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Thermoélasticité

Premier principe de la thermodynamique

Premier principe: conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt}\left(E+K\right)=P_{ext}+Q$$

Énergie interne	Énergie cinétique	Puissance des efforts extérieurs	Taux de chaleur reçu
$E=\int_{\Omega}\rho e\,d\Omega$	$K=\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\vec{v}.\vec{v}\,d\Omega$	$P_{ext}=\int_{\Omega}\vec{f}.\vec{v}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}\vec{F}.\vec{v}\,ds$	$Q=\int_{\Omega}r\,d\Omega-\int_{\partial\Omega}\vec{q}.\vec{n}\,ds$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho e\,d\Omega+\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v}\,d\Omega=\int_{\Omega}\vec{f}\cdot\vec{v}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{v}\,d\Omega+\int_{\Omega}r\,d\Omega-\int_{\partial\Omega}\vec{q}\cdot\vec{n}\,ds$$

$$\int_{\Omega}\rho\frac{de}{dt}\,d\Omega+\int_{\Omega}\rho\vec{v}\cdot\vec{\gamma}\,d\Omega=\int_{\Omega}\vec{f}\cdot\vec{v}\,ds+\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{v}\,d\Omega+\int_{\Omega}r\,d\Omega-\int_{\partial\Omega}\vec{q}\cdot\vec{n}\,ds$$

Dérivée d'une intégrale de volume

$$\int_{\Omega}\rho\frac{de}{dt}\,d\Omega+\int_{\Omega}\vec{v}\cdot\mathrm{div}\,\overline{\overline{\sigma}}\,d\Omega=\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{v}\,ds+\int_{\Omega}r\,d\Omega-\int_{\partial\Omega}\vec{q}\cdot\vec{n}\,ds$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\int_{\Omega}\rho\frac{de}{dt}\,d\Omega+\int_{\Omega}\mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}\vec{v}\right)d\Omega-\int_{\Omega}\overline{\overline{\sigma}}^{T}:\nabla\vec{v}\,d\Omega=\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{v}\,ds+\int_{\Omega}r\,d\Omega-\int_{\partial\Omega}\vec{q}\cdot\vec{n}\,ds$$

$$\mathrm{Div}\left(\overline{\overline{A}}\vec{u}\right)=\mathrm{div}\overline{\overline{A}}^{T}\cdot\vec{u}+\nabla\vec{u}:\overline{\overline{A}}$$

$$\int_{\Omega}\rho\frac{de}{dt}\,d\Omega+\int_{\partial\Omega}\left(\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}-\vec{F}\right)\cdot\vec{v}\,d\Omega-\int_{\Omega}\overline{\overline{\sigma}}:\nabla_{s}\vec{v}\,d\Omega=\int_{\Omega}r\,d\Omega-\int_{\Omega}\mathrm{div}\vec{q}\,d\Omega$$

Conservation de la quantité de mouvement, symétrie du tenseur des contraintes et théorème de la divergence

$$\int_{\Omega}\rho\frac{de}{dt}\,d\Omega-\int_{\Omega}\overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{D}}\,d\Omega=\int_{\Omega}r\,d\Omega-\int_{\Omega}\mathrm{div}\vec{q}\,d\Omega$$

$$\rho\frac{de}{dt}-\overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{D}}=r-\mathrm{div}\vec{q}$$

Forme locale du premier principe

Thermoélasticité

Équation de la chaleur

$$\rho\frac{de}{dt}-\overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{D}}=r-\operatorname{div}\vec{q}$$

En l'absence de transformation chimique, dans la plupart des cas, on considère que e=CT, où C est la capacité calorifique.

D'après la loi de Fourier, le flux de chaleur est proportionnel au gradient thermique

$$\vec{q}=-\overline{\overline{k}}\nabla T$$

$\overline{\overline{k}}$ matrice symétrique de conductivité thermique

$$\rho C\frac{dT}{dt}=\rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla T\right)=\overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{D}}+\operatorname{div}\left(\overline{\overline{k}}\nabla T\right)+r$$

Équation de la chaleur

En général, la contribution d'origine mécanique peut être négligée

$$\rho C\frac{dT}{dt}=\operatorname{div}\left(\overline{\overline{k}}\nabla T\right)+r$$

Dans le cas stationnaire, sans source de chaleur, à conductivité constante

$$\Delta T=0$$

Élasticité …

Thermoélasticité

Thermoélasticité

On exprime l'énergie interne massique e en fonction de l'entropie massique s, de la température T et l'énergie libre ψ.

$$e = \psi + Ts$$

Hypothèse thermoélastique : L'énergie libre ne dépend que de la température et des déformations, on ne considère que des petites perturbations autour d'une position d'équilibre.

$$\rho\psi(\overline{\overline{\varepsilon}},T) = \overline{\overline{\sigma}}_0 : \overline{\overline{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} - \rho s\,\delta T - \frac{1}{2}\rho b\,\delta T^2 - \overline{\overline{\beta}} : \overline{\overline{\varepsilon}}\,\delta T$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\overline{\varepsilon}}}(\overline{\overline{\varepsilon}},T) = \overline{\overline{\sigma}}_0 + \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{\beta}}\tau = \overline{\overline{\sigma}}_0 + \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \left(\overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{\alpha}}\tau\right)$$

(démontrable en partant de l'inégalité de Clausius-Duhem)

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \left(\overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{\alpha}}\,\delta T\right)$$

Cas général à contrainte initiale nulle

Cas isotrope

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda \mathrm{Tr}(\overline{\overline{\varepsilon}})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta T\,\overline{\overline{I}}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \alpha\delta T\,\overline{\overline{I}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\overline{\overline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\overline{\overline{\sigma}}$$

SEATECH TOULON

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d’élasticité

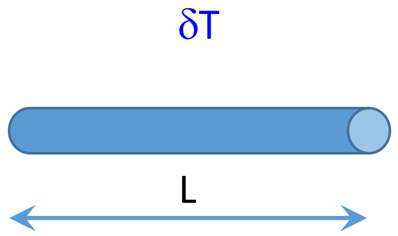
Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

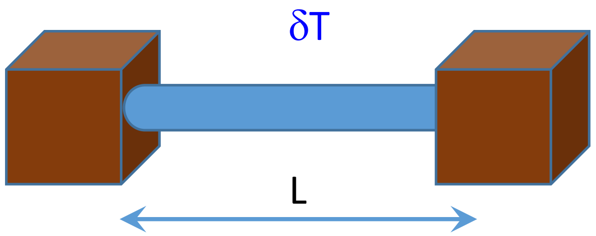
Thermoélasticité

Illustration

Déformation « thermique »

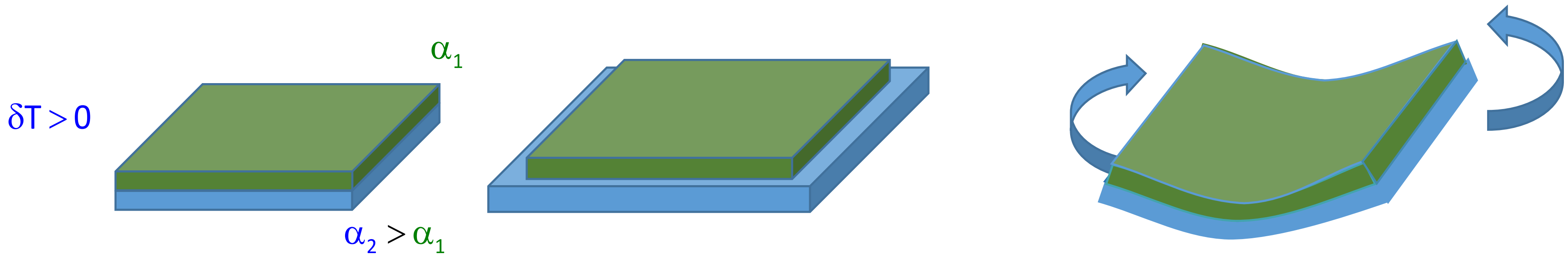


$\sigma_{11}=0 \quad \varepsilon_{11}=\dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}=\alpha\delta T \quad u_1(L)=\alpha\delta T L$



$\varepsilon_{11}=0 \quad \sigma_{11}=-E\alpha\delta T$

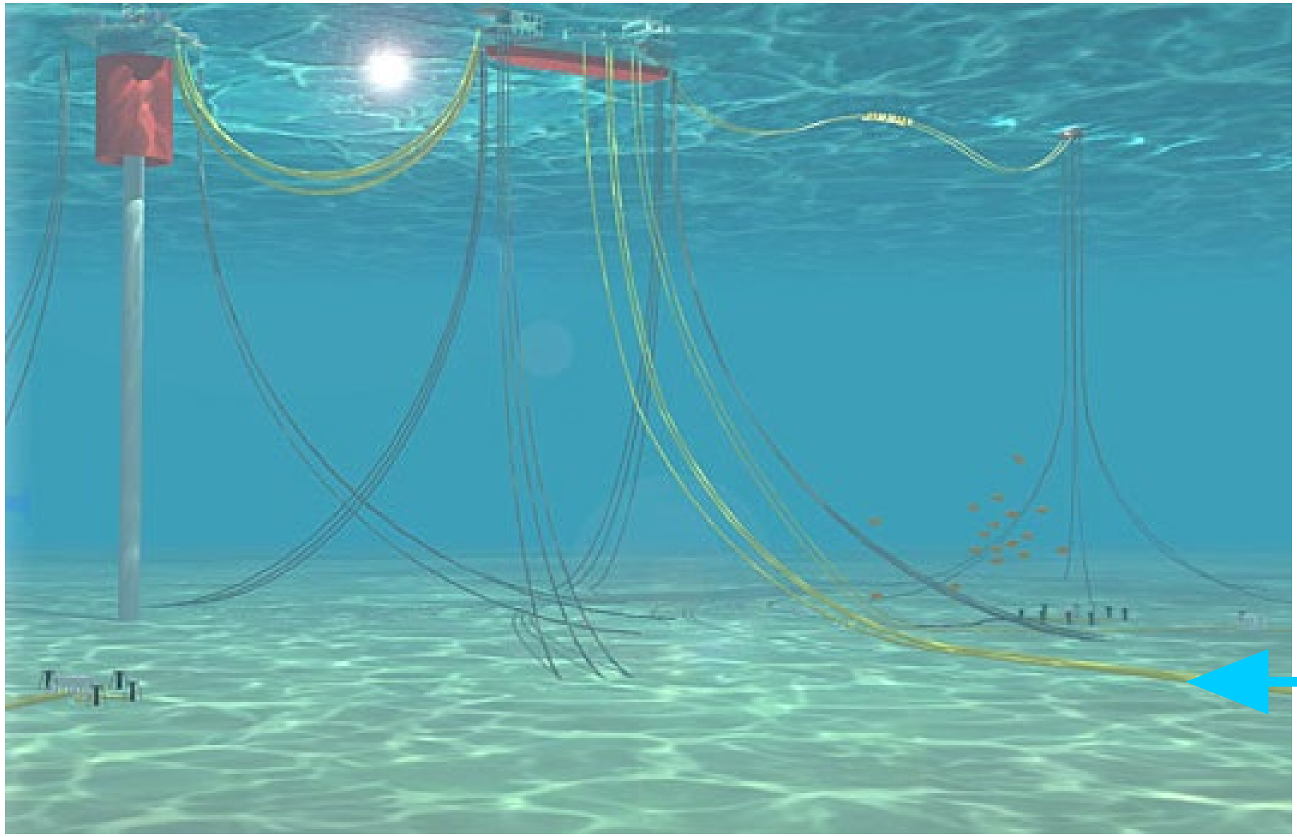
Contrainte « thermique »

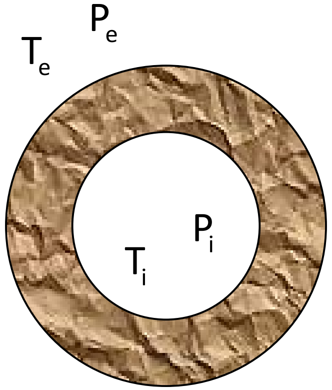


Contraintes et déformations « thermiques »

Thermoélasticité

Exemple

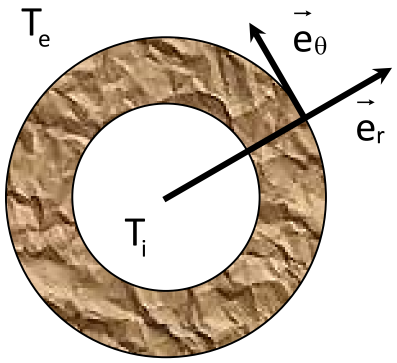




Élasticité …

Thermoélasticité

Résolution



Problème thermique

$$r + \mathrm{div}\left(\bar{\bar{k}}\nabla T\right) = \rho C\frac{dT}{dt} - T\frac{\partial\bar{\bar{\sigma}}}{\partial T} : \frac{\partial\bar{\bar{\varepsilon}}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \Delta T = 0$$

$$T = T(r) \quad \rightarrow \quad \delta T = T(r) - T_0 = a\ln r + b$$

avec $T(r_i) = T_i$ et $T(r_e) = T_e$

Problème mécanique

Hypothèse $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$

$$\text{donc } \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & u/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\left(u' + \frac{u}{r}\right) + 2\mu u' - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta T(r) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda\left(u' + \frac{u}{r}\right) + 2\mu\frac{u}{r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta T(r) \end{aligned}$$

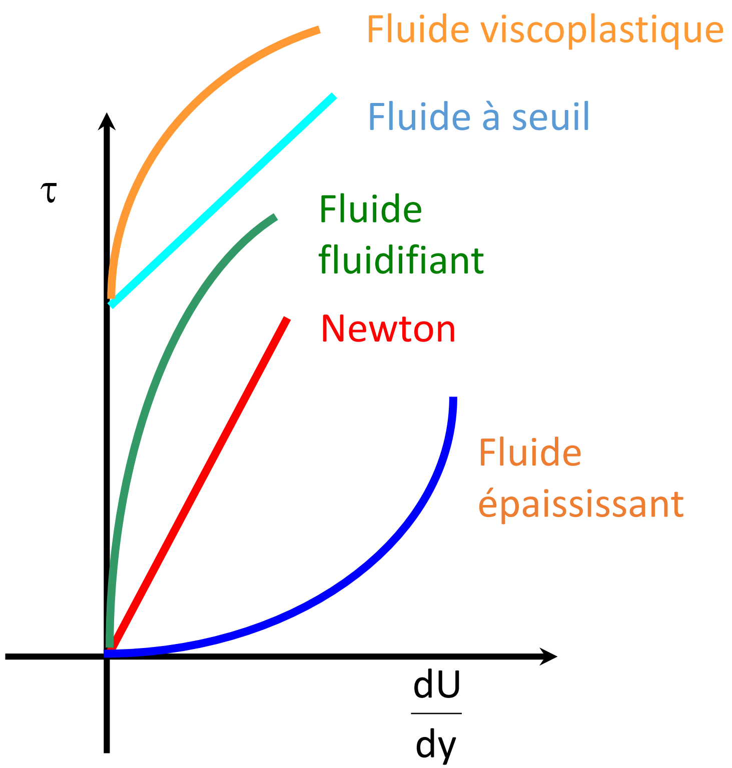
$$\mathrm{div}\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \rho\vec{\gamma} \rightarrow \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 0 \rightarrow u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = \frac{(3\lambda + 2\mu)a\alpha}{(\lambda + 2\mu)r}$$

$$u(r) = \frac{(3\lambda + 2\mu)a\alpha}{(\lambda + 2\mu)} r\mathrm{Ln}(r) + Ar + \frac{B}{r}$$

avec $\sigma_{rr}(r_e) = -P_e$ et $\sigma_{rr}(r_i) = -P_i$

Introduction à la mécanique des fluides

Loi de comportement



Fluide newtonien

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{1}} + \lambda \,\mathrm{tr}\left(\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}\right)\overline{\overline{1}} + 2\mu\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}$$

$$\rho\vec{\gamma} = \mathrm{div}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f}$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \mathrm{div}\left(-p\overline{\overline{1}} + \lambda \,\mathrm{tr}\left(\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}\right)\overline{\overline{1}} + 2\mu\dot{\overline{\overline{\varepsilon}}}\right)$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{div}\left(p\overline{\overline{1}}\right)\lambda\,\mathrm{div}\left(\mathrm{div}\vec{v}\,\overline{\overline{1}}\right) + \mu\,\mathrm{div}\left(\nabla\vec{v} + \nabla^T\vec{v}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\vec{v}.\vec{v}\right) = -\nabla p + \lambda\nabla\left(\mathrm{div}\vec{v}\right) + \mu\,\mathrm{div}\left(\nabla\vec{v}\right) + \mu\,\mathrm{div}\left(\nabla^T\vec{v}\right)$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\nabla\vec{v}.\vec{v} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla\left(\mathrm{div}\vec{v}\right) + \mu\,\mathrm{div}\left(\nabla\vec{v}\right)$$

Si le fluide est incompressible alors $\mathrm{div}\vec{v} = 0$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\vec{v}.\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v}$$

Introduction à la mécanique des fluides

Équations de Navier-Stokes incompressible

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)$$

Élasticité …

Loi de comportement

Le problème d'élasticité

Thermoélasticité

Introduction à la mécanique des fluides

Introduction à la mécanique des fluides

Exemple: écoulement de Couette-Poiseuille plan

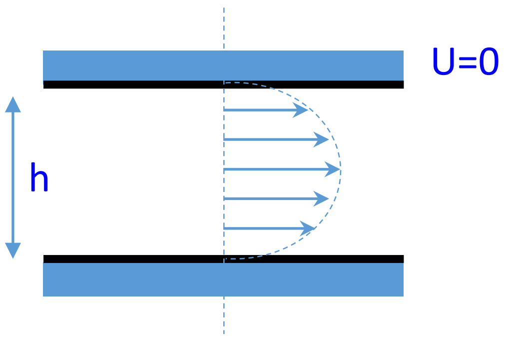
On considère un écoulement stationnaire entre deux plaques infinies, dont l'une est immobile tandis que l'autre est animée d'une vitesse constante U

$$\frac{\partial}{\partial t}=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial x_3}=0\,,\quad v_2=v_3=0$$

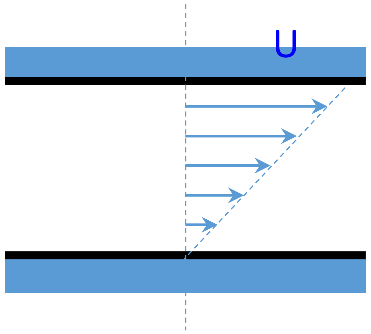
$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=0\\ &v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\\ &0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}\\ &0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}\end{aligned}}$$

$$p=p(x_1)\,,\, v_1=v_1(x_2) \qquad \nu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_1}$$

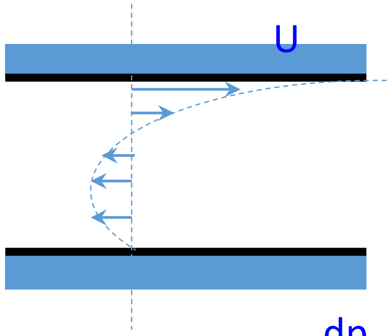
$$p=p(x_1)\,,\, v_1=v_1(x_2) \qquad v_1(x_2)=\mu\frac{dp}{dx_1}x_2(x_2-h)+U\frac{x_2}{h}$$



Cas U=0 : Poiseuille plan, profil parabolique



Cas p=cste : Couette plan, profil linéaire



Cas Mixte avec $\frac{dp}{dx_1}>0$