



Mécanique des Milieux Continus

SeaTech

GOLAY Frédéric

Table of contents

Préface	3
Introduction	5
I Notations tensorielles	6
1 Vecteurs et tenseurs	8
1.1 Notations	8
1.1.1 Vecteur	8
1.1.2 Application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E}	9
1.1.3 Formes bilinéaires	10
1.1.4 Tenseurs	10
1.2 Produit tensoriel - cas général	13
1.3 Changement de repère	14
1.3.1 Matrice de passage	14
1.3.2 Changement de repère: Vecteurs	14
1.3.3 Changement de repère: Application linéaire	15
1.3.4 Changement de repère: Forme bilinéaire	16
1.3.5 Changement de repère: Tenseur d'ordre 2	16
2 Calcul vectoriel	17
2.1 Les symboles de permutation	17
2.2 Déterminant d'une matrice	18
2.3 Polynôme caractéristique	18
2.4 Adjoint d'un tenseur antisymétrique	19
2.5 Produit vectoriel	19
3 Analyse vectorielle	22
3.1 Généralités	22
3.2 Quelques opérateurs usuels	22
3.3 Transformation d'intégrales	26
4 Formulaire	28
4.1 Coordonnées cartésiennes orthonormées	28
4.2 Coordonnées cylindriques	29

4.3	Coordonnées sphériques	31
4.4	Comment retrouver les formules	32
À Retenir		34
Exercices		36
II Cinématique		39
5 Le mouvement et ses représentations		41
5.1	Configuration	41
5.2	Variables de Lagrange et variables d'Euler	42
5.2.1	Trajectoire	42
5.2.2	Lignes de courant	43
5.3	Dérivées particulières	43
5.3.1	Définition	43
5.3.2	Application à l'accélération	44
6 Déformation d'un milieu continu		46
6.1	Notion de déformation	46
6.2	Tenseur des déformations	47
6.2.1	Définition	47
6.2.2	Remarques	48
6.2.3	Autre écriture	49
6.2.4	Hypothèse des petites perturbations (HPP)	49
6.3	Conditions de compatibilité	50
7 Transport, dérivées particulières		52
7.1	Transport d'un volume	52
7.2	Transport d'une surface orientée	53
7.3	Dérivée particulière d'une intégrale de volume	54
7.4	Dérivée particulière d'une intégrale de surface	57
À Retenir		59
Exercices		61
III Efforts dans les milieux continus		65
8 Définitions		67
8.1	Forces	67

8.2	Vecteur-contrainte et tenseur des contraintes	68
8.2.1	Contrainte de Cauchy	68
8.2.2	Autre écriture du tenseur des contraintes	68
9	Équilibre	70
9.1	Le Principe des Puissances Virtuelles (Germain 1972)	70
9.1.1	Puissance virtuelle des efforts intérieurs	70
9.1.2	Puissance virtuelle des efforts extérieurs	72
9.1.3	Application du Principe des Puissances Virtuelles	72
9.1.4	Équilibre	73
9.2	Autre présentation: Principe fondamental de la dynamique	75
10	Quelques propriétés du tenseur des contraintes	77
10.1	Symétrie du tenseur des contraintes	77
10.2	Contrainte normale et contrainte tangentielle	78
10.3	Directions principales, contraintes principales	79
10.4	Invariants	79
10.5	Cercles de Mohr	79
	À Retenir	83
	Exercices	85
IV	Élasticité	90
11	Approche expérimentale: essai de traction	93
12	Loi de comportement élastique linéaire (en HPP)	95
12.1	Forme générale	95
12.2	Matériau élastique homogène isotrope	95
12.3	Matériau élastique homogène orthotrope	96
12.4	Matériau élastique homogène isotrope transverse	97
12.5	Caractéristiques de quelques matériaux	97
12.6	Critères de limite d'élasticité	98
12.6.1	Critère de Tresca	98
12.6.2	Critère de Von-Mises	99
12.6.3	6.3 Critère de Hill	99
13	Le problème d'élasticité	100
13.1	Écriture générale	100
13.2	Formulation en déplacement	100
13.3	Formulation en contrainte	101
13.4	Théorème de superposition	101

13.5	Élasticité plane	101
13.5.1	Contraintes planes	101
13.5.2	Déformations planes	102
13.6	Thermoélasticité	104
13.6.1	Thermodynamique : équations de bilan	104
13.6.2	Équation de la chaleur	105
13.6.3	Loi de comportement thermo-élastique	107
	À Retenir	108
	Exercices	110
V	Introduction à la mécanique des fluides	118
14	Loi de comportement en mécanique des fluides	120
15	Navier-Stokes	122
16	Exemple : Écoulement de Couette-Poiseuille plan	124
	Références	126

Préface

Le cours de mécanique des milieux continus présenté ici est destiné aux étudiants de première année du cycle ingénieur de [SeaTech](#). La mécanique des milieux continus est une matière fondamentale pour les ingénieurs, car elle est à la base de toute modélisation en ingénierie mécanique. En effet, on y développe les notions qui permettent de décrire la cinématique des milieux déformables, ainsi que les efforts auxquels ils sont soumis. Les grandes lois de bilan (masse, quantité de mouvement, énergie) qui y sont présentées sont à la base des modèles utilisés en ingénierie.

Il existe de nombreuses façons d'aborder cet enseignement, par une approche très théorique et mathématique, par une approche orientée mécanique du solide et matériaux ou par une approche orientée mécanique des fluides. On trouvera aisément de nombreux ouvrages ou cours en ligne de mécanique des milieux continus, complets et détaillés. Si je ne devais en recommander qu'un seul, ce serait le cours de [Jean Coirier](#) qui est complet et d'une pédagogie remarquable.

Le cours qui est présenté ici, est en fait un compromis qui s'est élaboré au fil des années. Dans le temps restreint qui est imparti, il est donc nécessaire de poser les notions fondamentales de la mécanique des milieux continus, en mettant en exergue les outils nécessaires à la compréhension des modèles qui seront utilisés ultérieurement. De ce compromis, il en résulte une présentation parfois incomplète, c'est pourquoi j'encourage les étudiants qui le souhaite à approfondir ces notions. Bien qu'une partie non-négligeable des étudiants de première année d'école d'ingénieur n'en soient pas convaincus, un ingénieur est un scientifique ;-). C'est pourquoi, en particulier dans l'utilisation des notations tensorielles, on cherchera à appréhender (simplement) les outils nécessaires à la manipulation des équations différentielles de la physique. Enfin, afin de pouvoir rapidement et concrètement appliquer les notions abordées en travaux dirigés, et comme un cours de mécanique des fluides est enseigné par ailleurs en première année, nous introduirons la loi de comportement de l'élasticité linéaire.

! Remarque

Ce support de cours a été élaboré, modifié, complété à partir des cours que j'ai suivis durant ma formation d'ingénieur, de mes lectures et de mes échanges avec les collègues. Les énoncés des exercices que je propose sont librement inspirés ou tirés d'ouvrages classiques ou de cours en ligne. Si vous estimez être le propriétaire d'une partie de l'un de ces documents, n'hésitez pas à me contacter par courrier électronique et je vous en

attribuerai la paternité.

! Après quelques hésitations, j'ai décidé de le publier ce cours sous licence libre, afin de le rendre accessible.

Ce support de cours est publié sous licence [Creative Commons Attribution - Utilisation non commerciale 4.0 International](#). Vous êtes libre de le partager et de l'adapter, à condition de me citer comme auteur et de ne pas en faire un usage commercial.

 Quarto

Ce document a été rédigé en utilisant le langage de balisage [Quarto](#), qui permet de produire des documents au format HTML, PDF, Word, ... à partir d'un même fichier source. Il est donc possible de le lire en ligne ou de le télécharger au format PDF.

Introduction



Figure 1: Pour voir la vidéo issue de <https://www.youtube.com/watch?v=D2dv57CpT-s>

Pour illustrer ce premier cours à SeaTech, j'ai pour habitude de montrer une vidéo montrant d'énormes vagues s'abattant sur une plate-forme pétrolière en mer du Nord (Figure 1). Comment concevoir de telles structures ? Quelle responsabilité de concevoir de telles structures ! Le problème est complexe et sa modélisation fait appel à de nombreux concepts, résistance des matériaux, hydrodynamique, interaction fluide-structure, etc ... L'ingénierie est multidisciplinaire et s'appuie sur des bases scientifiques solides. Toute modélisation en mécanique, que ce soit en thermo-mécanique des fluides ou des solides, s'appuie sur des notions de base qui sont développées dans le cours de *Mécanique des Milieux Continus*.

Part I

Notations tensorielles

Ce chapitre est consacré au rappel ou à la présentation des notations tensorielles et vectorielles. Nous allons introduire les notations de base, puis nous allons aborder les opérations sur les tenseurs et les vecteurs. Il ne s'agit pas à proprement parlé de mécanique des milieux continus, mais des outils nécessaires à sa formulation.

! Remarque

L'objectif de ce chapitre, est de familiariser les étudiants avec les notations tensorielles. Afin d'en simplifier le contenu, nous ne considérerons que des **bases orthonormées**. Nous nous attacherons à présenter simplement les notions nécessaires à la manipulation d'entités (scalaire, vecteur, tenseur, ...) utilisées en mécanique des milieux continus. Privilégiant le côté "pratique", nous prendrons certainement quelques libertés de formulation. En conséquence, en complément de cette approche "ingénieur", le lecteur pourra se référer à des ouvrages d'algèbre et analyse tensorielle pour une approche complète et mathématiquement rigoureuse.

Ainsi nous vous conseillons par exemple la lecture du cours de [Jean Garrigues](#) ou les ouvrages de Samuel Forest (Forest and Amestoy (2022)), Jean Salençon (Salençon (2005)) ou encore Jean Coirier (Coirier and Nadot-Martin (2020)).

Par ailleurs, non seulement la maîtrise des notations indicielles permet de retrouver aisément la plupart des formules ou opérateurs différentiels utilisés, mais elle s'avère une écriture naturelle, en mathématique appliquée et algorithmique, pour développer des codes de calcul en mécanique.

1 Vecteurs et tenseurs

1.1 Notations

1.1.1 Vecteur

Dans un espace euclidien \mathcal{E} à trois dimensions, soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée. Un vecteur \vec{V} est représenté par ses composantes V_1, V_2, V_3 dans cette base

$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i\vec{e}_i.$$

Convention d'Einstein

En utilisant la *convention de sommation*, ou *convention d'Einstein*, on écrit de façon simplifiée :

$$\vec{V} = V_i\vec{e}_i \quad (1.1)$$

où, chaque fois qu'un indice est répété, il convient de faire varier cet indice de 1 à 3 et de faire la sommation sur les termes correspondants. Dans l'expression précédente, l'indice "i" est un indice muet, c'est-à-dire $V_i\vec{e}_i = V_k\vec{e}_k = V_*\vec{e}_*$.

En notation vectorielle on écrira parfois:

$$\vec{V} = \{\vec{V}\} = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \right\}$$

et le vecteur transposé

$$\vec{V}^T = \{\vec{V}\}^T = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$$

1.1.2 Application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E}

Soit A une application linéaire, dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Cette application est représentée par une matrice 3×3 notée $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

où A_{ij} sont les coefficients de la matrice. Si \vec{W} est un vecteur tel que $\vec{W} = A\vec{V}$, alors les composantes de \vec{W} sont données par :

$$\begin{cases} W_1 = A_{11}V_1 + A_{12}V_2 + A_{13}V_3 \\ W_2 = A_{21}V_1 + A_{22}V_2 + A_{23}V_3 \\ W_3 = A_{31}V_1 + A_{32}V_2 + A_{33}V_3 \end{cases}$$

et en utilisant les conventions de sommation Equation 1.1,

$$W_i \vec{e}_i = A_{ij} V_j \vec{e}_i$$

et en notation vectorielle

$$\{W\} = [A] \{V\}$$

Symboles de Kronecker

On définit les symboles de Kronecker par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.2)$$

En particulier l'application identité \vec{I} est représentée par la matrice

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La composition de deux applications linéaires se traduit par le produit de leur matrice représentative, c'est-à-dire

$$C = A \circ B \text{ ou encore } [C] = [A][B]$$

et en notation indicielle, chaque composante de C est donnée par :

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

1.1.3 Formes bilinéaires

Soit A une forme bilinéaire sur \mathcal{E} , c'est-à-dire une application bilinéaire de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans \mathbb{R} . Dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ elle est représentée par une matrice telle que

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij} V_i W_j$$

ou en notation matricielle

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = \langle \vec{V} \rangle [A] \{ \vec{W} \}$$

En particulier, la forme bilinéaire représentée dans toute base par les symboles de Kronecker est le produit scalaire. Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est une base orthonormée, alors

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

et le produit scalaire de deux vecteurs est donné par

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \langle \vec{V} \rangle \{ \vec{W} \} = V_i \vec{e}_i \cdot W_j \vec{e}_j = V_i W_j \delta_{ij} = V_i W_i$$

1.1.4 Tenseurs

1.1.4.1 Tenseur du second ordre

 Définition: Tenseur du second ordre

Un tenseur du second ordre T est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{V} de l'espace euclidien un vecteur \vec{W} de ce même espace.

$$\vec{W} = T(\vec{V})$$

Cet opérateur peut être représenté par une matrice 3x3, notée $[T]$ ou $\overline{\overline{T}}$ ou $\overline{\overline{T}}$, telle que

$$W_i \vec{e}_i = T_{ij} V_j \vec{e}_i$$

ou en notation matricielle

$$\{ \vec{W} \} = \overline{\overline{T}} \{ \vec{V} \}$$

ou

$$\vec{W} = \overline{\overline{T}} \vec{V}$$

- Un tenseur du deuxième ordre est dit **symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$

- Un tenseur du deuxième ordre est dit **antisymétrique** si $T_{ij} = -T_{ji}$
- Un tenseur du deuxième ordre est dit **isotrope** si $T_{ij} = t \delta_{ij}$
- On peut toujours décomposer un tenseur du deuxième ordre en une partie symétrique et antisymétrique $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}^S + \overline{\overline{T}}^A$ ou $T_{ij} = T_{ij}^S + T_{ij}^A$ avec $T_{ij}^S = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ et $T_{ij}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$

1.1.4.2 Tenseur d'ordre supérieur

On peut définir un vecteur \vec{V} par ses composantes V_i , ou par les coefficients de la forme linéaire $\vec{X} \rightarrow \vec{X} \cdot \vec{V} = X_i V_i$, **car la base choisie est orthonormée** (voir les notions de vecteurs covariants et contravariants, par exemple dans Forest and Amestoy (2022)).

On peut alors considérer le vecteur comme un tenseur du premier ordre.

De même, une fonction scalaire peut être considérée comme un tenseur d'ordre zéro.

Un tenseur du troisième ordre $\overline{\overline{\overline{S}}}$ est un opérateur linéaire qui, à tout vecteur \vec{Z} fait correspondre un tenseur du second ordre $\overline{\overline{T}}$.

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{\overline{S}}}(\vec{Z}) \quad \text{ou encore} \quad T_{ij} = S_{ijk} Z_k$$

1.1.4.3 Produit tensoriel

On définit le produit tensoriel du vecteur \vec{U} par le vecteur \vec{V} , noté $\vec{U} \otimes \vec{V}$, comme le tenseur d'ordre deux, défini par la forme bilinéaire qui aux vecteurs \vec{X} et \vec{Y} fait correspondre $(\vec{U} \cdot \vec{X})(\vec{V} \cdot \vec{Y})$

Les 9 produits tensoriels $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ définissent une base de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre

deux. En effet, $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ... etc ... si bien que l'on peut

écrire un tenseur $\overline{\overline{T}}$ comme

$$\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \tag{1.3}$$

D'où, le,

🔥 Produit tensoriel de deux vecteurs

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Le produit tensoriel d'un tenseur d'ordre p et d'un tenseur d'ordre q est un tenseur d'ordre $p + q$. Par exemple, le produit tensoriel d'un tenseur $\overline{\overline{T}}$ d'ordre 2 et d'un tenseur \overline{U} d'ordre 1 est un tenseur $\overline{\overline{S}}$ d'ordre 3,

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{T}} \otimes \overline{U} = T_{ij} U_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k .$$

1.1.4.4 Contraction et produit contracté

Abordons cette notion par l'exemple. La contraction est une opération connue que l'on généralise en l'appliquant à des tenseurs. Considérons le produit **contracté** de deux vecteurs \overline{U} et \overline{V} , noté $\overline{U} \cdot \overline{V}$. En notation indicielle, on a

$$\overline{U} \cdot \overline{V} = (U_i \vec{e}_i) \cdot (V_j \vec{e}_j) = U_i V_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

La **contraction** revient alors à considérer le terme $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ et à le remplacer par le symbole de Kronecker δ_{ij} , si bien que

$$\overline{U} \cdot \overline{V} = U_i V_j \delta_{ij} = U_i V_i$$

Le produit **contracté** de deux vecteurs est donc un scalaire, ou encore la contraction de deux vecteurs revient à “faire” le produit scalaire “habituel”.

Considérons, maintenant, le produit **contracté** d'un tenseur d'ordre 2 $\overline{\overline{T}}$ et d'un tenseur d'ordre 1 \overline{U} .

$$\overline{\overline{T}} \cdot \overline{U} = (T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (U_k \vec{e}_k) = T_{ij} U_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = T_{ij} U_j \vec{e}_i$$

le produit **contracté** d'un tenseur d'ordre 2 et d'un tenseur d'ordre 1 est donc un tenseur d'ordre 1. Cela revient à faire “un produit matrice-vecteur”. Dans l'expression précédente, on élimine les vecteurs de base autour de l'opérateur de contraction “.” et on *contracte* les indices “j” et “k”.

1.2 Produit tensoriel - cas général

De façon plus générale, le produit contracté d'un tenseur d'ordre p et d'un tenseur d'ordre q est un tenseur d'ordre $p + q - 2$.

Par exemple, le **produit contracté** d'un tenseur d'ordre 4 $\overline{\overline{R}}$ et d'un tenseur d'ordre 3 $\overline{\overline{S}}$ est défini par le tenseur d'ordre 5

$$\begin{aligned}\overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{S}} &= (R_{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \cdot (S_{pqr} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r) \\ &= R_{ijkl} S_{pqr} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \cdot \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r \\ &= R_{ijkm} S_{mqr} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r\end{aligned}$$

Le **produit doublement contracté**, comme son nom l'indique, revient à utiliser le produit contracté deux fois de suite. Il est noté “:” et est défini par le produit de deux tenseurs d'ordre p et q qui donne un tenseur d'ordre $p + q - 4$.

🔥 Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2

Ainsi, le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{B}}$ est un scalaire:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} &= (A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) : (B_{pq} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q) \\ &= A_{ij} B_{pq} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j : \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \\ &= A_{ij} B_{jq} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_q \\ &= A_{ij} B_{ji}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Le **produit doublement contracté** d'un tenseur d'ordre 4 $\overline{\overline{R}}$ et d'un tenseur d'ordre 3 $\overline{\overline{S}}$ est défini par le tenseur d'ordre 3

$$\begin{aligned}\overline{\overline{R}} : \overline{\overline{S}} &= (R_{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) : (S_{pqr} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r) \\ &= R_{ijkl} S_{pqr} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l : \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r \\ &= R_{ijkm} S_{mqr} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \cdot \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r \\ &= R_{ijkm} S_{mkr} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_r\end{aligned}$$

1.3 Changement de repère

1.3.1 Matrice de passage

Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée et $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ une autre base orthonormée.

On définit la matrice de passage Q telle que:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= Q_{11}\vec{e}_1 + Q_{12}\vec{e}_2 + Q_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= Q_{21}\vec{e}_1 + Q_{22}\vec{e}_2 + Q_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= Q_{31}\vec{e}_1 + Q_{32}\vec{e}_2 + Q_{33}\vec{e}_3\end{aligned}$$

ou encore, en notations indicielles

$$\vec{e}'_i = Q_{ij}\vec{e}_j$$

et en notation matricielle

$$\{\vec{e}'\} = [Q] \{\vec{e}\}$$

Les deux bases étant orthonormées, on doit avoir

$$\delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = Q_{ik} \vec{e}_k \cdot Q_{jl} \vec{e}_l = Q_{ik} Q_{jl} \delta_{kl} = Q_{ik} Q_{jk}$$

ce qui montre que la matrice inverse de Q est Q^T . En particulier on tire la relation inverse:

$$\vec{e}_i = Q_{ji}\vec{e}'_j$$

1.3.2 Changement de repère: Vecteurs

Soit \vec{V} un vecteur de composantes V_i dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et V'_i dans la base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V'_i \vec{e}'_i$$

En utilisant la matrice de passage

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V_i Q_{ki} \vec{e}'_k$$

soit

$$V'_k = V_i Q_{ki} \quad \text{et} \quad V_k = V'_i Q_{ik}$$

ou encore, en notation matricielle

$$\{\vec{V}'\} = [Q] \{\vec{V}\} \quad \text{et} \quad \{\vec{V}\} = [Q]^T \{\vec{V}'\}$$

Remarque : le produit scalaire est un invariant, c'est à dire que cette fonction est indépendante du repère choisi.

En notation indicielle

$$\vec{V}' \cdot \vec{W}' = V'_k W'_k = V_i Q_{ki} W_j Q_{kj} = \delta_{ij} V_i W_j = V_i W_i = \vec{V} \cdot \vec{W}$$

et en notation matricielle

$$\begin{aligned} \vec{V}' \cdot \vec{W}' &= \langle \vec{V}' \rangle \{\vec{W}'\} = ([Q] \{\vec{V}\})^T [Q] \{\vec{W}\} \\ &= \langle \vec{V} \rangle [Q]^T [Q] \{\vec{W}\} = \langle \vec{V} \rangle \{\vec{W}\} = \vec{V} \cdot \vec{W} \end{aligned}$$

1.3.3 Changement de repère: Application linéaire

Soit A une application linéaire, de composantes A_{ij} dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. et A'_{ij} dans la base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

En notation indicielle

$$W'_i = A'_{ik} V'_k = Q_{ij} W_j = Q_{ij} A_{jm} V_m = Q_{ij} A_{jm} Q_{km} V'_k$$

d'où

$$A'_{ik} = Q_{ij} A_{jm} Q_{km}$$

et en notation matricielle

$$\{\vec{W}'\} = [A'] \{\vec{V}'\} = [Q] \{\vec{W}\} = [Q] [A] \{\vec{V}\} = [Q] [A] [Q]^T \{\vec{V}'\}$$

soit

$$[A'] = [Q] [A] [Q]^T$$

1.3.4 Changement de repère: Forme bilinéaire

Soit A une application linéaire, de composantes A_{ij} dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. et A'_{ij} dans la base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij} V_i W_j = A'_{ij} V'_i W'_j = A_{ij} Q_{ki} V'_k Q_{mj} W'_m$$

soit

$$A'_{km} = A_{ij} Q_{ki} Q_{mj}$$

et en notation matricielle

$$\begin{aligned} A(\vec{V}, \vec{W}) &= \langle \vec{V} \rangle [A] \{ \vec{W} \} = \langle \vec{V}' \rangle [A'] \{ \vec{W}' \} = \\ &= ([Q]^T \{ \vec{V}' \})^T [A] [Q]^T \{ \vec{W}' \} = \langle \vec{V}' \rangle [Q] [A] [Q]^T \{ \vec{W}' \} \end{aligned}$$

soit

$$[A'] = [Q] [A] [Q]^T$$

1.3.5 Changement de repère: Tenseur d'ordre 2

Soit $\bar{\bar{T}}$ un tenseur d'ordre 2, en notation indicielle

$$\bar{\bar{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T'_{ij} \vec{e}'_i \otimes \vec{e}'_j = T_{ij} Q_{ki} \vec{e}'_k \otimes Q_{mj} \vec{e}'_m = T_{ij} Q_{ki} Q_{mj} \vec{e}'_k \otimes \vec{e}'_m$$

puis

$$T'_{km} = T_{ij} Q_{ki} Q_{mj}$$

2 Calcul vectoriel

2.1 Les symboles de permutation

🔥 Symboles de permutation ou tenseur d'ordre 3 de Levi-Civita

On introduit les symboles de permutation

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k)=(1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i,j,k)=(2,1,3), (1,3,2) \text{ ou } (3,2,1) \\ 0 & \text{si deux indices sont répétés} \end{cases} \quad (2.1)$$

Ces symboles représentent le produit mixte des vecteurs de base

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k$$

Donc en particulier $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$, mais $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$.

ε_{ijk} sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre, qui représente, par exemple, la forme trilinéaire produit mixte:

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \varepsilon_{ijk} U_i V_j W_k$$

Avec un peu de patience on peut démontrer les résultats suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \text{Det} \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

2.2 Déterminant d'une matrice

Les symboles de permutation permettent le calcul du déterminant d'une matrice par

$$\varepsilon_{ijk} \text{Det}(A) = \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp} \quad (2.3)$$

ou encore

$$\text{Det}(A) = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp}$$

On peut également déterminer l'inverse d'une matrice

$$B = A^{-1} \quad \text{et} \quad B_{ji} = \frac{1}{2\text{Det}(A)} \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jpk} A_{mp} A_{nq}$$

2.3 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre sont obtenues par la résolution de l'équation caractéristique

$$P(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I)$$

soit en développant

$$\frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} (A_{im} - \lambda \delta_{im})(A_{jn} - \lambda \delta_{jn})(A_{kp} - \lambda \delta_{kp}) = 0$$

ou encore

$$P(\lambda) = I_3 - \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3$$

avec

$$\begin{cases} I_3 = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp} = \text{Det}(A) \\ I_2 = \frac{1}{2} (A_{ii} A_{jj} - A_{ij} A_{ji}) = \frac{1}{2} ((\text{Tr } A)^2 - \text{Tr } A^2) \\ I_1 = A_{ii} = \text{Tr } A \end{cases}$$

I_1, I_2, I_3 sont appelés les invariants fondamentaux du tenseur A .

2.4 Adjoint d'un tenseur antisymétrique

Soit Ω un tenseur antisymétrique

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

on peut également lui associer le vecteur

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{Bmatrix}$$

soit

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est le vecteur adjoint du tenseur antisymétrique Ω . En notation indicielle on a :

$$\begin{cases} \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \\ \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} \end{cases}$$

2.5 Produit vectoriel

 Le produit vectoriel

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

s'écrit en notation indicielle

$$c_i \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i \quad (2.4)$$

On peut montrer que



$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

D'après Equation 2.4, on a

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

et

$$\vec{d} \wedge \vec{c} = \varepsilon_{pqr} d_q c_r \vec{e}_p$$

On remplace la $q^{\text{ième}}$ composante de \vec{d} par la $q^{\text{ième}}$ composante de $\vec{a} \wedge \vec{b}$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \varepsilon_{pqr} (\varepsilon_{qjk} a_j b_k) c_r \vec{e}_p$$

Par ailleurs, par définition $\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{qrp}$, donc

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \varepsilon_{qrp} \varepsilon_{qjk} a_j b_k c_r \vec{e}_p$$

or, d'après Equation 5.1, $\varepsilon_{qrp} \varepsilon_{qjk} = \delta_{rj} \delta_{pk} - \delta_{rk} \delta_{pj}$, donc

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \delta_{rj} \delta_{pk} a_j b_k c_r \vec{e}_p - \delta_{rk} \delta_{pj} a_j b_k c_r \vec{e}_p$$

et finalement en simplifiant les symboles de Kronecker

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = a_j b_k c_j \vec{e}_k - a_j b_k c_k \vec{e}_j$$

soit

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$



$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Soient \vec{u} et \vec{v} , deux vecteurs tels que, en utilisant Equation 2.4,

$$\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

$$\vec{v} = \vec{c} \wedge \vec{d} = \varepsilon_{pqr} c_q d_r \vec{e}_p$$

et le produit scalaire de ces deux vecteurs

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i$$

donc

$$\begin{aligned}(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= (\varepsilon_{ijk} a_j b_k) (\varepsilon_{iqr} c_q d_r) \\(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= \delta_{jq} \delta_{kr} a_j b_k c_q d_r - \delta_{jr} \delta_{kq} a_j b_k c_q d_r\end{aligned}$$

soit après simplification des symboles de Kronecker

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = a_j b_k c_j d_k - a_j b_k c_k d_j$$

c'est-à-dire

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

3 Analyse vectorielle

3.1 Généralités

! Important

On note d'une virgule la dérivée partielle, soit $,i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Les opérateurs exposés dans cette partie seront exprimés dans un repère cartésien orthonormé.

🔥 L'opérateur divergence

L'opérateur divergence appliqué à un tenseur quelconque “ \star ” d'ordre $p > 1$ donne un tenseur d'ordre $p - 1$.

$$Div(\star) = \nabla \cdot (\star) = \nabla(\star) : \bar{\bar{I}} = (\star)_{,i} \cdot \vec{e}_i \quad (3.1)$$

🔥 L'opérateur gradient

L'opérateur gradient appliqué à un tenseur quelconque “ \star ” d'ordre p donne un tenseur d'ordre $p + 1$.

$$\nabla(\star) = (\star)_{,i} \otimes \vec{e}_i \quad (3.2)$$

3.2 Quelques opérateurs usuels

* Soit f une fonction scalaire

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = f_{,i} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array} \right\}$$

Le laplacien d'une fonction scalaire est un scalaire

$$\Delta f = f_{,ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

*** Soit \vec{v} un vecteur**

La divergence d'un vecteur est un scalaire

$$\text{Div } \vec{v} = v_{,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur

$$\text{rot } \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{array} \right\}$$

Le gradient d'un vecteur est une matrice

$$\nabla \vec{v} = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{array} \right]$$

Le laplacien d'un vecteur est un vecteur

$$\Delta \vec{v} = v_{i,jj} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{array} \right\}$$

* Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur du second ordre

La divergence d'un tenseur est un vecteur

$$Div \overline{\overline{T}} = T_{ij,j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right\}$$

* Quelques formules utiles



$$Div (f \vec{a}) = f Div \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f$$

$$Div (f \vec{a}) = (f a_i)_{,i} = f_{,i} a_i + f a_{i,i} = \nabla f \cdot \vec{a} + f \nabla \cdot \vec{a}$$



$$Div (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot rot \vec{a} - \vec{a} \cdot rot \vec{b}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

$$\begin{aligned} div (\vec{a} \wedge \vec{b}) &= (\varepsilon_{ijk} a_j b_k)_{,i} \\ &= \varepsilon_{ijk} a_{j,i} b_k + \varepsilon_{ijk} a_j b_{k,i} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$rot \vec{a} = \varepsilon_{pqr} a_{r,q} \vec{e}_p$$

et

$$\vec{b} \cdot rot \vec{a} = \varepsilon_{pqr} a_{r,q} b_p$$

soit en échangeant les indices p et k , q et i , r et j et en utilisant les propriétés du produit mixte

$$\vec{b} \cdot rot \vec{a} = \varepsilon_{kij} a_{j,i} b_k = \varepsilon_{ijk} a_{j,i} b_k$$

En utilisant les calculs déjà faits

$$\vec{a} \cdot rot \vec{b} = \varepsilon_{pqr} b_{r,q} a_p$$

soit en échangeant les indices q et i , r et k , p et j et en utilisant les propriétés du produit mixte

$$\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b} = \varepsilon_{jik} b_{k,i} a_j = -\varepsilon_{ijk} b_{k,i} a_j$$

c'est-à-dire

$$\text{Div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}$$



$$\text{Div}(\text{rot } \vec{a}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{a} = \varepsilon_{ijk} a_{k,j} \vec{e}_i$$

$$\text{Div}(\text{rot } \vec{a}) = (\varepsilon_{ijk} a_{k,j})_{,i} = \varepsilon_{ijk} a_{k,j} = -\varepsilon_{jik} a_{k,j}$$

donc

$$\text{Div}(\text{rot } \vec{a}) = -\text{Div}(\text{rot } \vec{a})$$

c'est-à-dire

$$\text{Div}(\text{rot } \vec{a}) = 0$$



$$\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$$

$$\nabla f = f_{,i} \vec{e}_i$$

$$\text{rot}(\nabla f) = \varepsilon_{ijk} f_{,kj} \vec{e}_i = -\varepsilon_{ikj} f_{,jk} \vec{e}_i = \vec{0}$$



$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f$$

$$\nabla(fg) = (fg)_{,i} \vec{e}_i = f_{,i} g \vec{e}_i + f g_{,i} \vec{e}_i = \nabla f g + f \nabla g$$



$$\text{rot}(f \vec{a}) = f \text{rot} \vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(f \vec{a}) &= \varepsilon_{ijk} (f a_k)_{,j} \vec{e}_i \\ &= \varepsilon_{ijk} f_{,j} a_k \vec{e}_i + \varepsilon_{ijk} f a_{k,j} \vec{e}_i \\ &= \nabla f \wedge \vec{a} + f \text{rot} \vec{a} \end{aligned}$$



$$\text{Div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f$$

$$\begin{aligned} \nabla f &= f_{,i} \vec{e}_i \\ \text{Div}(\nabla f) &= (f_{,i})_{,i} = f_{,ii} = \Delta f \end{aligned}$$



$$\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{Div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{a} &= \varepsilon_{ijk} a_{k,j} \vec{e}_i \\ \text{rot} \vec{b} &= \varepsilon_{pqr} b_{r,q} \vec{e}_p \\ \text{rot}(\text{rot} \vec{a}) &= \varepsilon_{pqr} (\varepsilon_{rjk} a_{k,j})_{,q} \vec{e}_p \\ &= \varepsilon_{rpq} \varepsilon_{rjk} a_{k,jq} \vec{e}_p \\ &= \delta_{pj} \delta_{kq} a_{k,jq} \vec{e}_p - \delta_{pk} \delta_{jq} a_{k,jq} \vec{e}_p \\ &= a_{k,jk} \vec{e}_j - a_{k,jj} \vec{e}_k \\ &= \nabla(\text{Div} \vec{a}) - \Delta \vec{a} \end{aligned}$$

3.3 Transformation d'intégrales

Soit Ω un domaine borné et $\partial\Omega$ sa frontière, de normale \vec{n} .

Soit φ une fonction scalaire, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \varphi \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi dV$$

Soit \vec{A} un vecteur, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \text{Div}(\vec{A}) \, dV$$

Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur d'ordre 2, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \text{Div}(\overline{\overline{T}}) \, dV$$

Soit $\partial\Omega$ un domaine plan de normale \vec{n} , de frontière Γ . Soit \vec{U} un vecteur défini sur ce domaine. Si $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à Γ , alors

$$\iint_{\partial\Omega} \text{rot}(\vec{U}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Gamma} \vec{U} \cdot \vec{\tau} \, dl$$

Tous ces résultats sont issus du théorème de la divergence

$$\iint_{\partial\Omega} t_{jkl} n_l \, dS = \iiint_{\Omega} t_{jkl,l} \, dV$$

4 Formulaire

4.1 Coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i = f_{,i} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right\}$$

et

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = f_{,jj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

* Soit $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ un vecteur, alors

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right]$$

et

$$\text{div} \vec{v} = v_{i,i} = \text{Tr}(\nabla \vec{v}) = \nabla \vec{v} : \vec{I} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{v} = \text{div}(\nabla \vec{v}) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \vec{e}_i = v_{i,jj} \vec{e}_i = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

$$\text{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{array} \right\} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \vec{e}_i$$

* Soit $\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$ un tenseur du deuxième ordre, alors:

$$\text{div}(\overline{\overline{T}}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i = T_{ij,j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{array} \right\}$$

et

$$\Delta \overline{\overline{T}} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T_{ij,kk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \Delta T_{xx} & \Delta T_{xy} & \Delta T_{xz} \\ \Delta T_{yx} & \Delta T_{yy} & \Delta T_{yz} \\ \Delta T_{zx} & \Delta T_{zy} & \Delta T_{zz} \end{bmatrix}$$

4.2 Coordonnées cylindriques

$$\overline{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \overline{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$d\overline{OM} = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_z dz$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0 \end{array}$$

* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overline{\text{grad}}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

et

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

* Soit $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$ un vecteur, alors

$$\nabla(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et

$$\text{div} \vec{v} = \text{Tr}(\nabla \vec{v}) = \nabla \vec{v} : \vec{I} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{v} = \text{div}(\nabla \vec{v}) = \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta + \Delta v_z \vec{e}_z$$

$$\text{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{array} \right\}$$

* Soit $\vec{\vec{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$ un tenseur du deuxième ordre, alors:

$$\text{div}(\vec{\vec{T}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{T_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{array} \right\}$$

4.3 Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \vec{e}_\theta, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{e}_r, & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \sin \theta \vec{e}_\varphi, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta \vec{e}_\varphi, & \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= \sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \nabla f = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right\}$$

et

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

* Soit $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$ un vecteur, alors

$$\nabla \vec{v} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \cot \theta v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta v_\theta + v_r \right) \end{array} \right]$$

et

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \vec{v} : \vec{I} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{v_\theta}{r}$$

$$\Delta \vec{v} = \text{div}(\nabla \vec{v}) = \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left(v_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \end{array} \right\}$$

$$\text{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta v_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{array} \right\}$$

* Soit $\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$\text{div}(\bar{\bar{T}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cot \theta) \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3T_{r\theta}) \\ \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{\theta\varphi} \cot \theta + 3T_{r\varphi}) \end{array} \right\}$$

4.4 Comment retrouver les formules

Nous nous plaçons par exemple en coordonnées cylindriques. On note

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z = v_i \vec{e}_i \text{ avec } i = r, \theta, z \text{ et } ,i = \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}$$

Donc, avec cette convention

$$\vec{e}_{r,\theta} = \frac{\vec{e}_\theta}{r} \text{ et } \vec{e}_{\theta,\theta} = -\frac{\vec{e}_r}{r}$$

Chercher le gradient d'un tenseur consiste à augmenter l'ordre de ce tenseur, donc en appliquant Equation 3.2, on obtient:

$$\nabla \vec{v} = (v_i \vec{e}_i)_{,j} \otimes \vec{e}_j .$$

On peut alors développer, mais sans oublier de dériver les vecteurs de base, car nous sommes dans un système de coordonnées cylindrique,

$$\begin{aligned}
\nabla \vec{v} &= v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + v_i \vec{e}_{i,j} \otimes \vec{e}_j = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + v_i \vec{e}_{i,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\
&= v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + v_r \vec{e}_{r,\theta} \otimes \vec{e}_\theta + v_\theta \vec{e}_{\theta,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\
&= v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \frac{v_r}{r} \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta - \frac{v_\theta}{r} \vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'opérateur divergence, il suffit de contracter doublement avec le tenseur unité d'ordre 2, comme décrit par Equation 3.1 soit dans le cas d'un vecteur:

$$div \vec{v} = \nabla(\vec{v}) : \bar{\bar{I}} = v_{i,i} + \frac{v_r}{r} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

et donc l'opérateur Laplacien pour un scalaire

$$\Delta \phi = div(\nabla \phi) = \phi_{,ii} + \frac{\phi_{,r}}{r} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Appliquons maintenant cette méthodologie à un tenseur d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\nabla \bar{\bar{T}} &= (T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)_{,k} \otimes \vec{e}_k \\
&= T_{ij,k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + T_{ij} \vec{e}_{i,k} \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j,k} \otimes \vec{e}_k \\
&= T_{ij,k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + T_{ij} \vec{e}_{i,\theta} \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\theta + T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\
&= T_{ij,k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + \frac{T_{rj}}{r} \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\theta - \frac{T_{\theta j}}{r} \vec{e}_r \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\theta \\
&\quad + \frac{T_{ir}}{r} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta - \frac{T_{i\theta}}{r} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

Pour obtenir la trace de ce tenseur d'ordre 3 on contracte les deux derniers indices:

$$\begin{aligned}
div \bar{\bar{T}} = \nabla \bar{\bar{T}} : \bar{\bar{I}} &= T_{ij,j} \vec{e}_i + \frac{T_{r\theta}}{r} \vec{e}_\theta - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \vec{e}_r + \frac{T_{ir}}{r} \vec{e}_i \\
&= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} + \frac{T_{rr}}{r} \right) \vec{e}_r \\
&\quad + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{T_{\theta r}}{r} \right) \vec{e}_\theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \vec{e}_z
\end{aligned}$$

On peut donc maintenant retrouver l'opérateur Laplacien d'un vecteur :

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{v} &= div(\nabla \vec{v}) \\
&= v_{i,jj} + \frac{v_{r,\theta}}{r} \vec{e}_\theta - \frac{v_{\theta,\theta}}{r} \vec{e}_r + \frac{v_{r,\theta} - \frac{v_\theta}{r}}{r} \vec{e}_\theta - \frac{v_{\theta,\theta} + \frac{v_r}{r}}{r} \vec{e}_r + \frac{v_{i,r}}{r} \vec{e}_i \\
&= \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta + \Delta v_z \vec{e}_z
\end{aligned}$$

À Retenir

! “On ne mélange pas les torchons et les serviettes!”

Lorsque l'on manipule des formules ou des équations, il faut veiller à ce que la dimension des grandeurs de chaque coté de l'égalité soit cohérente!

Convention de sommation

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3 = V_i \vec{e}_i$$

! “Toujours par paire!”

Lorsque l'on utilise les notations indicielles, sauf mention explicite, on utilise toujours les indices par paire. Donc, si dans un produit les indices apparaissent une seule fois ou trois fois ou plus Il y a une erreur.

Symboles de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Produit tensoriel

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

Symboles de permutation

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k)=(1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i,j,k)=(2,1,3), (1,3,2) \text{ ou } (3,2,1) \\ 0 & \text{si deux indices sont répétés} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Produit vectoriel

$$c_i \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

Quelques opérateurs

$$\operatorname{div} \vec{v} = v_{i,i}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \vec{e}_i$$

$$\nabla \vec{v} = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{T}}) = T_{ij,j} \vec{e}_i$$

! “En systèmes de coordonnées cylindrique ou sphérique, il est conseillé d'utiliser un formulaire!”

Exercices

i Exercice Notations 1

Vérifier la relation suivante:

$$\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{ div} \vec{B} - \vec{B} \text{ div} \vec{A} + \nabla \vec{A} \cdot \vec{B} - \nabla \vec{B} \cdot \vec{A}$$

💡 Correction exercice Notations 1

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \varepsilon_{ijk} A_i B_j \vec{e}_k$$

$$\text{rot} \vec{U} = \varepsilon_{pqr} U_{r,q} \vec{e}_p$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \varepsilon_{pqr} (\varepsilon_{ijr} A_i B_j)_{,q} \vec{e}_p \\ &= \varepsilon_{rpq} \varepsilon_{rij} (\varepsilon_{ijr} A_i B_j)_{,q} \vec{e}_p \\ &= (\delta_{pi} \delta_{qj} - \delta_{pj} \delta_{qi}) (A_i B_j)_{,q} \vec{e}_p \\ &= \delta_{pi} \delta_{qj} (A_i B_j)_{,q} \vec{e}_p - \delta_{pj} \delta_{qi} (A_i B_j)_{,q} \vec{e}_p \\ &= (A_i B_j)_{,j} \vec{e}_i - (A_i B_j)_{,i} \vec{e}_j \\ &= A_{i,j} B_j \vec{e}_i + A_i B_{j,j} \vec{e}_i - A_{i,i} B_j \vec{e}_j - A_i B_{j,i} \vec{e}_j \\ &= \nabla \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \text{ div} \vec{B} - \vec{B} \text{ div} \vec{A} - \nabla \vec{B} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

car

$$\nabla \vec{A} = A_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\nabla \vec{A} \cdot \vec{B} = A_{i,j} B_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = A_{i,j} B_j \vec{e}_i$$

i Exercice Notations 2

Vérifier la relation suivante:

$$\text{div}(\vec{A} \vec{u}) = \text{div} \vec{A}^T \cdot \vec{u} + \nabla \vec{u} : \vec{A}$$

💡 Correction exercice Notations 2

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}}\vec{u} &= (A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (u_k \vec{e}_k) = A_{ij} u_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = A_{ij} u_j \vec{e}_i \\ \operatorname{div}(\overline{\overline{A}}\vec{u}) &= (A_{ij} u_j)_i = A_{ij,i} u_j + A_{ij} u_{j,i} \\ \overline{\overline{A}}^T &= A_{pq} \vec{e}_q \otimes \vec{e}_p \\ \operatorname{div} \overline{\overline{A}}^T &= A_{pq,p} \vec{e}_q \\ \operatorname{div} \overline{\overline{A}}^T \cdot \vec{u} &= A_{pq,p} u_q = A_{ij,i} u_j \\ \nabla \vec{u} &= u_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\ \nabla \vec{u} : \overline{\overline{A}} &= u_{i,j} A_{pq} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j : \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q = u_{i,j} A_{jq} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_q = u_{i,j} A_{ji}\end{aligned}$$

📌 Exercice Notations 3

Soient $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2 et $\overline{\overline{\overline{C}}}$ un tenseur d'ordre 4, tels que : $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{\overline{C}}} : \overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{\overline{C}}} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$. où λ et μ sont des constantes.

- 1) Déterminer $\operatorname{Tr} \overline{\overline{B}}$ en fonction de $\operatorname{Tr} \overline{\overline{A}}$.
- 2) Déterminer $\operatorname{Tr} \left(\overline{\overline{B}}^2 \right)$ en fonction de $\left(\operatorname{Tr} \overline{\overline{A}} \right)^2$, $\overline{\overline{A}} : \overline{\overline{A}}$ et $\|\overline{\overline{A}}\|^2$.

💡 Correction exercice Notations 3

1)

$$\begin{aligned}\overline{\overline{B}} &= \overline{\overline{\overline{C}}} : \overline{\overline{A}} = C_{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l : A_{pq} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \\ \overline{\overline{B}} &= \overline{\overline{\overline{C}}} : \overline{\overline{A}} = C_{ijkp} A_{pq} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \cdot \vec{e}_q = C_{ijqp} A_{pq} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\ \operatorname{Tr} \overline{\overline{B}} &= \overline{\overline{B}} : \overline{\overline{I}} = B_{ii} \\ B_{ii} &= C_{iiqp} A_{pq} = (\lambda \delta_{ii} \delta_{qp} + \mu \delta_{iq} \delta_{ip} + \mu \delta_{ip} \delta_{iq}) A_{pq} \\ \operatorname{Tr} \overline{\overline{B}} &= \lambda \delta_{ii} \delta_{qp} A_{pq} + \mu \delta_{iq} \delta_{ip} A_{pq} + \mu \delta_{ip} \delta_{iq} A_{pq}\end{aligned}$$

$$Tr \bar{\bar{B}} = \lambda \delta_{ii} A_{pp} + \mu A_{ii} + \mu A_{ii}$$

$$Tr \bar{\bar{B}} = \lambda 3 Tr \bar{\bar{A}} + \mu Tr \bar{\bar{A}} + \mu Tr \bar{\bar{A}} = (3\lambda + 2\mu) Tr \bar{\bar{A}}$$

2)

$$\bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{B}} = C_{ijkl} A_{lk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot C_{pqmn} A_{nm} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q$$

$$\bar{\bar{B}} \cdot \bar{\bar{B}} = C_{ijkl} C_{jqmn} A_{lk} A_{nm} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_q$$

$$Tr \left(\bar{\bar{B}}^2 \right) = C_{ijkl} C_{jimn} A_{lk} A_{nm}$$

$$\begin{aligned} Tr \left(\bar{\bar{B}}^2 \right) &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} A_{lk} \lambda \delta_{ji} \delta_{mn} A_{mn} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} A_{lk} \mu \delta_{jm} \delta_{in} A_{nm} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} A_{lk} \mu \delta_{im} \delta_{jn} A_{nm} \\ &+ \mu \delta_{ik} \delta_{jl} A_{lk} \lambda \delta_{ji} \delta_{mn} A_{mn} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} A_{lk} \mu \delta_{jm} \delta_{in} A_{nm} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} A_{lk} \mu \delta_{im} \delta_{jn} A_{nm} \\ &+ \mu \delta_{il} \delta_{jk} A_{lk} \lambda \delta_{ji} \delta_{mn} A_{mn} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} A_{lk} \mu \delta_{jm} \delta_{in} A_{nm} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} A_{lk} \mu \delta_{im} \delta_{jn} A_{nm} \\ &= \lambda \delta_{ii} A_{kk} \lambda A_{mm} + \lambda A_{kk} \mu A_{ii} + \lambda A_{kk} \mu A_{ii} \\ &+ \mu A_{ii} \lambda A_{mm} + \mu A_{ji} \mu A_{ij} + \mu A_{ji} \mu A_{ji} \\ &+ \mu A_{ii} \lambda A_{nn} + \mu A_{ij} \mu A_{ij} + \mu A_{ij} \mu A_{ji} \\ &= 3\lambda^2 (A_{kk})^2 + \lambda \mu (A_{kk})^2 + \lambda \mu (A_{kk})^2 \\ &+ \lambda \mu (A_{kk})^2 + \mu^2 A_{ji} A_{ij} + \mu^2 A_{ji} A_{ij} \\ &+ \lambda \mu (A_{kk})^2 + \mu^2 A_{ij} A_{ij} + \mu^2 A_{ji} A_{ij} \\ &= (3\lambda^2 + 4\lambda\mu) \left(Tr \bar{\bar{A}} \right)^2 + 2\mu^2 \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{A}} + 2\mu^2 ||\bar{\bar{A}}||^2 \end{aligned}$$

Part II

Cinématique

Dans ce chapitre, nous allons aborder la cinématique, qui est l'étude du mouvement dans le cadre de milieux déformables. Nous définirons en particulier les notions de variables de Lagrange ou d'Euler, de déformations et les conséquences quant aux lois de bilan.

5 Le mouvement et ses représentations

5.1 Configuration

L'espace physique est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. L'ensemble des particules ou points matériels constituant le milieu continu étudié, occupe à chaque instant t , un ensemble de positions dans l'espace: c'est la **configuration** du système à l'instant t , noté $\bar{\Omega}(t)$ (d'intérieur $\Omega(t)$ et de frontière $\partial\Omega(t)$).

On introduit aussi la notion de **configuration de référence**: c'est la configuration particulière du système à un instant t_0 fixé. Souvent on prendra $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}(0)$, et on parlera alors de **configuration initiale**.

Comme illustré sur Figure 5.1, toute particule M_0 de $\bar{\Omega}_0$ est repérée par son vecteur position $\vec{X}(t)$ dans la configuration de référence. Toute particule M de $\bar{\Omega}(t)$ est repérée par son vecteur position $\vec{x}(t)$ dans la configuration actuelle (à l'instant t).

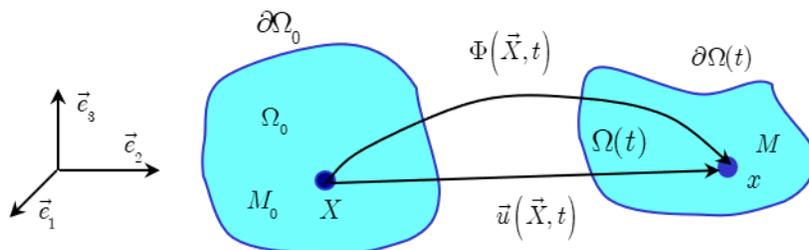


Figure 5.1: Configurations de référence et configuration actuelle

La position de chaque particule M sera donc déterminée si on connaît sa position dans la configuration de référence et une fonction Φ telle que:

$$\vec{x}(t) = \Phi(\vec{X}, t) \quad (5.1)$$

Φ définit le mouvement par rapport à $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On devra donc déterminer trois fonctions scalaires, telles que:

$$\begin{cases} x_1 = \Phi_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = \Phi_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = \Phi_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases}$$

Dire que le milieu est continu, c'est dire que Φ est une fonction continue et biunivoque de \overline{X} . On supposera que Φ est différentiable. Le déplacement par rapport à la configuration $\overline{\Omega}_0$, à l'instant t , de la particule M_0 est le vecteur

$$\vec{u}(X, t) = \vec{x}(X, t) - \overline{X} \quad (5.2)$$

5.2 Variables de Lagrange et variables d'Euler

Variables de Lagrange et variables d'Euler

Une grandeur attachée à une particule (masse volumique, vitesse,...) peut être définie,
- Soit en fonction de la position **initiale** et du temps, \overline{X} et \mathbf{t} : **variables de Lagrange**
- Soit en fonction de la position **actuelle** et du temps, \vec{x} et \mathbf{t} : **variables d'Euler**

Le vecteur vitesse d'une particule M est défini par

$$\vec{V}(\overline{X}, t) = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{\partial \Phi(\overline{X}, t)}{\partial t}$$

Le vecteur accélération d'une particule M est défini par

$$\vec{\Gamma}(\overline{X}, t) = \frac{d\vec{V}(\overline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial^2 \Phi(\overline{X}, t)}{\partial t^2}$$

5.2.1 Trajectoire

On appelle trajectoire d'une particule, la courbe géométrique lieu des positions occupées par cette particule au cours du temps. $\vec{x}(t) = \Phi(\overline{X}, t)$ est une représentation paramétrée en temps de la trajectoire. Par définition de la vitesse,

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt} \vec{e}_3$$

les trajectoires peuvent être obtenues par la résolution des trois équations

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt$$

5.2.2 Lignes de courant

À un instant donné, on appelle lignes de courant du mouvement, les lignes qui sont en tout point tangentes au vecteur vitesse de la particule située en ce point. Soit pour t **fixé**, deux équations:

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1, x_2, x_3, t)}$$

! Remarque

Pour un mouvement stationnaire (ou permanent) $\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x})$. **Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.**

5.3 Dérivées particulières

5.3.1 Définition

Lorsque l'on suit une particule dans son mouvement, la grandeur A attachée à la particule ne dépend que de t . Par définition, on appelle *dérivée particulière* de A à l'instant t , la dérivée de A par rapport à la seule variable t .

En variables de Lagrange: $A = A(\vec{X}, t)$

$$\frac{dA}{dt}(\vec{X}, t) = \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{X}, t)$$

En variables d'Euler: $A = A(\vec{x}, t)$

Or, \vec{x} dépend du temps, on doit donc composer les dérivées partielles:

$$\begin{aligned} dA(\vec{x}, t) &= \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{x}, t)dt + \frac{\partial A}{\partial x_j}(\vec{x}, t)dx_j \\ \frac{dA}{dt}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{x}, t) + \frac{\partial A}{\partial x_j}(\vec{x}, t)\frac{dx_j}{dt} \\ \frac{dA}{dt}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{x}, t) + \frac{\partial A}{\partial x_j}(\vec{x}, t)V_j \end{aligned}$$

ou encore si A est un scalaire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla A$$

Dans de nombreux ouvrages, on utilise la notation:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$$

! Attention

Il est important de noter que le terme $\vec{V} \cdot \nabla$ est un opérateur à manier avec précaution, ou tout du moins sous la forme $(\vec{V} \cdot \nabla)$. En effet, l'opérateur de contraction n'est pas commutatif dans le cas général. Par exemple, si A est une grandeur vectorielle, $\vec{V} \cdot \nabla \vec{A} = (\nabla \vec{A})^T \cdot \vec{V} \neq \nabla \vec{A} \cdot \vec{V}$!

5.3.2 Application à l'accélération

L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, donc en tenant compte de la remarque précédente, on écrira:

! Accélération

$$\vec{\Gamma}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{V}(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \vec{V} \cdot \vec{V}$$

que l'on peut également écrire

$$\vec{\Gamma}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 + \text{rot } \vec{V} \wedge \vec{V}$$

💡 Démonstration

$$\vec{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = V_i V_i$$

donc

$$\frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 = V_i V_{i,j} \vec{e}_j$$

De plus

$$\text{rot} \vec{V} = \varepsilon_{ijk} V_{k,j} \vec{e}_i$$

soit

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} &= \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{qjk} V_{k,j} V_r \vec{e}_p \\ &= \varepsilon_{qrp} \varepsilon_{qjk} V_{k,j} V_r \vec{e}_p \\ &= \delta_{rj} \delta_{pk} V_{k,j} V_r \vec{e}_p - \delta_{rk} \delta_{pj} V_{k,j} V_r \vec{e}_p \\ &= V_{k,j} V_j \vec{e}_k - V_{k,j} V_k \vec{e}_j \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2} \nabla \vec{V}^2 + \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = V_i V_{i,j} \vec{e}_j + V_{k,j} V_j \vec{e}_k - V_{k,j} V_k \vec{e}_j = V_{k,j} V_j \vec{e}_k = \nabla \vec{V} \cdot \vec{V}$$

6 Déformation d'un milieu continu

6.1 Notion de déformation

On dira qu'un milieu continu en mouvement subit des déformations si les distances relatives des points matériels varient au cours du temps.

En différenciant Equation 5.1, on obtient:

$$d\vec{x}(t) = \nabla \Phi d\vec{X} \quad dx_i = \frac{\partial \Phi}{\partial X_j} dX_j$$

On note $\overline{\overline{F}}$ l'application linéaire qui fait passer de l'espace vectoriel dans lequel peut varier $d\vec{X}$ dans l'espace vectoriel où varie à priori $d\vec{x}$. Cette application linéaire Figure 6.1, appelée **tenseur gradient** ou **application linéaire tangente**, permet donc le passage de la configuration $\overline{\Omega}_0$ à la configuration $\overline{\Omega}(t)$.

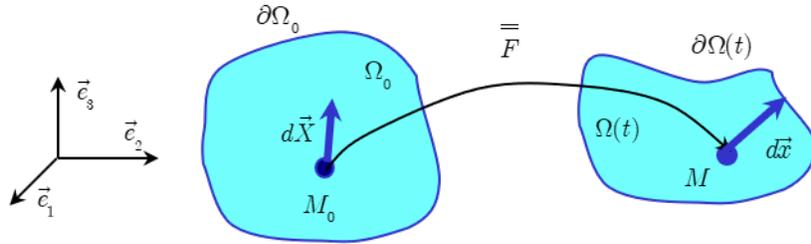


Figure 6.1: Application linéaire tangente

En notation indicielle,

! Application linéaire tangente

$$F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \text{ soit } \overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

6.2 Tenseur des déformations

6.2.1 Définition

Le tenseur gradient décrit la transformation locale au voisinage d'une particule donnée. Afin de rendre compte des déformations, c'est à dire des changements de forme autour de cette particule, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels pris respectivement dans les deux configurations $\bar{\Omega}_0$ et $\bar{\Omega}(t)$.

Considérons, Figure 6.2, trois particules voisines \bar{X} , $\bar{X} + d\bar{X}$, $\bar{X} + d\bar{X}'$. Après déformations, elles occupent dans $\bar{\Omega}(t)$ les positions respectives \bar{x} , $\bar{x} + d\bar{x}$, $\bar{x} + d\bar{x}'$.

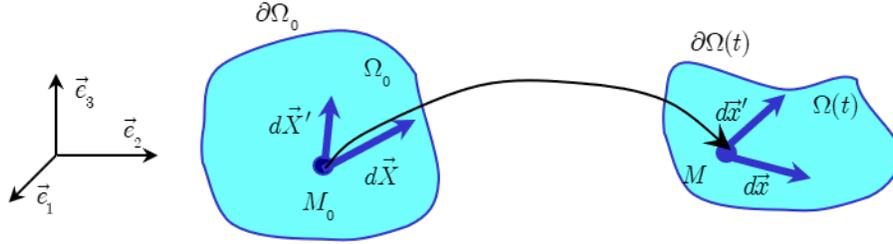


Figure 6.2: Notion de déformation

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' = \left(\bar{F}(\bar{X}, t) d\bar{X} \right) \cdot \left(\bar{F}(\bar{X}', t) d\bar{X}' \right) = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i \right) \cdot \left(\frac{\partial x'_k}{\partial X'_j} dX'_j \right)$$

d'où sa variation autour de la transformation

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' - d\bar{X} \cdot d\bar{X}' = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x'_k}{\partial X'_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX'_j = (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) dX_i dX'_j$$

on introduit alors le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$ tel que

$$d\bar{x} \cdot d\bar{x}' - d\bar{X} \cdot d\bar{X}' = 2 d\bar{X} \bar{\bar{\varepsilon}} d\bar{X}'$$

Tenseur des déformations

On définit ainsi l'application linéaire $\bar{\bar{\varepsilon}}$ appelée **tenseur des déformations**:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\bar{F}^T \bar{F} - \bar{I} \right)$$

Cette application est **symétrique** mais dépend bien sûr de la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ initialement choisie.

6.2.2 Remarques

* S'il n'y a pas de déformations, alors $\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{0}}$ (et inversement).

* $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}}$ est appelé le tenseur des dilatations. Ce tenseur est symétrique.

On peut démontrer:

Théorème 1: Les valeurs propres de $\bar{\bar{C}}$ sont strictement positives.

Théorème 2: $Det(\bar{\bar{F}}) > 0 \quad \forall t$

Théorème 3: $\bar{\bar{\epsilon}}$ est symétrique et possède les mêmes vecteurs propres que $\bar{\bar{C}}$.

* Variation de longueur

Soit $d\vec{X} = d\vec{X}' = dl_0 \vec{e}_x$ et $\|d\vec{x}\| = dl$, alors

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{X} \cdot d\vec{X} = dl^2 - dl_0^2 = 2 d\vec{X} \bar{\bar{\epsilon}} d\vec{X} = 2 dl_0^2 \varepsilon_{xx}$$

ou encore, si les déformations sont petites

$$\frac{dl}{dl_0} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} \approx 1 + \varepsilon_{xx} \rightarrow \varepsilon_{xx} \approx \frac{dl - dl_0}{dl_0}$$

ε_{xx} représente au premier ordre la variation de longueur dans la direction x.

* Variation d'angle

Soit $d\vec{X} = dl_0 \vec{e}_x$, $d\vec{X}' = dl_0 \vec{e}_y$, alors

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' - d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = \cos \theta dl dl' = 2 d\vec{X} \bar{\bar{\epsilon}} d\vec{X}' = 2 dl_0^2 \varepsilon_{xy}$$

ou encore,

$$2\varepsilon_{xy} = \cos \theta \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}}$$

donc ε_{xy} représente au premier ordre la variation d'angle entre les directions x et y.

6.2.3 Autre écriture

D'après Equation 5.1 et Equation 5.2

$$\overline{\overline{F}}(X, t) = \overline{\overline{\frac{\partial x}{\partial X}}}(X, t) = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X, t)$$

soit

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}} + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}^T + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}^T \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}} \right) \quad (6.2)$$

ou encore en notation indicielle

$$\varepsilon_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

6.2.4 Hypothèse des petites perturbations (HPP)

Cette hypothèse correspond au cas où $\|\vec{u}(X, t)\|$ et $\left\| \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X, t) \right\|$ sont “petits”.

En reprenant Equation 6.2 et en ne retenant que les termes d'ordre 1, on obtient:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{HPP} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X, t) + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}^T(X, t) \right)$$

ou encore en notation indicielle

$$\varepsilon_{ij_{HPP}} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

c'est à dire:

! Tenseur des déformation sous l'hypothèse des petites perturbations

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{HPP} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + \nabla^T \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

6.3 Conditions de compatibilité

À tout déplacement \bar{u} on fait correspondre une déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}$. On peut aussi se poser le problème inverse. Ce problème est dit '*problème de compatibilité géométrique d'un champ de déformation*', ou encore '*problème d'intégrabilité d'un champ de déformation*': connaissant un champ de déformation, peut-on retrouver le champ de déplacement?

Les conditions de compatibilité peuvent être établies dans le cas général, cependant nous ne les établirons que dans le cas des petites perturbations.

Décomposons maintenant le gradient des déplacements en une partie symétrique $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et une partie antisymétrique $\bar{\bar{\omega}}$.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) = \bar{\bar{\varepsilon}}(X, t) + \bar{\bar{\omega}}(X, t)$$

$$\bar{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial X}(X, t) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}^T(X, t) \right) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

On a $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$, donc en supposant le champ de déplacement deux fois continûment dérivable et en dérivant une nouvelle fois la partie antisymétrique

$$\omega_{ij,k} = \frac{1}{2} (u_{i,jk} - u_{j,ik}) = \frac{1}{2} (u_{i,jk} + u_{k,ij}) - \frac{1}{2} (u_{k,ij} + u_{j,ik}) = \varepsilon_{kij} - \varepsilon_{jki}$$

Connaissant ε_{ij} , on peut donc retrouver ω_{ij} pour autant que ω_{ij} soit une différentielle exacte, c'est à dire que les équations suivantes soient vérifiées: $\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk}$.

Donc en fonction de ε :

$$\forall i, j, k, l \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (6.3)$$

ou encore six équations

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{33,22} + \varepsilon_{22,33} & + \textit{permutation circulaire} \\ \varepsilon_{13,23} + \varepsilon_{32,31} - \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{33,21} & + \textit{permutation circulaire} \end{cases}$$

Réciproquement, si $\bar{\varepsilon}$ vérifie Equation 6.3, alors les formes différentielles

$$d\omega_{ij} = (\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}) dx_k$$

sont exactes; elles permettent donc de construire le champ $\bar{\omega}$ de tenseur antisymétrique. On vérifie ensuite que les formes différentielles

$$du_i = (\omega_{ik} + \varepsilon_{ik}) dx_k$$

sont exactes, d'où la possibilité de construire un champ de déplacement $\bar{u}(X, t)$ défini dans $\bar{\Omega}_0$.

7 Transport, dérivées particulières

7.1 Transport d'un volume

Soit $d\Omega_0$ un élément de volume de la configuration de référence, défini par trois vecteurs $d\vec{X}_1, d\vec{X}_2, d\vec{X}_3$. Par la transformation, ces trois vecteurs se transportent en trois vecteurs $d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3$ qui définissent dans la configuration actuelle un volume $d\Omega$ (Figure 7.1).

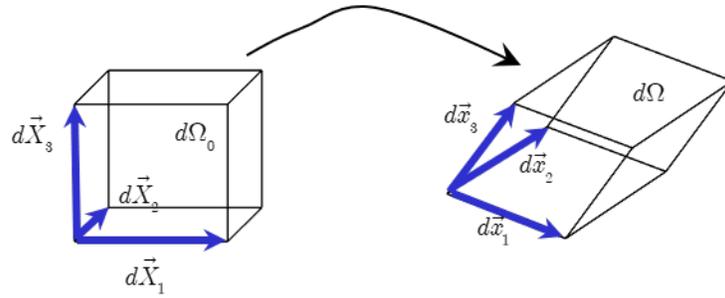


Figure 7.1: Transport d'un élément de volume

Le volume $d\Omega$ est représenté par le produit mixte des vecteurs $d\vec{x}_1, d\vec{x}_2$ et $d\vec{x}_3$:

$$d\Omega = (d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2) \cdot d\vec{x}_3$$

donc

$$d\Omega = \varepsilon_{ijk} dx_{1j} dx_{2k} dx_{3i}$$

Or, d'après Equation 6.1

$$d\Omega = \varepsilon_{ijk} F_{jp} F_{kq} F_{ir} dX_{1p} dX_{2q} dX_{3r}$$

et, d'après Equation 2.3

$$d\Omega = \varepsilon_{pqr} \det(\overline{\overline{F}}) dX_{1p} dX_{2q} dX_{3r} = \det(\overline{\overline{F}}) (d\vec{X}_1 \wedge d\vec{X}_2) \cdot d\vec{X}_3$$

donc en définitive

! Transport d'un élément de volume

$$d\Omega = \text{Det}\overline{\overline{F}} d\Omega_0 \quad (7.1)$$

7.2 Transport d'une surface orientée

Soit dS un élément de surface de la configuration de référence de normale $\overline{\overline{N}}$. Par la transformation, cette surface se transporte en une surface ds de normale $\overline{\overline{n}}$ dans la configuration actuelle. En considérant un vecteur $\overline{\overline{V}}$ dans la configuration de référence qui se transporte en un vecteur $\overline{\overline{v}}$ dans la configuration actuelle, on peut définir l'élément de volume $(dS \overline{\overline{N}}) \cdot \overline{\overline{V}}$ qui se transporte en un élément de volume $(ds \overline{\overline{n}}) \cdot \overline{\overline{v}}$ (Figure 7.2).

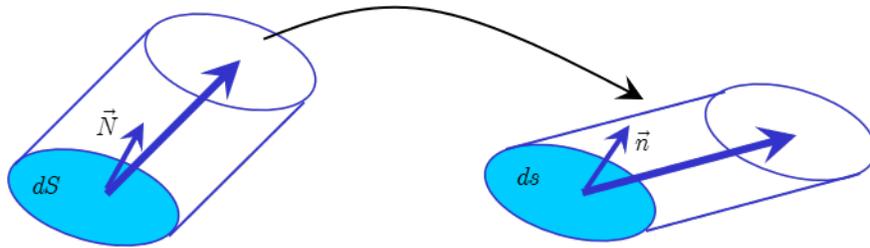


Figure 7.2: Transport d'un élément de surface

D'après Equation 7.1

$$ds \overline{\overline{n}} \cdot \overline{\overline{v}} = \det(\overline{\overline{F}}) dS \overline{\overline{N}} \cdot \overline{\overline{V}}$$

et comme avec Equation 6.1

$$\overline{\overline{v}} = \overline{\overline{F}} \overline{\overline{V}}$$

$$ds \overline{\overline{n}} \cdot (\overline{\overline{F}} \overline{\overline{V}}) = ds \left(\overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{n}} \right) \cdot \overline{\overline{V}} = \det(\overline{\overline{F}}) dS \overline{\overline{N}} \cdot \overline{\overline{V}}$$

on obtient finalement

! Transport d'un élément de surface orientée

$$ds \overline{\overline{n}} = \det(\overline{\overline{F}}) \overline{\overline{F}}^{-T} dS \overline{\overline{N}} \quad (7.2)$$

7.3 Dérivée particulière d'une intégrale de volume

Soit $K(t) = \iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x}, t) d\Omega$, une intégrale de volume sur le domaine $\Omega(t)$ dans la configuration de référence. Pour en déterminer la dérivée temporelle, nous devons au préalable exprimer $K(t)$ sur la configuration de référence pour "passer" la dérivation sous l'intégrale. En effectuant le changement de variable Equation 5.1, et en utilisant Equation 7.1

$$d\Omega = \text{Det}\overline{\overline{F}} d\Omega_0 = J d\Omega_0$$

on obtient

$$K(t) = \iiint_{\Omega_0} k(\phi(\overline{X}, t), t) J(t) d\Omega_0$$

puis

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega_0} \left(\frac{dk}{dt} J + k \frac{dJ}{dt} \right) d\Omega_0$$

À ce stade nous devons expliciter dJ/dt . En utilisant les notations indicielles, et en particulier les symboles de permutation, on a:

$$J = \det \overline{\overline{F}} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} F_{ip} F_{jq} F_{kr}$$

soit

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \frac{\partial F_{ip}}{\partial t} F_{jq} F_{kr}$$

or

$$\frac{\partial F_{ip}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi_i(\overline{X}, t)}{\partial t \partial X_p} = \frac{\partial}{\partial X_p} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial X_p} (V_i(\overline{X}, t)) = \frac{\partial}{\partial X_p} (v_i(\vec{x}, t)) = \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_p} = \frac{\partial v_i}{\partial x_l} F_{lp}$$

donc

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \frac{\partial v_i}{\partial x_l} F_{lp} F_{jq} F_{kr}$$

mais

$$\varepsilon_{pqr} F_{lp} F_{jq} F_{kr} = \varepsilon_{ijk} \det \bar{F}$$

soit

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \det \bar{F} = \delta_{il} \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \det \bar{F} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} J$$

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \vec{v}$$

En reportant dans l'expression de dK/dt

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega_0} \left(\frac{dk}{dt} J + k J \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega_0$$

puis en exprimant l'intégrale sur la configuration actuelle, on obtient finalement

! Dérivée particulière d'une intégrale de volume pour une quantité scalaire

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{dk}{dt} + k \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \quad (7.3)$$

En utilisant les égalités suivantes,

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla k$$

$$\operatorname{div}(k\vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla k + k \operatorname{div} \vec{v}$$

on peut écrire Equation 7.3 sous la forme

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(k\vec{v}) \right) d\Omega \quad (7.4)$$

ou encore, en utilisant le théorème de la divergence

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t} d\Omega + \iint_{\partial\Omega(t)} k\vec{v} \cdot \vec{n} d\partial\Omega$$

On peut démontrer un résultat similaire dans le cas d'une quantité vectorielle:

! Dérivée particulière d'une intégrale de volume pour une quantité vectorielle

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \vec{k}(\vec{x}, t) d\Omega = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + k \operatorname{div}(k \vec{v} \otimes \vec{v}) \right) d\Omega \quad (7.5)$$

! Application fondamentale: conservation de la masse

La masse d'un système matériel qu'on suit dans son mouvement reste constante.

$$M = \iiint_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t) d\Omega \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dt} = 0$$

où ρ est la masse volumique. On a alors par application de Equation 7.3 ou Equation 7.6:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (7.6)$$

💡 Conséquences : Dérivée temporelle d'une intégrale massique

Considérons une grandeur quelconque ψ dont on cherche à calculer

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \psi(\vec{x}, t) dm = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \psi(\vec{x}, t) \rho d\Omega$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \psi \rho d\Omega &= \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{d\rho\psi}{dt} + \rho\psi \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega(t)} \left(\rho \frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{d\rho}{dt} + \rho\psi \operatorname{div} \vec{v} \right) d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega(t)} \left(\rho \frac{d\psi}{dt} + \psi \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) \right) d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega(t)} \rho \frac{d\psi}{dt} d\Omega \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \psi dm = \iiint_{\Omega(t)} \frac{d\psi}{dt} dm \quad (7.7)$$

7.4 Dérivée particulière d'une intégrale de surface

Soit $K(t) = \iint_{\Sigma(t)} \vec{k}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} \, d\Sigma$, une intégrale de volume sur le domaine $\Sigma(t)$ dans la configuration de référence. Pour en déterminer la dérivée temporelle, nous devons au préalable exprimer $K(t)$ sur la configuration de référence pour "passer" la dérivation sous l'intégrale. En effectuant le changement de variable Equation 5.1, et en utilisant Equation 7.2

$$d\Sigma \vec{n} = \det(\bar{\bar{F}}) \bar{\bar{F}}^{-T} d\Sigma_0 \bar{N}$$

on obtient

$$K(t) = \iint_{\Sigma_0} \vec{k}(\phi(\bar{X}, t), t) \cdot J \bar{\bar{F}}^{-T} d\Sigma_0 \bar{N}$$

puis

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma_0} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot J \bar{\bar{F}}^{-T} \bar{N} + \vec{k} \cdot \frac{d}{dt} [J \bar{\bar{F}}^{-T}] \bar{N} \right) d\Sigma_0$$

on doit donc calculer $\frac{d\bar{\bar{F}}^{-T}}{dt}$

$$\bar{\bar{F}}^{-1} \bar{\bar{F}} = \bar{I} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\bar{F}}^{-1}}{dt} \bar{\bar{F}} + \bar{\bar{F}}^{-1} \frac{d\bar{\bar{F}}}{dt} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\bar{F}}^{-1}}{dt} = -\bar{\bar{F}}^{-1} \frac{d\bar{\bar{F}}}{dt} \bar{\bar{F}}^{-1}$$

$$\frac{d\bar{\bar{F}}}{dt} \bar{\bar{F}}^{-1} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \nabla \vec{v}$$

donc

$$\frac{d\bar{\bar{F}}^{-T}}{dt} = - \left(\bar{\bar{F}}^{-1} \nabla \vec{v} \right)^T = -\nabla^T \vec{v} \bar{\bar{F}}^{-T}$$

et

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma_0} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot J \bar{\bar{F}}^{-T} \bar{N} + \vec{k} \cdot J \operatorname{div} \vec{v} \bar{\bar{F}}^{-T} \bar{N} - \vec{k} \cdot J \nabla^T \vec{v} \bar{\bar{F}}^{-T} \bar{N} \right) d\Sigma_0$$

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma_0} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} + \operatorname{div}\vec{v}\vec{k} - \vec{k} \cdot \nabla^T \vec{v} \right) \cdot J \bar{F}^{-T} \bar{N} d\Sigma_0$$

puis en exprimant l'intégrale sur la configuration actuelle, on obtient finalement

! Dérivée particulière d'une intégrale de surface

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma(t)} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} + \operatorname{div}\vec{v}\vec{k} - \nabla\vec{v}\vec{k} \right) \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (7.8)$$

en utilisant la dérivée particulière, Equation 7.8 s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \iint_{\Sigma(t)} \left(\frac{\partial\vec{k}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{v}\vec{k} + \nabla\vec{k}\vec{v} - \nabla\vec{v}\vec{k} \right) \cdot \vec{n} d\Sigma \\ \frac{dK}{dt} &= \iint_{\Sigma(t)} \left(\frac{\partial\vec{k}}{\partial t} + r\vec{\omega}t(\vec{k} \wedge \vec{v}) + \vec{v}\operatorname{div}\vec{k} \right) \cdot \vec{n} d\Sigma \end{aligned}$$

car

$$r\vec{\omega}t(\vec{k} \wedge \vec{v}) = \vec{k}\operatorname{div}\vec{v} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{k} + \nabla\vec{k}\vec{v} - \nabla\vec{v}\vec{k}$$

À Retenir

! Variables de Lagrange et variables d'Euler

Une grandeur attachée à une particule (masse volumique, vitesse,...) peut être définie,
- Soit en fonction de la position **initiale** et du temps, \vec{X} et \mathbf{t} : **variables de Lagrange**
- Soit en fonction de la position **actuelle** et du temps, \vec{x} et \mathbf{t} : **variables d'Euler**

Dérivée particulaire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla A \cdot \vec{V}$$

Vitesse

$$\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Accélération

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \vec{V} \cdot \vec{V}$$

Application linéaire tangente

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Tenseur des déformations

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}} \right)$$

Tenseur des déformations sous l'hypothèse des petites perturbations

$$\varepsilon_{ij_{HPP}} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Transport d'un volume

$$d\Omega = \text{Det}\overline{\overline{F}} d\Omega_0$$

Transport d'une surface

$$ds \vec{n} = \det(\overline{\overline{F}}) \overline{\overline{F}}^{-T} dS \vec{N}$$

Dérivée d'une intégrale de volume

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x}, t) d\Omega = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{dk}{dt} + k \text{div}\vec{v} \right) d\Omega$$

Dérivée d'une intégrale de surface

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma(t)} \vec{k}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\Sigma = \iint_{\Sigma(t)} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} + \text{div}\vec{v} \vec{k} - \nabla \vec{v} \vec{k} \right) \cdot \vec{n} d\Sigma$$

! Conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

💡 Rappel sur les unités

- \vec{x} est une position : $\vec{x} \equiv [m]$
- \vec{u} est un déplacement : $\vec{u} \equiv [m]$
- \vec{v} est une vitesse, dérivée de la position par rapport au temps : $\vec{v} \equiv \left[\frac{m}{s} \right]$
- $\vec{\gamma}$ est une accélération, dérivée de la vitesse par rapport au temps : $\vec{\gamma} \equiv \left[\frac{m}{s^2} \right]$
- $\overline{\overline{F}}$, application linéaire tangente, est le gradient d'une position : $\overline{\overline{F}} \equiv [-]$
- $\overline{\overline{\epsilon}}$, tenseur des déformations, est homogène à un gradient de déplacement : $\overline{\overline{\epsilon}} \equiv [-]$
- ρ , la densité, est une masse par unité de volume : $\rho \equiv \left[\frac{kg}{m^3} \right]$

Exercices

i Exercice Cinématique 1

K étant une constante, on étudie le mouvement défini par la description Eulérienne suivante :

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Ky}{x^2 + y^2} \\ \frac{Kx}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- 1) Déterminer les trajectoires et lignes de courant
- 2) Calculer l'accélération

💡 Correction exercice Cinématique 1

- 1) Le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps, donc trajectoires et lignes de courant sont confondues. Le mouvement étant plan, on résout donc :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$-\frac{dx(x^2 + y^2)}{Ky} = \frac{dy(x^2 + y^2)}{Kx}$$

$$xdx + ydy = 0$$

soit par intégration de la différentielle: $r^2 = x^2 + y^2 = Cste$. Les lignes de courant sont donc des cercles dont le centre est à l'origine.

$$2) \vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{-Ky}{r^2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{Kx}{r^2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ \$ Or, d'après la question précédente, on}$$

a $r = cste$, ainsi que K donc:

$$\vec{\Gamma} = \left\{ \begin{array}{c} -K \frac{dy}{r^2 dt} \\ K \frac{dx}{r^2 dt} \\ 0 \end{array} \right\}$$

et enfin comme $\frac{dx}{dt} = u$ et $\frac{dy}{dt} = v$, on a:

$$\vec{\Gamma} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{K^2 x}{r^4} \\ \frac{K^2 y}{r^4} \\ 0 \end{array} \right\}$$

On peut également retrouver ce résultat en utilisant la dérivée particulière, ou bien en passant en système de coordonnées cylindriques.

i Exercice Cinématique 2

On considère un milieu continu occupant dans la configuration de référence, le cube centré à l'origine, d'arêtes de longueur unité et parallèles à l'un des axes du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Le solide est supposé localement incompressible. Le solide ainsi défini, est soumis respectivement à deux types de transformations de déformations :

1) Un glissement simple :

$$x_1 = X_1 + \gamma(t)X_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

2) Une déformation homogène de révolution autour de l'axe (O, \vec{e}_1) :

$$x_1 = \lambda_1(t)X_1, \quad x_2 = \lambda_2(t)X_2, \quad x_3 = \lambda_3(t)X_3 \text{ avec } \lambda_2 = \lambda_3.$$

Déterminer dans chacun des cas

- Le tenseur représentant l'application linéaire tangente.
- Le tenseur des déformations.
- Le tenseur des déformations sous l'hypothèse des petites perturbations.

💡 Correction exercice Cinématique 2

1) a) $\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) Sous l'hypothèse des petites perturbations, les déformations sont petites, donc $\gamma \ll 1$ et $\gamma^2 \ll \gamma$ d'où:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{HPP} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) a) $\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ avec $\lambda_2 = \lambda_3$

b) $\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix}$

c) On sait que le milieu est incompressible. Donc, d'après Equation 7.1, on doit avoir $\det \overline{\overline{F}} = 1$, c'est à dire $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. On a donc $\lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1}$. Sous l'hypothèse des petites perturbations, les déformations sont petites, donc $\lambda_1^2 - 1 \ll 1$.

On peut faire un développement limité de λ_1 en 1. Notons $\alpha \ll 1$ tel que $\lambda_1 = 1 + \alpha$. On a donc $\lambda_2^2 = \frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + O(\alpha^2)$ et $\lambda_1^2 = 1 + 2\alpha + O(\alpha^2)$.

Soit $\overline{\overline{\varepsilon}}_{HPP} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$

i Exercice Cinématique 3

On considère un écoulement de fluide entre deux cylindres coaxiaux animés d'une vitesse de rotation constante dans le temps (écoulement de Couette). On peut montrer que le champ de vitesse dans le fluide, en coordonnées cylindriques est de la forme : $\vec{v} =$

$\left(ar + \frac{b}{r}\right) \vec{e}_\theta$, où a et b sont deux constantes.

- Vérifier que le mouvement est incompressible.
- Calculer $rot\vec{v}$.
- Calculer l'accélération

💡 Correction exercice Cinématique 3

a) on a $\vec{v} = \left(ar + \frac{b}{r}\right) \vec{e}_\theta$, donc en coordonnées cylindriques, $div\vec{v} = v_{r,r} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\theta,\theta}}{r} + v_{z,z} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

Donc le mouvement est incompressible.

b)

$$rot\vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{Bmatrix}$$

soit $rot\vec{v} = 2a\vec{e}_z$.

c) Première méthode: $v_r = 0$ donc $\frac{dr}{dt} = 0$, d'où:

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_\theta \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = v_\theta \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_\theta^2}{r} \vec{e}_r$$

Deuxième méthode:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{0} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ v_\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{v_\theta^2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{v_\theta^2}{r} \vec{e}_r$$

Part III

Efforts dans les milieux continus

Dans ce chapitre, nous allons étudier les efforts dans les milieux continus, en introduisant la notion de contrainte, qui est un concept fondamental en mécanique. Nous établirons alors les équations d'équilibre, en particulier la conservation de la quantité de mouvement. À titre d'information nous présentons dans ce manuscrit le *Principe des Puissances Virtuelles*, mais, étant donné le temps imparti à cet enseignement, nous n'aborderons en cours les équations d'équilibre que par l'application du principe fondamental de la mécanique.

8 Définitions

8.1 Forces

Elles résument les effets mécaniques, autres que cinématiques, exercés sur le milieu continu considéré par le reste du domaine physique. Leur schématisation à chaque instant repose sur la définition d'un champ de vecteur $\vec{\Phi}(\vec{x}, t)$ et d'une mesure positive ω , définis sur la configuration actuelle $\bar{\Omega}(t)$. $\vec{\Phi}(\vec{x}, t)$ est une densité de force pour la mesure ω .

* Si ω est une mesure de volume, alors $\vec{\Phi}(\vec{x}, t)$ est une force volumique (densité volumique de force) définie dans $\Omega(t)$ de la configuration actuelle, par la fonction

$$\vec{f}: \vec{x} \in \Omega(t) \rightarrow \vec{f}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^3$$

* Si ω est une mesure de surface, alors $\vec{\Phi}(\vec{x}, t)$ est une force surfacique (densité surfacique de force) définie sur $\partial\Omega_F(t)$ de la configuration actuelle, par la fonction

$$\vec{F}: \vec{x} \in \partial\Omega_F(t) \rightarrow \vec{F}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^3$$

* ... etc ...

Remarques:

* Les forces sont définies sur la configuration actuelle.

* À un instant donné et en un point donné x de $\partial\Omega(t)$, on ne peut imposer à la fois le déplacement et la force !. Mais l'un des deux doit être imposé (éventuellement nul). On note $\partial\Omega_F(t)$ la frontière où la force est imposée, et $\partial\Omega_U(t)$ la frontière où le déplacement est imposé. Dans le cas des appuis mobiles, les composantes non imposées cinématiquement le sont pour les forces

* Le monde extérieur au milieu considéré doit, pour imposer le déplacement $\vec{U}(t)$ au bord $\partial\Omega_U(t)$, exercer des forces que nous noterons $\vec{R}(\vec{x}, t)$. Comme elles sont à priori inconnues, nous les appellerons **réactions** pour éviter de les confondre avec les autres forces qui, elles, sont données.

8.2 Vecteur-contrainte et tenseur des contraintes

8.2.1 Contrainte de Cauchy

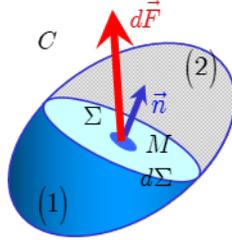


Figure 8.1: Schématisation des efforts internes

Soit un corps C en équilibre par application d'un système d'actions mécaniques extérieures. Imaginons qu'une surface Σ divise C en deux parties (1) et (2). La partie (1) est en équilibre sous les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées et les actions mécaniques exercées par la partie (2). Nous admettons que sur chaque élément de surface $d\Sigma$ de Σ , (2) exerce sur (1) une force $d\vec{F}(\vec{x}, t, \vec{n})_{1/2}$ de densité superficielle $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$.

$$d\vec{F}(\vec{x}, t, \vec{n})_{1/2} = \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) d\Sigma \quad (8.1)$$

$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$ est le **vecteur contrainte** au point x , relativement à la facette $d\Sigma$ définie par son vecteur normal \vec{n} .

La densité surfacique de forces exercées en x dépend de x , t et aussi de l'orientation de la surface Σ au voisinage de x . Elle est linéairement dépendante de \vec{n} . On introduit alors l'application $\bar{\sigma}$ telle que:

🔥 Contrainte de Cauchy

$$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \bar{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}$$

L'application $\bar{\sigma}(x, t)$ s'appelle le **tenseur des contraintes de Cauchy** en x à l'instant t ; il caractérise, dans la configuration actuelle, les **efforts intérieurs de cohésion** exercés sur une partie du solide à travers l'élément de surface $\vec{n}d\Sigma$

8.2.2 Autre écriture du tenseur des contraintes

On peut aussi écrire le tenseur des contraintes dans la configuration de référence. Pour une présentation complète, on se reportera à Coirier and Nadot-Martin (2020) ou Salençon (2005).

En utilisant Equation 7.8, on cherche donc à exprimer le tenseur des contraintes en utilisant les variables de Lagrange, Equation 8.1 devient:

$$d\vec{F}(\vec{x}(\vec{X}, t), t, \vec{n}(\vec{N}, t)) = \bar{\bar{\Pi}} \vec{N}(\vec{X}) dS$$

où $\bar{\bar{\Pi}}$ est le tenseur défini par

$$\bar{\bar{\Pi}}(\vec{X}, t) = (\det \bar{F}) \bar{\sigma} \bar{F}^{-T}$$

Cette application linéaire $\bar{\bar{\Pi}}(\vec{X}, t)$, définie pour $\vec{X} \in \bar{\Omega}_0$, s'appelle le **premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff** en \vec{X} à l'instant t ; la composante Π_{ij} est la i^{eme} composante du vecteur contrainte exercée sur la déformée d'une surface unité, normale à \vec{e}_j , de la configuration de référence. *On prendra garde au fait que le tenseur $\bar{\bar{\Pi}}$ n'est pas symétrique.*

Si maintenant on cherche le vecteur "force de cohésion" dans la configuration de référence

$$d\vec{F}_0(\vec{X}, t, \vec{N}) = \bar{F}^{-1}(\vec{X}, t) d\vec{F}(\vec{x}(\vec{X}, t), t, \vec{n}(\vec{N}, t)) = \bar{S} \vec{N}(\vec{X}) dS$$

où \bar{S} est le tenseur défini par

$$\bar{S} = \bar{F}^{-1} \bar{\bar{\Pi}}$$

Cette application linéaire $\bar{S}(\vec{X}, t)$, définie pour $\vec{X} \in \bar{\Omega}_0$, s'appelle le **second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff** en \vec{X} à l'instant t . Attention, sa composante S_{ij} n'est pas la i^{eme} composante du vecteur contrainte exercée sur la déformée d'une surface unité, normale à \vec{e}_j , de la configuration de référence, mais seulement la ime composante de son transporté dans la configuration de référence.

Selon le jeu d'écriture adopté, on a donc trois descriptions des contraintes:

Representations du tenseur des contraintes

$$\bar{\sigma} = (\det \bar{F})^{-1} \bar{\bar{\Pi}} \bar{F}^T = (\det \bar{F})^{-1} \bar{F} \bar{S} \bar{F}^T$$

9 Équilibre

9.1 Le Principe des Puissances Virtuelles (Germain 1972)

Pour une présentation complète, on se reportera à P. Germain and Muller (1980) ou Paul Germain (1986a) ou Salençon (2005). ### Axiomes Pour schématiser les efforts mis en jeu, il est commode d'imaginer des mouvements fictifs (ou virtuels) et d'analyser le travail ou la puissance qui en résulte. Par exemple, pour évaluer les forces de gravité agissant sur un objet, on peut imaginer de le soulever (mouvement virtuel de bas en haut).

Un milieu matériel étant isolé, on peut distinguer les actions extérieures qui agissent sur le milieu, des actions intérieures qui représentent les liaisons existant entre toutes les parties du milieu.

Principe des puissances virtuelles

Axiome d'objectivité

La puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle.

Axiome d'équilibre

Pour tout milieu matériel repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération Π_a est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs Π_i et des efforts extérieurs Π_e .

9.1.1 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

Soit un milieu continu $\bar{\Omega}(t)$ d'intérieur $\Omega(t)$ et de frontière $\partial\Omega(t)$. Isolons maintenant un domaine $\Sigma(t)$ de frontière $\partial\Sigma(t)$ intérieur à $\Omega(t)$, et soit \vec{n} la normale en un point de $\partial\Sigma(t)$. À un instant t fixé, un mouvement virtuel défini par une vitesse virtuelle $\delta\vec{v}$ est appliqué à $\Sigma(t)$. Cette vitesse est supposée continue et continûment dérivable sur $\Sigma(t)$.

Pour déterminer la puissance virtuelle des efforts intérieurs nous ferons les hypothèses suivantes:

- Π_i admet une densité volumique p_i :

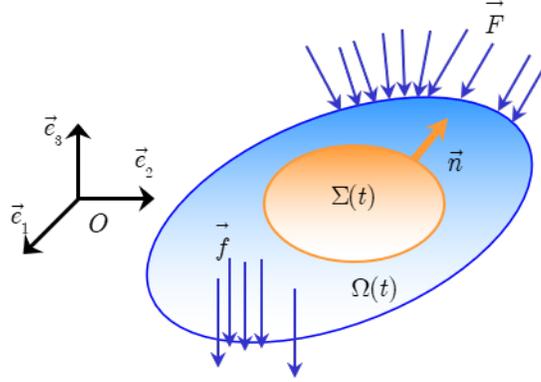


Figure 9.1

$$\Pi_i = \iiint_{\Sigma} p_i d\Sigma$$

- Π_i est en chaque point une forme linéaire des valeurs en ce point de $\delta\vec{v}$ et de ses dérivées premières.

En décomposant le gradient des vitesses virtuelles en une partie symétrique $\overline{\overline{\delta D}}$ et une partie antisymétrique $\overline{\overline{\delta W}}$,

$$\nabla \delta\vec{v} = \overline{\overline{\delta D}} + \overline{\overline{\delta W}}$$

$$\overline{\overline{\delta W}} = \frac{1}{2} (\nabla \delta\vec{v} - \nabla \delta\vec{v}^T) \quad \delta W_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\overline{\overline{\delta D}} = \frac{1}{2} (\nabla \delta\vec{v} + \nabla \delta\vec{v}^T) \quad \delta D_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

la densité volumique des efforts intérieurs devient:

$$p_i = A_i \delta v_i + B_{ij} \delta w_{ij} - \sigma_{ij} \delta D_{ij}$$

Le premier axiome du principe des puissances virtuelles impose que pour tout mouvement de solide rigide la puissance des efforts intérieurs soit nulle. D'où:

- Soit un mouvement de translation: $\delta\vec{v} \neq \vec{0}$, $\overline{\overline{\delta W}} = \vec{0}$ et $\overline{\overline{\delta D}} = \vec{0}$
alors

$$\Pi_i = \iiint_{\Sigma} p_i d\Sigma = \iiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \delta\vec{v} d\Sigma = 0 \quad \Sigma \text{ dans } \Omega$$

soit $\vec{A} \cdot \delta\vec{v} = 0 \quad \forall \delta\vec{v}$, ou encore $\vec{A} = \vec{0}$

- Soit un mouvement de rotation: $\delta\vec{v} = \vec{0}$, $\overline{\delta\vec{W}} \neq \vec{0}$ et $\overline{\delta\vec{D}} = \vec{0}$

alors

$$\Pi_i = \iiint_{\Sigma} p_i d\Sigma = \iiint_{\Sigma} \overline{\vec{B}} : \overline{\delta\vec{W}} d\Sigma = 0 \quad \forall \Sigma \text{ dans } \Omega$$

soit $\overline{\vec{B}} : \overline{\delta\vec{W}} = \vec{0} \quad \forall \overline{\delta\vec{W}}$, ou encore $\overline{\vec{B}} = \vec{0}$.

Donc en définitive:

$$\Pi_i = - \iiint_{\Sigma} \overline{\vec{\sigma}} : \overline{\delta\vec{D}} d\Sigma$$

On peut montrer que le tenseur $\overline{\vec{\sigma}}$ introduit ici correspond bien au tenseur des contraintes de Cauchy.

9.1.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs comprennent

- des efforts exercés à distance par des systèmes extérieurs à Ω , supposés définis par une densité volumique de forces \vec{f} (par exemple la gravité $\rho\vec{g}$),
- des efforts de cohésion schématisés par une densité surfacique de force \vec{T} sur $\partial\Sigma$

$$\Pi_e = \iiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \delta\vec{v} d\Sigma + \iint_{\partial\Sigma} \vec{T} \cdot \delta\vec{v} d\partial\Sigma$$

9.1.3 Application du Principe des Puissances Virtuelles

Si $\vec{\gamma}$ est l'accélération et ρ la masse volumique de chacun des points de Σ , alors

$$\Pi_a = \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \delta\vec{v} d\Sigma = \iiint_{\Sigma} \left(\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v}) \right) \cdot \delta\vec{v} d\Sigma$$

et en utilisant la conservation de la masse

$$\Pi_a = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} \cdot \delta\vec{v} d\Sigma$$

En application du Principe des Puissances Virtuelles on obtient:

$$- \iiint_{\Sigma} \bar{\sigma} : \bar{\delta D} d\Sigma + \iiint_{\Sigma} \bar{f} \cdot \delta \vec{v} d\Sigma + \iint_{\partial\Sigma} \bar{T} \cdot \delta \vec{v} d\partial\Sigma = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} \cdot \delta \vec{v} d\Sigma \quad (9.1)$$

Pour exploiter le fait que Equation 9.1 est vérifié pour tout mouvement virtuel, nous allons faire apparaître $\delta \vec{v}$ dans chacun des termes.

En appliquant le théorème de la divergence, le premier terme devient:

$$- \iiint_{\Sigma} \bar{\sigma} : \bar{\delta D} d\Sigma = - \iiint_{\Sigma} \bar{\sigma} : \nabla \delta \vec{v} d\Sigma = - \iint_{\partial\Sigma} \bar{\sigma} \cdot \delta \vec{v} \cdot \vec{n} d\partial\Sigma + \iiint_{\Sigma} \text{div}_x \bar{\sigma} \cdot \delta \vec{v} d\Sigma$$

Soit:

$$\iint_{\partial\Sigma} (\bar{T} - \bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \delta \vec{v} d\partial\Sigma + \iiint_{\Sigma} (\bar{f} + \text{div}_x \bar{\sigma} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \delta \vec{v} d\Sigma \quad \forall \delta \vec{v}$$

Ou encore

$$\begin{cases} \bar{f} + \text{div}_x \bar{\sigma} = \rho \vec{\gamma} & \text{dans } \Sigma \\ \bar{T} = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} & \text{sur } \partial\Sigma \end{cases}$$

9.1.4 Équilibre

En considérant les développements du paragraphe précédent et en se ramenant au domaine $\Omega(t)$, nous pouvons donc écrire les équations d'équilibre d'un solide soumis à un champ de forces extérieures \bar{f} dans $\Omega(t)$, à un champ de forces extérieures \bar{F}_e sur $\partial\Omega_F(t)$ et à un déplacement imposé \bar{U}_e sur $\partial\Omega_U(t)$.

Dans la configuration actuelle :

 Équation d'équilibre ou conservation de la quantité de mouvement

$$\bar{f}(\vec{x}, t) + \text{div}_x \bar{\sigma}(\vec{x}, t) = \rho \vec{\gamma} \quad \forall \vec{x} \in \Omega(t) \quad (9.2)$$

$$\bar{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) = \begin{cases} \bar{F}_e(\vec{x}, t) & \forall \vec{x} \in \partial\Omega_F(t) \\ \bar{R}(\vec{x}, t) & \forall \vec{x} \in \partial\Omega_U(t) \end{cases}$$

Dans la configuration de référence:

De même, si on note \vec{f}_0 , \vec{R}_0 et \vec{F}_0 les densités volumiques et surfaciques de forces mesurées dans la configuration de référence:

$$\vec{f}_0(\vec{X}, t) + \operatorname{div}_X \bar{\Pi}(\vec{X}, t) = \rho \bar{\Gamma} \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0$$

$$\bar{\Pi}(\vec{X}, t) \cdot \vec{N}(\vec{X}, t) = \begin{cases} \vec{F}_0(\vec{X}, t) & \forall \vec{X} \in x^{-1}(\partial\Omega_F(t), t) \\ \vec{R}_0(\vec{X}, t) & \forall \vec{X} \in \partial\Omega_{0U} \end{cases}$$

Cas des petites perturbations

Reprenons Equation 9.2, en l'exprimant en fonction de \vec{X}

$$f_i(\vec{x}(\vec{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(\vec{x}(\vec{X}, t), t) = \rho \gamma_i \quad \forall \vec{x}(\vec{X}, t) \in \Omega(t)$$

$$f_i(\vec{x}(\vec{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(\vec{X}, t) \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(\vec{X}, t) = \rho \Gamma_i \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0$$

Or $\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t)$ soit $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t)$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre sous la forme

$$f_i(\vec{x}(\vec{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(\vec{X}, t) \left[\bar{\bar{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) \right]_{kj}^{-1} = \rho \Gamma_i \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on peut alors écrire:

$$\left[\bar{\bar{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t) \right]^{-1} = \bar{\bar{I}} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}(\vec{X}, t)$$

soit

$$f_i(\vec{x}(\vec{X}, t), t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(\vec{X}, t) \left[\delta_{jk} - \frac{\partial u_k}{\partial X_j}(\vec{X}, t) \right] = \rho \Gamma_i \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0$$

Enfin, en ne retenant que les termes d'ordre 0, et après avoir effectué un développement de f_i au voisinage de \vec{X} , on obtient:

$$f_i(\vec{X}, t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}(\vec{X}, t) = \rho \Gamma_i \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0$$

soit

$$\vec{f}(\vec{X}, t) + \text{div}_X \vec{\sigma}(\vec{X}, t) = \rho \vec{\Gamma} \quad \forall \vec{X} \in \Omega_0$$

Le raisonnement qui a permis de remplacer $\vec{f}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$ par $\vec{f}(\vec{X}, t)$, permet aussi de remplacer $\vec{F}_e(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$ par $\vec{F}_e(\vec{X}, t)$ et $\vec{R}(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$ par $\vec{R}(\vec{X}, t)$. Donc, comme condition sur la frontière on obtient:

$$\vec{\sigma}(\vec{X}, t) \cdot \vec{N}(\vec{X}, t) = \begin{cases} \vec{F}_e(\vec{X}, t) & \forall X \in \partial\Omega_{0F} \\ \vec{R}(\vec{X}, t) & \forall \vec{X} \in \partial\Omega_{0U} \end{cases}$$

9.2 Autre présentation: Principe fondamental de la dynamique

Equation 9.2 revient à écrire le Principe Fondamental de la dynamique. Dans un repère galiléen, pour tout système Σ , le torseur dynamique (dérivée par rapport au temps du torseur cinématique) est égal à la somme des torseurs des actions intérieures. Soit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \vec{v} dm &= \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \vec{v} \rho d\Sigma \\ &= \iiint_{\Sigma} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \rho + \vec{v} \rho \text{div} \vec{v} \right) d\Sigma \\ &= \iiint_{\Sigma} \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\rho}{dt} + \vec{v} \rho \text{div} \vec{v} \right) d\Sigma \\ &= \iiint_{\Sigma} \left(\rho \vec{\gamma} + \vec{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} \right) \right) d\Sigma \end{aligned}$$

donc avec la conservation de la masse

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Sigma} \vec{v} dm &= \iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} d\Sigma \\ &= \iiint_{\Sigma} \vec{f} d\Sigma + \iint_{\partial\Sigma} \vec{\sigma} \vec{n} d\partial\Sigma \end{aligned}$$

et le théorème de la divergence

$$\iiint_{\Sigma} \rho \vec{\gamma} d\Sigma = \iiint_{\Sigma} \vec{f} d\Sigma + \iint_{\partial\Sigma} \text{div} \vec{\sigma} d\Sigma$$

on retrouve le bilan de la quantité de mouvement

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} + \bar{f} = \rho \bar{\gamma}$$

L'équation de bilan sur les moments du principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$$\iiint_{\Sigma} \overline{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} dm = \iint_{\partial\Sigma} \overline{OM} \wedge \bar{\sigma} \cdot \vec{n} dx + \iiint_{\Sigma} \overline{OM} \wedge \bar{f} dx \quad (9.3)$$

10 Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Dans tous les développements à venir, nous nous placerons dans le cas des petites perturbations pour un solide en équilibre. En conséquence, nous omettrons les variables x et t .

10.1 Symétrie du tenseur des contraintes

On sait que

$$\iiint_{\Omega} \overline{OM} \wedge (\rho \vec{\gamma} - \vec{f}) dx = \iint_{\partial\Omega} \overline{OM} \wedge \vec{\sigma} \vec{n} dx$$

soit en notation indicielle

$$\iiint_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j (\rho \gamma_k - f_k) \vec{e}_i dx = \iint_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l \vec{e}_i dx$$

puis, par application du théorème de la divergence

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left[\varepsilon_{ijk} x_j (\rho \gamma_k - f_k) - \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) \right] \vec{e}_i dx &= 0 \\ \iiint_{\Omega} [\varepsilon_{ijk} x_j (\rho \gamma_k - f_k - \sigma_{kl,l}) - \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}] \vec{e}_i dx &= 0 \end{aligned}$$

et par application de l'équation du mouvement

$$\iiint_{\Omega} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \vec{e}_i dx = 0 \quad \forall \Omega(t)$$

c'est à dire

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \quad \forall i$$

ce qui implique

$$\varepsilon_{123}\sigma_{23} + \varepsilon_{132}\sigma_{32} = 0 \quad \varepsilon_{213}\sigma_{13} + \varepsilon_{231}\sigma_{31} = 0 \quad \varepsilon_{312}\sigma_{12} + \varepsilon_{321}\sigma_{21} = 0$$

ou encore

$$+\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0 \quad -\sigma_{13} + \sigma_{31} = 0 \quad +\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$$

donc en définitive

$$\sigma_{pq} = \sigma_{qp}$$

! Le tenseur des contraintes est symétrique!

10.2 Contrainte normale et contrainte tangentielle

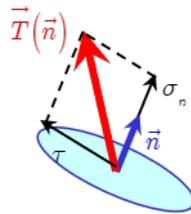


Figure 10.1

Considérons une facette de normale \vec{n} . Tout naturellement, le vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{n})$ peut être décomposé en une composante normale σ_n et une composante tangentielle τ .

$$\sigma_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (10.1)$$

et

$$\|\tau\| = \sqrt{(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2} \quad (10.2)$$

On dira que σ_n est positive en traction et négative en compression.

10.3 Directions principales, contraintes principales

La matrice représentant le tenseur des contraintes est symétrique, elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres sont réelles et appelées **contraintes principales** ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$). Les vecteurs propres, orthogonaux deux à deux, sont les **directions principales** ($\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$). On a donc:

$$\sigma_I = \vec{T}(\vec{n}_I) \cdot \vec{n}_I \quad , \quad \sigma_{II} = \vec{T}(\vec{n}_{II}) \cdot \vec{n}_{II} \quad , \quad \sigma_{III} = \vec{T}(\vec{n}_{III}) \cdot \vec{n}_{III}$$

10.4 Invariants

Le tenseur des contraintes possède trois invariants définis mathématiquement comme les coefficients de l'équation caractéristique $\det(\bar{\sigma} - \alpha \bar{I})$. C'est à dire les quantité scalaires:

$$\Sigma_I = Tr(\bar{\sigma})$$

$$\Sigma_{II} = \frac{1}{2} [Tr(\bar{\sigma})^2 - Tr(\bar{\sigma}^2)]$$

$$\Sigma_{III} = Det(\bar{\sigma})$$

Exprimés en fonction des contraintes principales, on obtient

$$\Sigma_I = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$\Sigma_{II} = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I$$

$$\Sigma_{III} = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}$$

10.5 Cercles de Mohr

Connaissant le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, on se propose de déterminer le domaine engendré par l'extrémité du vecteur contrainte quand \vec{n} varie. Par commodité, nous nous plaçons dans une base orthonormée dirigée suivant les directions principales de $\bar{\sigma}$. Soit

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad , \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T} = \begin{Bmatrix} n_1 \sigma_1 \\ n_2 \sigma_2 \\ n_3 \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

avec $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

D'après Equation 10.1

$$\sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

et d'après Equation 10.2

$$\tau^2 + \sigma_n^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

Dans l'hypothèse où les contraintes principales sont distinctes, on obtient alors après résolution du système:

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}$$

Si on ordonne les contraintes principales de telle sorte que $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, alors

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III}) \leq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) \geq 0$$

ou encore

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (10.3)$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (10.4)$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (10.5)$$

Dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte, d'après Equation 10.4, est donc intérieure au cercle centré sur $0\sigma_n$ d'abscisse $(\sigma_I + \sigma_{III})/2$ et de rayon $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$. Par contre, d'après Equation 10.3 (res. Equation 10.5), l'extrémité du vecteur contrainte est extérieure au cercle centré sur $0\sigma_n$ d'abscisses $(\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$ (resp. $(\sigma_I + \sigma_{II})/2$) et de rayon $(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2$ (resp. $(\sigma_I + \sigma_{II})/2$).

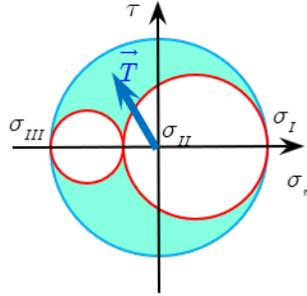


Figure 10.2

! Contrainte de cisaillement maximale

La contrainte de cisaillement maximale est déterminée par le rayon du grand cercle, soit:

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2} \quad (10.6)$$

Description des Cercles principaux:

Nous allons étudier la description du grand Cercle de Mohr. Les facettes concernées sont parallèles à la direction associée à la contrainte principale σ_{II} .

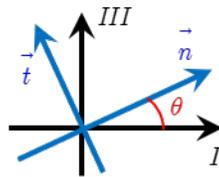


Figure 10.3

On constitue avec les directions I, III, II un trièdre direct $(O, \vec{e}_I, \vec{e}_{III}, \vec{e}_{II})$, la normale \vec{n} de la facette évoluant dans le plan $I III$.

Et on définit l'angle $\theta = (I, \vec{n})$, et le vecteur \vec{t} tel que (\vec{n}, \vec{t}, II) soit direct.

On a alors

$$\vec{n} = \text{Cos}\theta \vec{e}_I + \text{Sin}\theta \vec{e}_{III}$$

et

$$\vec{T} = \sigma_I \text{Cos}\theta \vec{e}_I + \sigma_{III} \text{Sin}\theta \vec{e}_{III}$$

En utilisant les formules de changement de base de $(O, \vec{e}_I, \vec{e}_{III}, \vec{e}_{II})$ à (\vec{n}, \vec{t}, II) , on a donc

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \text{Cos}2\theta \\ \tau &= -\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \text{Sin}2\theta \end{aligned}$$

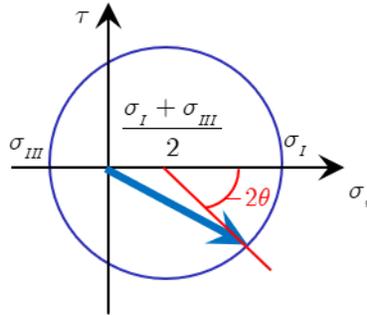


Figure 10.4

Lorsque la facette tourne autour de la direction de la contrainte principale σ_{II} d'un angle donné, l'extrémité du vecteur-contrainte tourne sur le cercle de Mohr d'un angle double dans le sens opposé (autour du centre du cercle).

À Retenir

🔥 Contrainte de Cauchy

$$\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \bar{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}$$

L'application $\bar{\sigma}(\vec{x}, t)$ s'appelle le **tenseur des contraintes de Cauchy** en x à l'instant t ; il caractérise, dans la configuration actuelle, les **efforts intérieurs de cohésion** exercés sur une partie du solide à travers l'élément de surface $\vec{n}d\Sigma$

🔥 Équation d'équilibre ou conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{f}(\vec{x}, t) + \operatorname{div}_x \bar{\sigma}(\vec{x}, t) = \rho \vec{\gamma} \quad \forall \vec{x} \in \Omega(t)$$

$$\bar{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) = \begin{cases} \vec{F}_e(\vec{x}, t) & \forall \vec{x} \in \partial\Omega_F(t) \\ \vec{R}(\vec{x}, t) & \forall \vec{x} \in \partial\Omega_U(t) \end{cases}$$

! Le tenseur des contraintes est symétrique!

La matrice représentant le tenseur des contraintes est symétrique, elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres sont réelles et appelées **contraintes principales** ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$). Les vecteurs propres, orthogonaux deux à deux, sont les **directions principales** ($\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$).

! Contrainte de cisaillement maximale

La contrainte de cisaillement maximale est déterminée par le rayon du grand cercle, soit:

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2}$$

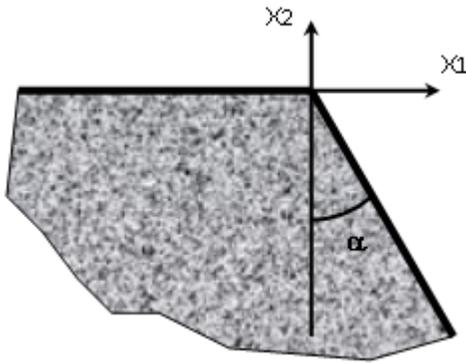
💡 Rappel sur les unités

- $\bar{\sigma}$ est un effort de cohésion par unité de surface : $\bar{\sigma} \equiv \left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$
- \vec{f} est une force par unité de volume : $\vec{f} \equiv \left[\frac{N}{m^3} \right]$
- \vec{F} est une force par unité de surface : $\vec{F} \equiv \left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$
- $[N] = [kg] \left[\frac{m}{s^2} \right]$

Exercices

i Exercice Contrainte 1

On considère un massif délimité par les plans $x_2 \leq 0$ et $x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha \leq 0$ où α est un angle donné.



Dans ce massif, en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs, règne le champ de contraintes suivant :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

avec $0 < \nu < 1/2$ et

$$\sigma_{11} = \rho g (-x_1 \tan \alpha + x_2 (1 - 2 \tan^2 \alpha))$$

$$\sigma_{12} = \rho g x_2 \tan \alpha$$

- Déterminer les densités volumiques et surfaciques d'efforts extérieurs exercés sur le massif.
- Calculer la contrainte tangentielle maximale.

💡 Correction exercice Contrainte 1

a) Pour déterminer les forces volumiques à l'intérieur du massif, on applique l'équation d'équilibre:

$$\vec{f} = -\text{div}\vec{\sigma} = - \begin{Bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \\ \sigma_{21,1} \\ \nu\sigma_{11,3} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -\rho g \tan \alpha + \rho g \tan \alpha \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \vec{0}$$

Il n'y a donc aucune force volumique participant à l'équilibre du massif.

Pour le bord du domaine $x_2 = 0$ On cherche les efforts surfaciques exercés sur le massif par le milieu extérieur. On note $\vec{n} = \vec{e}_2$ le vecteur normal unitaire sortant à la surface $x_2 = 0$ et \vec{F}_I la force surfacique exercée par le milieu extérieur sur le massif. On a:

$$\vec{F}_I = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu\sigma_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Or, pour $x_2 = 0$, on a $\sigma_{12} = 0$. Donc, $\vec{F}_I = \vec{0}$.

Pour le bord du domaine $x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = 0$, on note $\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2$ le vecteur normal unitaire sortant à la surface et \vec{F}_{II} la force surfacique exercée par le milieu extérieur sur le massif. On a:

$$\vec{F}_{II} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu\sigma_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{12} \sin \alpha \\ \sigma_{21} \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplifions la première composante, sachant que nous nous plaçons sur la surface $x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = 0$. On a donc:

$$\begin{aligned} & \sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{12} \sin \alpha \\ &= \rho g (-x_1 \tan \alpha + x_2 (1 - 2 \tan^2 \alpha)) \cos \alpha + \rho g x_2 \tan \alpha \sin \alpha \\ &= \rho g (x_2 \sin \alpha \tan \alpha + x_2 \cos \alpha - 2x_2 \tan^2 \alpha \cos \alpha + x_2 \tan \alpha \sin \alpha) \\ &= \rho g x_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{F}_{II} = \begin{Bmatrix} \rho g x_2 \cos \alpha \\ \rho g x_2 \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \rho g x_2 \vec{n}$$

Il s'agit d'un effort surfacique, correspondant à la pression hydrostatique exercée par un fluide de densité ρ sur le côté du massif.

b) Pour calculer la contrainte tangentielle maximale, nous devons déterminer les contraintes principales.

$$\begin{aligned} \det(\bar{\sigma} - \lambda \bar{I}) &= 0 \\ \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu\sigma_{11} - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow -\lambda(\sigma_{11} - \lambda)(\nu\sigma_{11} - \lambda) - \sigma_{12}^2(\nu\sigma_{11} - \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow (\nu\sigma_{11} - \lambda)(\lambda^2 - \lambda\sigma_{11} - \sigma_{12}^2) &= 0 \end{aligned}$$

Soit comme, $0 < \nu < 1/2$, en ordonnant les valeurs propres, on a :

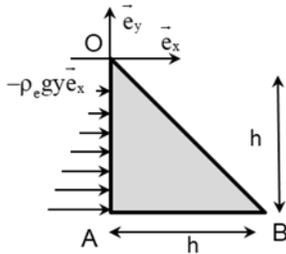
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_I = \frac{\sigma_{11} + \sqrt{\sigma_{11}^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2} \\ \sigma_{II} = \nu\sigma_{11} \\ \sigma_{III} = \frac{\sigma_{11} - \sqrt{\sigma_{11}^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2} \end{array} \right\}$$

D'après Equation 10.6, $\tau_{max} = \left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right|$, donc :

$$\tau_{max}^2 = \frac{1}{4} \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2$$

i Exercice Contrainte 2 : Équilibre statique d'un barrage

On s'intéresse à l'équilibre statique d'un barrage poids de section triangulaire (OAB triangle isocèle rectangle en A de côté h). Le barrage, encastré sur sa base, est soumis à son poids $-\rho_e g y \vec{e}_y$ et à la poussée de l'eau $-\rho_e g y \vec{e}_x$.



Sous l'hypothèse des déformations planes, on postule que le tenseur des contraintes dépend linéairement de x et de y :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = ax + by \\ \sigma_{yy} = cx + dy \\ \sigma_{xy} = ex + fy \end{cases}$$

Par application de l'équilibre, déterminer les constantes a, b, c, d, e, f .

💡 Correction exercice Contrainte 2 : Équilibre statique d'un barrage

Commençons par écrire l'équilibre volumique du barrage. Nous considérons un problème de statique, donc $\vec{\gamma} = \vec{0}$. Les forces extérieures volumiques à considérer sont la gravité, c'est à dire $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_y$. D'où:

$$\text{div} \bar{\bar{\sigma}} - \rho g \vec{e}_y = \begin{Bmatrix} a + f \\ e + d \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \\ 0 \end{Bmatrix} = \vec{0}$$

Parcourons maintenant les bords du massif.

Pour le bord du domaine $y = -h$, il y a un encastrement. On peut juste affirmer que le déplacement est nul. Une fois les contraintes calculées, on pourra en déduire les efforts surfacique de réaction.

Pour le bord du domaine $x = 0$, on doit considérer la poussée de l'eau. On note $\vec{n} = -\vec{e}_x$ le vecteur normal unitaire sortant à la surface. On a:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} &= -\rho_e g y \vec{e}_x \\ \Rightarrow \begin{cases} by = \rho_e g \\ fy = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour le bord du domaine $x + y = 0$, il n'y a aucune force surfacique appliquée. On note $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ le vecteur normal unitaire sortant à la surface. On a:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \begin{cases} a - b + e - f = 0 \\ e - f + c - d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Après résolutions des six équations ainsi mises en évidence, on obtient : $a = 0$; $b = \rho_e g$; $c = \rho g - 2\rho_e g$; $d = \rho g - \rho_e g$; $e = \rho_e g$; $f = 0$.

Part IV

Élasticité

Les lois de comportement des matériaux sont établies généralement de façon expérimentale afin de définir le comportement de la matière, en reliant *contraintes* et *déformations*, voire *vitesse de contrainte* ou *vitesse de déformation*, ainsi que la température, l'hygrométrie, ou tout autre paramètre par exemple chimique. Cette science des matériaux, avec la rhéologie et la thermodynamique, permet d'appréhender de nombreuses notions nécessaires en ingénierie comme, par exemple le fluage, la relaxation, la fatigue, la polymérisation, le changement de phase, la viscosité, ... etc ... Pour plus d'information voir par exemple Lemaitre et al. (2020) ou Paul Germain (1986b).

L'étude des lois de comportement ne fait pas à proprement parlé partie de la mécanique des milieux continus, cependant l'introduction d'une loi de comportement, permet de fermer le système et de mener rapidement à des applications fort intéressantes en ingénierie.

À ce stade, il est fréquent de considérer soit des matériaux solides, soit des matériaux fluides. Pour autant pourquoi faire cette distinction ?

Ainsi, à l'instar de Coirier and Nadot-Martin (2020), considérons les définitions suivantes tirées du dictionnaire *LeRobert* :

- **Fluide** : “*Qui n'est ni solide ni épais, qui coule aisément*”
- **Solide** : “*Qui a de la consistance, qui n'est pas liquide (tout en pouvant être plus ou moins mou)*”
- **Liquide** : “*Qui coule ou tend à couler*”

Ces définitions ne nous aident pas beaucoup ...

Si on se tourne vers [Wikipédia](#), on trouve que *le liquide n'a pas de forme propre : il prend celle du récipient sous l'effet de la pesanteur*. C'est en partant de ce postulat que Marc-Antoine Fardin, chercheur à l'Institut Jacques Monod, a reçu le prix Ig Nobel de physique en 2017 pour ses travaux intitulés “[Les chats sont-ils liquides ou solides ?](#)”. Dans certaines conditions, il semblerait que les chats soient en accord avec cette définition comme l'illustre la figure ci-après !



Figure 10.5: Un chat dont le corps se comporte comme un liquide (<https://fr.u-paris.fr/actualites/les-chats-sont-ils-liquides>)

Pour conclure sur cet aparté, on peut dire que la distinction entre solide et fluide, ou la classification entre mécanique des solides et mécanique des fluides, n'est pas si importante. C'est le choix de la loi de comportement qui est primordial.

Dans ce cours, nous allons nous intéresser à la mécanique des solides élastiques ou thermoélastiques. En effet, un enseignement de mécanique des fluides est déjà proposé au sein de **SeaTech**, si bien que nous nous focaliserons sur la mécanique des solides élastiques, en particulier en travaux dirigés, d'autant que ces notions sont nécessaires pour la compréhension du prochain cours de **Résistance des matériaux** (ou *théorie des poutres*). Cependant, une courte introduction à la mécanique des fluides sera proposée à la fin de ce cours.

11 Approche expérimentale: essai de traction

Pour déterminer l'évolution d'un système déformable, nous avons déjà déterminé les équations de la cinématique et de la sthénique. À ces équations, il est maintenant nécessaire d'adjoindre une relation supplémentaire reliant les efforts internes et les grandeurs cinématiques. Cette relation, appelée **Loi de Comportement**, dépend du matériau considéré. La construction d'une loi de comportement est basée sur des observations expérimentales.

Dans ce chapitre nous exposerons le modèle de comportement des matériaux élastiques, sous l'hypothèse des petites perturbations.

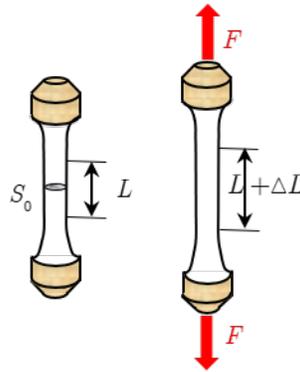


Figure 11.1

Pour effectuer un essai de traction simple sur un métal, on utilise une éprouvette cylindrique caractérisée par:

- des extrémités surdimensionnées
- des congés de raccordement (pour éviter les concentrations de contrainte)
- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette.

L'essai de traction consiste à enregistrer l'évolution de l'allongement relatif de la longueur initiale L en fonction de la force de traction F , ou du rapport F/S_0 , où S_0 représente l'aire initiale de la section de l'éprouvette.

Figure 11.2 représente un tel enregistrement pour un acier usuel. On remarque alors les propriétés suivantes:

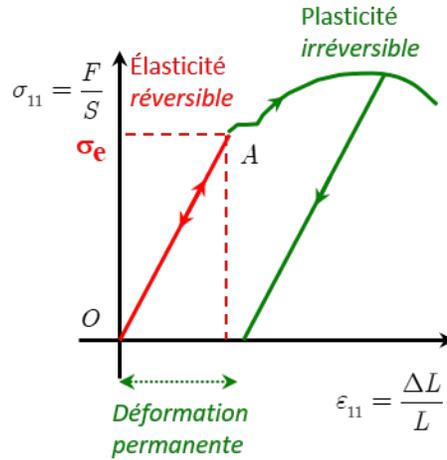


Figure 11.2: Courbe de traction

- Le diagramme est indépendant de la vitesse de chargement
- La partie OA du diagramme est réversible. Si on charge jusqu'à un niveau inférieur à σ_e , alors la décharge décrit la même courbe OA .
- La partie réversible est linéaire
- Si on effectue un chargement au delà du seuil σ_e , puis une décharge, l'éprouvette présente une déformation permanente.

La partie réversible du diagramme de traction est, par définition, représentative du **comportement élastique** du matériau. σ_e est la limite initiale d'élasticité du matériau. La linéarité du segment OA caractérise le **comportement élastique linéaire** du matériau.

12 Loi de comportement élastique linéaire (en HPP)

12.1 Forme générale

À partir des observations expérimentales, on peut estimer que les contraintes dépendent linéairement des déformations. En l'absence d'effets thermiques et de contraintes initiales, on a:

$$\bar{\sigma}(x, t) = \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}(x) : \bar{\varepsilon}(x, t)$$

$\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}$ est un tenseur du quatrième ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité du matériau.

$$\sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs de contrainte et de déformation, on peut montrer que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij}.$$

Le tenseur $\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{C}}$, dont la matrice représentative comporte 81 composantes, ne dépend donc plus que de 21 paramètres indépendants.

12.2 Matériau élastique homogène isotrope

Toutes les directions sont équivalentes, de telle sorte que la loi de comportement est invariante dans toute rotation de la configuration de référence. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux: acier, béton, ...

Si la configuration est libre de contraintes, alors la loi de comportement s'écrit:

! Loi de comportement élastique linéaire isotrope

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2 \mu \bar{\varepsilon} \quad (12.1)$$

ou encore en notation indicielle

$$\sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Les coefficients matériels λ et μ , qui dépendent de la particule considérée, sont appelés les **coefficients de Lamé**. Leur expression en fonction du **module d'Young E** et du **coefficient de Poisson ν** , est

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

ou

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

avec, en inversant Equation 12.1

🔥 Loi de comportement élastique linéaire isotrope

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{I} + \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} \quad (12.2)$$

12.3 Matériau élastique homogène orthotrope

Le matériau possède trois directions privilégiées deux à deux orthogonales. La loi de comportement est invariante par les symétries par rapport aux plans orthogonaux construits à partir de ces directions. Dans ces matériaux, on peut classer les tôles laminées, les composites tissés, le bois, certains bétons structurés, ...

Dans ce cas on montre que la matrice de comportement est définie par 9 paramètres indépendants. Dans le repère principal d'orthotropie, la loi se met sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}$$

Avec les conditions de symétrie

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

12.4 Matériau élastique homogène isotrope transverse

Un matériau homogène isotrope transverse est tel que la matrice de comportement est invariante par toute rotation autour d'un axe privilégié. En utilisant cette invariance, on montre que seuls 5 paramètres indépendants caractérisent le comportement. Si l'axe est porté par la direction 3, on a alors:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}$$

12.5 Caractéristiques de quelques matériaux

Matériaux isotropes usuels:

Matériau	E en Gpa	ν	ρ en kg/l
acier	210	0.285	7.8
fonte grise	90 à 120	0.29	7.1
aluminium	71	0.34	2.6
béton	10	0.15	2.4
fibre de verre E	73	0.15	2.54
Graphite HM	350	0.4	1.92
résine époxy	3.8	0.31	1.15

Matériaux composites:

	Unidirectionnel Verre/Epoxy 50%	Tissu Verre/Epoxy 50%	Unidirectionnel Carbone HT/Epoxy 50%	Unidirectionnel Kevlar/Epoxy 50%
ρ en g/cm^3	1,87	1,87	1,49	1,32
E_1 en Mpa	38000	21000	116000	65000
E_2 en Mpa	11500	21000	7500	4900
ν_{12}	0,28	0,26	0,32	0,34

12.6 Critères de limite d'élasticité

Les critères de résistance que nous allons définir représentent des valeurs limites pour les contraintes maximales, et permettent de ce fait de garder un caractère élastique aux déformations.

12.6.1 Critère de Tresca

Il consiste à considérer de manière indépendante les trois contraintes de cisaillement maximal du tricerple de Mohr. Soit en fonction des contraintes principales

$$\text{Sup}\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|\} \leq 2\sigma_e$$

12.6.2 Critère de Von-Mises

$$\sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2)} \leq \sigma_e$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2))} \leq \sigma_e$$

12.6.3 6.3 Critère de Hill

le critère de Hill s'applique dans le cas de matériaux élastiques orthotropes

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1$$

où F, G, H, L, M, N sont des constantes fonctions des contraintes à ruptures.

13 Le problème d'élasticité

13.1 Écriture générale

Cinématique : + Équations de compatibilité

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u})$$

$$\vec{u} = \vec{U}_0(X) \quad \text{sur } \partial\Omega_U$$

Équilibre :

$$\text{div } \bar{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\bar{\sigma} \vec{n} = \begin{cases} \vec{F} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \vec{R} & \text{sur } \partial\Omega_U \end{cases}$$

Loi de comportement :

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon}$$

13.2 Formulation en déplacement

$$\text{div } \bar{\sigma} + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\text{div} (\lambda \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon}) + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

$$\lambda \nabla (\text{Tr}(\bar{\varepsilon})) + 2\mu \text{div}(\bar{\varepsilon}) + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

$$\lambda \nabla (\text{div } \vec{u}) + \mu \text{div}(\nabla \vec{u}) + \mu \text{div}(\nabla^T \vec{u}) + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

soit l'équation de Navier

$$(\lambda + \mu) \nabla (\text{div } \vec{u}) + \mu \text{div}(\nabla \vec{u}) + \vec{f} = \rho \vec{\gamma}$$

Remarque: Si le champ de forces volumiques est tel que $div \vec{f} = \vec{0}$ et que l'on prend la divergence de l'équation de Navier, alors

$$(\lambda + 2\mu)\Delta(div \vec{u}) = 0$$

si bien que $div \vec{u}$ est une fonction harmonique.

13.3 Formulation en contrainte

En partant de l'écriture des équations de compatibilité, on peut démontrer les **équations de Michell**

$$div(\nabla \bar{\sigma}) + \frac{1}{1+\nu} \nabla(\nabla Tr(\bar{\sigma})) + \frac{\nu}{1-\nu} div \vec{f} \bar{I} + \nabla \vec{f} + \nabla^T \vec{f} = \vec{0}$$

Soit, si le champ de force est uniforme, on obtient les **équations de Beltrami**.

$$(1 + \nu)div(\nabla \bar{\sigma}) + \nabla(\nabla Tr(\bar{\sigma})) = \vec{0} \quad (13.1)$$

13.4 Théorème de superposition

Si $(\vec{U}, \vec{f}, \vec{F})$ et $(\vec{V}, \vec{g}, \vec{G})$ sont deux jeux de données engendrant respectivement des solutions \vec{u} et \vec{v} , alors $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est solution du problème de données $(\alpha\vec{U} + \beta\vec{V}, \alpha\vec{f} + \beta\vec{g}, \alpha\vec{F} + \beta\vec{G})$ (Le problème est évidemment linéaire).

13.5 Élasticité plane

13.5.1 Contraintes planes

Dans le cas où le chargement est dans le plan 12, la structure mince dans la direction 3, on peut faire l'hypothèse que le problème est plan et libre de contraintes dans la direction 3.

Dans ce cas

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et d'après la loi de comportement

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

On remarquera que la déformation suivant 3 est non nulle.

13.5.2 Déformations planes

Dans le cas où le chargement est dans le plan 12, la structure très élancée dans la direction 3, sans possibilités de déplacement suivant 3, on peut faire l'hypothèse que le problème est plan sous l'hypothèse des déformations planes.

Dans ce cas

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et d'après la loi de comportement

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

On remarquera que la contrainte suivant 3 est non nulle.

D'après Equation 12.2

$$\varepsilon_{33} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0$$

donc

$$\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Nous allons prouver que les contraintes peuvent être déterminées par une seule fonction scalaire.

En appliquant l'équation d'équilibre Equation 9.2 on a :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \exists \varphi(x_1, x_2) / \sigma_{11} = \varphi_{,2} \quad \text{et} \quad \sigma_{12} = -\varphi_{,1} \\ \exists \psi(x_1, x_2) / \sigma_{21} = \psi_{,2} \quad \text{et} \quad \sigma_{22} = -\psi_{,1} \end{cases}$$

comme le tenseur des contraintes est symétrique, on a $\psi_{,2} + \varphi_{,1} = 0$, donc

$$\exists \chi(x_1, x_2) / \varphi = \chi_{,2} \quad \text{et} \quad \psi = -\chi_{,1}$$

en définitive on a prouvé

$$\exists \chi(x_1, x_2) / \begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} \end{cases}$$

χ est appelée la fonction d'**Airy**.

Le tenseur des contraintes devant vérifier l'équation de Beltrami Equation [13.1](#), on a

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} = 0$$

d'où

$$\Delta\Delta\chi = 0$$

χ est donc une fonction biharmonique.

13.6 Thermoélasticité

13.6.1 Thermodynamique : équations de bilan

Jusqu'à présent nous avons utilisé les équations de bilan suivantes:

Conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad \text{dans } \Omega$$

Conservation du moment cinétique Equation 9.3

Nous introduisons maintenant l'équation de bilan de conservation d'énergie, ou encore le premier principe de la thermodynamique:

$$\frac{d}{dt} (E + K) = P_{ext} + Q$$

où

E représente l'énergie interne $E = \int_{\Omega} \rho e \, d\Omega$ (e densité d'énergie interne)

K représente l'énergie cinétique $K = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, d\Omega$ (\vec{v} la vitesse)

P_{ext} représente la puissance des efforts extérieurs $P_{ext} = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega$

Q représente le taux de chaleur reçu $Q = \int_{\Omega} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Omega$ (q vecteur de chaleur et r source de chaleur)

Par application du premier principe, en utilisant Equation 7.7 on a:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{\gamma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Omega$$

en utilisant la conservation de la quantité de mouvement Equation 9.2

$$\int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} \, d\Omega + \int_{\Omega} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Omega$$

Soit, par application du théorème de la divergence, la forme locale du premier principe

$$\rho \dot{e} = \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} + r - \text{div} \vec{q}$$

Nous présentons également, sans plus de discussion le **second principe de la thermodynamique**:

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d\Omega$$

où T est la température et S l'entropie. Ce second principe s'écrit sous sa forme locale

$$\rho \dot{s} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0$$

où s représente l'entropie massique

13.6.2 Équation de la chaleur

On peut exprimer l'énergie interne massique e en fonction de l'entropie massique s , de la température T et l'énergie libre ψ .

$$e = \psi + Ts$$

En thermoélasticité, sous l'hypothèse des petites perturbations, pour un écart de température par rapport à la température au repos $T - T_0$ petit, on a:

$$\psi = \psi(\bar{\varepsilon}, T)$$

Grace au second principe on peut montrer que

$$\bar{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$$

donc, le premier principe peut s'écrire

$$\rho \dot{e} = \rho \dot{\psi} + \rho \dot{T} s + \rho T \dot{s}$$

et comme

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}} : \bar{\dot{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} = \frac{\bar{\sigma}}{\rho} : \bar{\dot{\varepsilon}} - s \dot{T}$$

on a

$$\bar{\sigma} : \bar{\dot{\varepsilon}} - \rho s \dot{T} + \rho \dot{s} T + \rho s \dot{T} = \bar{\sigma} : \bar{\dot{\varepsilon}} + r - \text{div} \bar{q}$$

or

$$\dot{s} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial T} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\varepsilon} \partial T} : \bar{\dot{\varepsilon}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \bar{\dot{\varepsilon}} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T}$$

c'est à dire que le premier principe s'écrit

$$-T \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \bar{\dot{\varepsilon}} + \rho T \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} = r - \text{div} \bar{q}$$

En introduisant la chaleur spécifique $C = T \frac{\partial s}{\partial T}$

$$-T \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \bar{\dot{\varepsilon}} + \rho C \dot{T} = r - \text{div} \bar{q}$$

puis la loi de Fourier $\bar{q} = -\bar{k} \nabla T$, où \bar{k} représente la conductivité thermique,

$$-T \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \bar{\dot{\varepsilon}} + \rho C \dot{T} = r + \text{div} \bar{k} \nabla T$$

En général la contribution mécanique est négligeable par rapport aux autres contributions, si bien que l'équation de bilan de l'énergie conduit à l'équation de la chaleur :

! Équation de la chaleur

$$\rho C \dot{T} = \rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = r + \text{div} \bar{k} \nabla T \quad (13.2)$$

Dans le cas où le problème à traiter est stationnaire, sans source de chaleur, avec une conductivité constante, on retrouve l'équation habituelle :

$$\Delta T = 0$$

13.6.3 Loi de comportement thermo-élastique

Dans le cadre de la thermo-élasticité, l'énergie libre spécifique s'écrit comme un développement limité au second ordre en déformation et température, ou plutôt en déformation et écart de température $\tau = T - T_0$ (supposés " petits ") :

$$\rho\psi(\bar{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} : \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} - \rho s \tau - \frac{1}{2} \rho b \tau - \bar{\beta} : \bar{\varepsilon} \tau$$

Par définition

$$\bar{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}, T) = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} - \bar{\beta} \tau = \bar{\bar{C}} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\alpha} \tau)$$

où $\bar{\alpha}$ représente le tenseur des dilatations thermiques

Dans le cas isotrope la loi de comportement thermo-élastique s'écrit :

! loi de comportement thermo-élastique

$$\bar{\sigma} = \lambda Tr(\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \bar{\alpha} \tau \quad (13.3)$$

À Retenir

🔥 Loi de comportement élastique linéaire isotrope

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \lambda \operatorname{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2 \mu \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} &= -\frac{\nu}{E} \operatorname{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{I} + \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma}\end{aligned}$$

🔥 Le problème d'élasticité

Dans le domaine :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) \\ \operatorname{div} \bar{\sigma} + \vec{f} &= \rho \vec{\gamma} \\ \bar{\sigma} &= \lambda \operatorname{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2 \mu \bar{\varepsilon}\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} \vec{n} &= \vec{F} \text{ sur } \partial\Omega_F \\ \vec{u} &= \vec{U}_{imp} \text{ sur } \partial\Omega_U\end{aligned}$$

🔥 Équation de la chaleur

$$\rho C \dot{T} = \rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = r + \operatorname{div} \bar{k} \nabla T$$

💡 Rappel sur les unités

- Les coefficients de Lamé sont homogènes à une contrainte : $\lambda, \mu \equiv \left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$
- Le module d'Young E est homogène à une contrainte : $E \equiv \left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$

- D'après la loi de comportement, le coefficient de Poisson ν est sans dimension :
 $\nu \equiv [-]$

Exercices

Exercice Élasticité 1 : Corde pesante

On considère une corde de longueur L , fixée en une extrémité et s'allongeant librement sous l'action de la pesanteur. On se place sous l'hypothèse des petites perturbations et on suppose que la corde est constituée d'un matériau à comportement élastique linéaire (module d'Young E , coefficient de Poisson ν). On note x l'axe de la corde orienté positivement vers le bas. On fait l'hypothèse que le tenseur des contraintes est uniaxial $\sigma(x) = \sigma(x)\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x$.

- Déterminer la contrainte $\sigma(x)$.
- Déterminer la déformation ε_{xx} , puis en déduire le déplacement axial $u(x)$.
- Déterminer l'allongement de la corde.

Correction exercice Élasticité 1 : Corde pesante

- a) La corde est à l'équilibre sous l'action de la pesanteur. On considère un problème de statique, donc la contrainte est donnée par l'équation d'équilibre :

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

soit, comme l'axe x est orienté positivement vers le bas :

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} + \rho g = 0$$

En intégrant cette équation, on trouve :

$\sigma(x) = -\rho g x + C$ où C est une constante d'intégration. Pour $x = L$, aucun effort n'est appliqué sur l'extrémité de ma corde, donc $\bar{\sigma} \bar{n} = \vec{0}$, ou encore $\sigma(L) = 0$. On en déduit que :

$$\sigma(x) = \rho g (L - x)$$

- b) Connaissant la contrainte, la déformation est donnée par la loi de comportement élastique linéaire isotrope :

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \operatorname{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{I} + \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma}$$

d'où :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma(x) - \frac{\nu}{E} \sigma(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{\rho g}{E} (L - x)$$

Or $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, donc par intégration,

$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C'$$

où C' est une constante d'intégration. Pour $x = 0$, on a $u(0) = 0$, donc $C' = 0$.
On en déduit :

$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

c) l'allongement de la corde est donné par :

$$\delta L = u(L) = \frac{\rho g}{E} \left(L^2 - \frac{L^2}{2} \right) = \frac{\rho g L^2}{2E}$$

i Exercice Élasticité 2 : Pipeline

On considère un tube de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e , soumis à une pression interne P_i et une pression externe P_e , ainsi qu'à une température intérieure T_i et une température extérieure T_e . On suppose que le matériau constituant le tube est isotrope obéissant à une loi de comportement thermoélastique linéaire de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation α . C'est le cas, par exemple, d'un pipeline posé au de l'océan, soumis à la pression de l'eau et à la température de l'eau et pompant sous pression un mélange (en négligeant la convection, en affectant la température des fluides aux parois). On négligera le poids propre du tube. Sous ces conditions, en se plaçant en système de coordonnées cylindriques, les symétries du problème nous permettent de faire l'hypothèse que le problème est indépendant des variables angulaires θ et axiales z et que le champ de déplacement est de la forme $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$.

Déterminer les champs de température, de déplacement, de contrainte et de déformation dans le tube.

💡 Correction exercice Élasticité 2 : Pipeline

On résout un problème de thermoélasticité. En négligeant la contribution mécanique dans l'équation de la chaleur Equation 13.2, le couplage thermo-mécanique est un couplage faible. On commence donc par résoudre le problème de thermique.

$$\rho C \dot{T} = \rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = r + \text{div} \bar{k} \nabla T$$

En stationnaire, sans apport volumique, pour une conductivité constante, le problème se réduit à : $\Delta T = 0$.

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

T ne dépendant que de r , on note $T' = \frac{\partial T}{\partial r}$ et on en déduit :

$$\Delta T = T'' + \frac{T'}{r}$$

$$rT'' + T' = 0$$

$$rT' = cste$$

$$T = a \ln(r) + b$$

où a et b sont des constantes d'intégration. On utilise alors les conditions aux limites $T(R_i) = T_i$ et $T(R_e) = T_e$ pour déterminer les constantes d'intégration :

$$T(r) = (T_e - T_i) \frac{\ln(r/R_i)}{\ln(R_e/R_i)} + T_i$$

On peut maintenant aborder le problème mécanique. Le déplacement radial u ne dépendant que de r , on note $u' = \frac{\partial u}{\partial r}$.

Pour calculer la déformation, on commence par calculer le gradient du déplacement :

$$\nabla(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où, sous l'hypothèse des petites perturbations

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la loi de comportement, on peut calculer la contrainte. Notons $\delta T(r) = T(r) - T_0$ la variation de température par rapport à la température du matériau au repos. On a alors:

$$\bar{\sigma} = \lambda T r (\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \bar{\alpha} \tau = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

avec

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(u' + \frac{u}{r} \right) + 2\mu u' - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta T$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left(u' + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta T$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(u' + \frac{u}{r} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta T$$

On peut alors appliquer l'équilibre, en l'absence de pesanteur et en statique:

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{array} \right\} = \vec{0}$$

soit, en tenant de l'indépendance en θ et z et du fait que le tenseur des contraintes est diagonal, seule la première composante est à considérer :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

d'où

$$\lambda \left(u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + 2\mu u'' - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial \delta T}{\partial r} + \frac{2\mu u' - 2\mu \frac{u}{r}}{r} = 0$$

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha a}{(\lambda + 2\mu) r}$$

On note $A = \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha a}{(\lambda + 2\mu)}$ soit

$$\left(u' + \frac{u}{r} \right)' = \frac{A}{r}$$

par intégration

$$u' + \frac{u}{r} = A \ln(r) + cste$$

$$r u' + u = A r \ln(r) + cste r$$

$$ru = \frac{Ar^2}{2} \ln(r) - \frac{Ar^2}{4} + Br^2 + C$$

soit

$$u = \frac{Ar}{2} \ln(r) - \frac{Ar}{4} + Br + \frac{C}{r}$$

où B et C sont des constantes d'intégration.

Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites.

- Pour $r = R_i$, une pression $P_i \vec{e}_r$ est exercée. La normale sortante au domaine est $\vec{n} = -\vec{e}_r$, donc:

$$\bar{\sigma} \vec{n} = -\sigma_{rr} \vec{e}_r = P_i \vec{e}_r$$

soit

$$\sigma_{rr}(R_i) = -P_i$$

- Pour $r = R_e$, une pression $-P_e \vec{e}_r$ est exercée. La normale sortante au domaine est $\vec{n} = \vec{e}_r$, donc:

$$\bar{\sigma} \vec{n} = \sigma_{rr} \vec{e}_r = -P_e \vec{e}_r$$

soit

$$\sigma_{rr}(R_e) = -P_e$$

comme

$$\sigma_{rr}(r) = \lambda (A \ln r + 2B) + 2\mu \left(\frac{A}{2} \ln r + \frac{A}{4} + B - \frac{C}{r^2} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta T$$

ou encore

$$\sigma_{rr}(r) = 2B(\lambda + \mu) - 2\mu \frac{C}{r^2} + S(r)$$

avec

$$S(r) = A(\lambda + \mu) \ln r + \mu \frac{A}{2} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta T(r)$$

on détermine les constantes d'intégration B et C :

$$B = \frac{R_e^2 (S(R_e) + P_e) - R_i^2 (S(R_i) + P_i)}{2(\lambda + \mu)(R_i^2 - R_e^2)}$$

$$C = \frac{R_e^2 R_i^2 (S(R_e) + P_e - S(R_i) - P_i)}{2\mu (R_i^2 - R_e^2)}$$

On vérifie que B est sans dimension et que C est homogène à des m^2 .

i Exercice Élasticité 3 : Planète

Soit une boule pleine isolée (sans atmosphère) et soumise à son propre champ de gravitation. Si \vec{g} désigne le module de l'accélération de la pesanteur à la surface de la boule, les forces de volume en tout point M de la boule, en coordonnées sphériques, sont $\vec{f} = -\frac{\rho g r}{R} \vec{e}_r$ où R est le rayon de la boule, O son centre, $r = OM$ et ρ la masse volumique de la substance la composant.

Dans l'hypothèse des petites déformations élastiques, déterminer le champ des déplacements.

💡 Correction exercice Élasticité 3 : Planète

Le domaine à considérer est une boule et le chargement qui lui est appliqué est une force volumique radiale, ne dépendant que de r . Par raison de symétrie, en système de coordonnées sphériques, on fait donc l'hypothèse que le champ de déplacement est radial et ne dépend que de la variable r , c'est-à-dire $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$.

u ne dépendant que de r , on note $u' = \frac{\partial u}{\partial r}$. Pour calculer la déformation, on commence par calculer le gradient du déplacement :

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \cot \theta u_\varphi \right) \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \cot \theta u_\theta + u_r \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{r} \end{bmatrix}$$

d'où, sous l'hypothèse des petites perturbations

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}) = \begin{bmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{r} \end{bmatrix}$$

En utilisant la loi de comportement, on peut calculer la contrainte :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left(u' + 2\frac{u}{r} \right) + 2\mu u' \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left(u' + 2\frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r} \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'équilibre en statique, soit:

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} - \frac{\rho g r}{R} \vec{e}_r = \vec{0}$$

avec

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cot \theta) \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}) \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta + 3\sigma_{r\varphi}) \end{array} \right\}$$

soit, en tenant de l'indépendance en θ et φ et du fait que le tenseur des contraintes est diagonal, seule la première composante est à considérer :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \frac{\rho g r}{R}$$

d'où

$$\lambda \left(u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} \right) + 2\mu u''' + \frac{2}{r} \left(2\mu u' - 2\mu \frac{u}{r} \right) = \frac{\rho g r}{R}$$

$$u'' + 2\frac{u'}{r} - 2\frac{u}{r^2} = \frac{\rho g r}{R(\lambda + 2\mu)}$$

On note $A = \frac{\rho g}{R(\lambda + 2\mu)}$ soit

$$\left(u' + 2\frac{u}{r} \right)' = Ar$$

par intégration

$$u' + 2\frac{u}{r} = \frac{Ar^2}{2} + cste$$

$$r^2 u' + 2ru = \frac{Ar^4}{2} + cste r^2$$

$$r^2 u = \frac{Ar^5}{10} + cste r^3 + cste$$

soit

$$u = \frac{Ar^3}{10} + Br + \frac{C}{r^2}$$

où B et C sont des constantes d'intégration. Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites.

- Pour $r = 0$, on a par raison de symétrie sphérique, $u(0) = 0$, donc $C = 0$.

- Pour $r = R$, la normale sortante est $\vec{n} = \vec{e}_r$, la surface est libre de charges, donc $\vec{\sigma} \vec{n} = \vec{0}$, soit $\sigma_{rr}(R) = 0$
et

$$B = -\frac{AR^2}{10} \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}$$

On vérifie que B est sans dimension.

Part V

Introduction à la mécanique des fluides

Ce court chapitre a pour but d'introduire la loi de comportement d'un fluide newtonien et l'équation de Navier-Stokes qui en découle. Il s'agit d'une courte introduction au cours de mécanique des fluides qui est dispensé en première année à [SeaTech](#).

14 Loi de comportement en mécanique des fluides

En mécanique des fluides, la loi de comportement est définie par une relation entre la contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse (Figure 14.1). Comme en mécanique des solides, on peut définir une multitude de lois de comportement, linéaires (comme pour l'eau), non-linéaires (comme pour le sang), à seuil (comme pour la peinture), ...

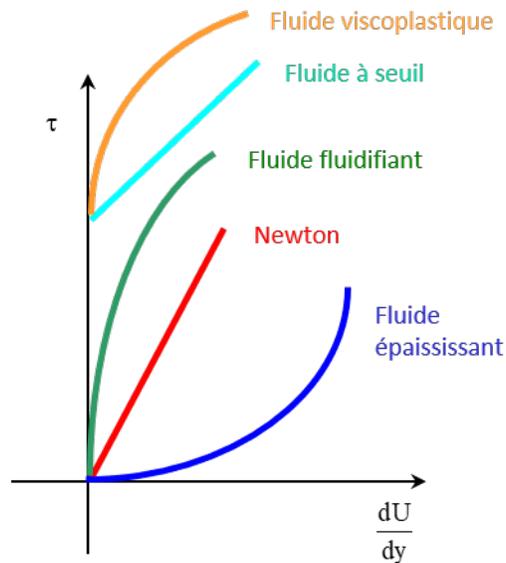


Figure 14.1: Lois de comportements en mécanique des fluides

On note $\overline{\overline{D}}$ le tenseur des vitesses de déformation tel que :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T)$$

où \vec{v} représente le champ de vitesse.

Pour un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au tenseur des vitesses de déformation, si bien que la loi de comportement reliant la contrainte au tenseur des vitesses de déformation s'écrit :

! Loi de comportement d'un fluide Newtonien

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \lambda \text{Tr}(\bar{D})\bar{I} + 2\mu\bar{D}$$

où λ et μ sont les coefficients de viscosité (à ne pas confondre avec les coefficients de Lamé!) et p est la pression.

15 Navier-Stokes

On appelle *équations de Navier-Stokes*, l'équation de continuité et l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien. Partons donc de l'équation d'équilibre :

$$\rho \vec{\gamma} = \text{div} \bar{\bar{\sigma}} + \vec{f}$$

On exprime la contrainte pour un fluide newtonien :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div} \left(-p \bar{\bar{I}} + \lambda \text{Tr} \left(\bar{\bar{D}} \right) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{D}} \right) + \vec{f}$$

On exprime le tenseur des vitesses de déformation en fonction du champ de vitesse :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div} \left(-p \bar{\bar{I}} \right) + \text{div} \left(\lambda \text{div} \vec{v} \right) \bar{\bar{I}} + \text{div} \left(\mu \left(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \right) \right) + \vec{f}$$

ou encore :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = -\nabla p + \lambda \nabla (\text{div} \vec{v}) + \mu \text{div} (\nabla \vec{v}) + \mu \text{div} (\nabla^T \vec{v}) + \vec{f}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\text{div} \vec{v}) + \mu \text{div} (\nabla \vec{v}) + \vec{f}$$

! Équations de Navier-Stokes compressible

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\text{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}$$

Dans le cas où le fluide est incompressible, comme l'eau, l'équation de continuité se réduit à $\text{div} \vec{v} = 0$, si bien que les équations de Navier-Stokes deviennent :

! Équations de Navier-Stokes incompressible

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\vec{f}}{\rho}$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ représente la viscosité dynamique.

16 Exemple : Écoulement de Couette-Poiseuille plan

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible et newtonien, de viscosité dynamique ν et de masse volumique ρ . Les équation de Navier-Stokes incompressible s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{f_1}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{f_2}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{f_3}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \end{cases}$$

L'écoulement de Couette-Poiseuille **plan** ($v_3 = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$) est un écoulement **stationnaire** ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), confiné entre deux plaques parallèles distantes de h ($v_2 = 0$), dont l'une est immobile tandis que l'autre est animée d'une vitesse constante U . Par ailleurs, on néglige la pesanteur ($f_1 = f_2 = f_3 = 0$). On a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{cases}$$

Comme $\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$, on en déduit que $p = p(x_1)$. De plus, comme $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$, on en déduit

que $v_1 = v_1(x_2)$. Soit par intégration de $\nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}$, avec les conditions aux limites $v_1(0) = 0$ et $v_1(h) = U$, on obtient finalement :

$$v_1(x_2) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2(x_2 - h) + U \frac{x_2}{h}$$

Ainsi, en fonction du gradient de pression (Figure 16.1), on retrouve tous les cas particuliers de l'écoulement de Couette-Poiseuille plan.

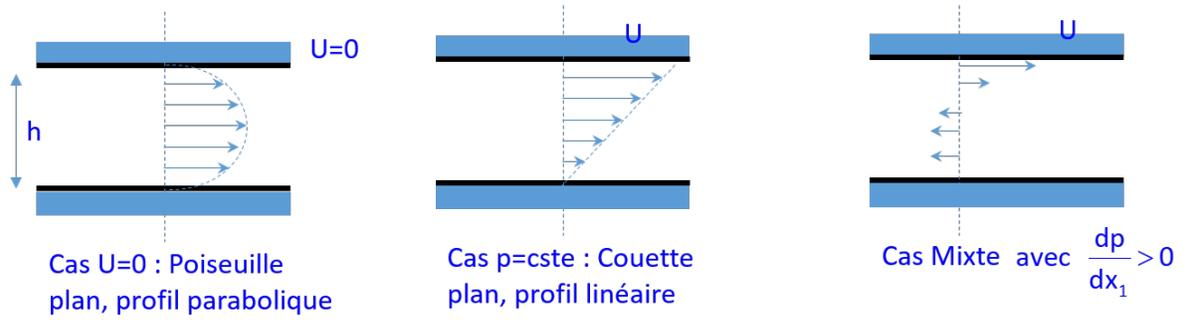


Figure 16.1: Écoulement de Couette-Poiseuille plan

Références

- Coirier, Jean, and Carole Nadot-Martin. 2020. *Mécanique Des Milieux Continus*.
- Forest, Samuel, and Michel Amestoy. 2022. *Mécanique Des Milieux Continus: Volume 1 : Théorie*.
- Germain, Paul. 1986a. *Mécanique Tome i*. Cours école Polytechnique, Ellipses.
- . 1986b. *Mécanique Tome II*. Cours école Polytechnique, Ellipses.
- Germain, P., and P. Muller. 1980. *Introduction à La mécanique Des Milieux Continus*. Masson. <https://books.google.fr/books?id=uhkIAQAIAAJ>.
- Lemaitre, J., J. L. Chaboche, A. Benallal, and R. Desmorat. 2020. *Mécanique Des Matériaux Solides - 3e éd*. Dunod. <https://books.google.fr/books?id=PRHUDwAAQBAJ>.
- Salençon, Jean. 2005. *Mécanique Des Milieux Continus: Concepts Généraux*. Ecole Polytechnique. <https://portail.polytechnique.edu/editions/catalogue/mecanique/mecanique-des-milieux-continus-tome-1>.