HAL
open science

Modélisation des tsunamis : propagation et impact

Kévin Pons

To cite this version:

Kévin Pons. Modélisation des tsunamis : propagation et impact. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Toulon, 2018. Français. NNT : 2018TOUL0014 . tel-02457781

HAL Id: tel-02457781

https://theses.hal.science/tel-02457781

Submitted on 5 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE Mer et sciences (ED548)

Institut de Mathématiques de Toulon

THÈSE présentée par :

Kévin PONS

soutenue le : **14 décembre 2018**

pour obtenir le grade de Docteur en Mécanique des fluides

Modélisation des tsunamis : propagation et impact

THÈSE dirigée par :

M. GOLAY Frédéric	Maître de conférence HDR, Université de Toulon

RAPPORTEURS :

M. RICCHIUTO Mario	Directeur de recherche, INRIA Bordeaux
M. GAVRILYUK Sergey	Professeur, Université Aix-Marseille

JURY de soutenance:

M. GAVRILYUK Sergey	Professeur, Université Aix-Marseille
M. REY Vincent	Professeur, Université de Toulon
Mme. HEBERT Hélène	Ingénieur-Chercheur HDR, CEA
M. ERSOY Mehmet	Maître de conférence, Université de Toulon
M. MARCER Richard	Ingénieur-Docteur, Principia
M. GOLAY Frédéric	Maître de conférence HDR, Université de Toulon

Remerciements

Ce paragraphe scelle la fin d'un peu plus de trois années de travail très enrichissantes. Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Frédéric Golay. Merci pour tes conseils, ta patience, ta confiance et la liberté de recherche que tu m'as offerte. Je remercie également Richard Marcer qui a encadré cette thèse à Principia. Merci pour la liberté de travail dont j'ai bénéficié, tes conseils et l'opportunité que tu m'as donnée d'aller travailler sur Iter alors que ce manuscrit n'était pas terminé.

Je remercie aussi Mehmet Ersoy, entres autres, pour les nombreuses discussions qui ont été plus précieuses dans ce travail. Je remercie le directeur du laboratoire IMATH, Cédric Galusinski pour le temps qu'il m'a consacré, ainsi que tous les autres membres du laboratoire.

Je remercie les membres du jury Mario Ricchiuto, Sergey Gavrilyuk, Vincent Rey, Hélène Hebert, Mehmet Ersoy et Richard Marcer pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leurs conseils précieux.

Cette thèse s'est déroulée dans le cadre du projet Tandem dans lequel j'ai pu côtoyer, de temps à autre, des experts du domaine qui m'ont plus d'une fois éclairé. Merci également aux doctorants du projet, Marine, Luca, Manuel, Andrea, Lucie pour les discussions scientifiques, ou non, qui souvent se terminaient dans ces fameux refuges où les écoulements à bulles fascinent tout le monde.

Merci aux collègues et plus de Principia et de l'IMATH, Thomas, David, Jalal, Mathieu, les Camille, Charles, Benoît, Rémi, Guillaume, Samy, Anne-Laure, Fabien et Dimitri.

Enfin je remercie ma famille et mes amis avec un pensée très particulière pour Manon et mes parents à qui je dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction **12**

1 Les tsunamis **13**
1.1 Les tsunamis . . . 14
1.2 Echelles caractéristiques, phénomènes prépondérants et modélisation . . . 15
1.2.1 Phase de géneration . . . 15
1.2.2 Phase de propagation . . . 18
1.2.3 Impact et inondation . . . 20

2 Modèles pour les ondes longues **31**
2.1 Introduction . . . 32
2.2 Dérivation . . . 33
2.2.1 Notations . . . 33
2.2.2 Système de départ . . . 33
2.2.3 Conditions aux limites . . . 33
2.2.4 Equations d'Euler incompressible moyennées sur la verticale . . . 34
2.2.5 Hypothèses suplémentaires et adimensionnement . . . 35
2.2.6 Modèle de Serre . . . 37
2.2.7 Modèle de Boussinesq . . . 41
2.2.8 Modèle de Saint-Venant . . . 41
2.2.9 Equations sur l'énergie . . . 42
2.3 Bilan . . . 42

3 Un modèle de Serre-Green-Naghdi dissipatif **43**
3.1 Introduction . . . 44
3.2 Dissipation d'énergie et turbulence . . . 45
3.3 Un modèle SGN approché dissipatif . . . 47
3.4 Revue des critères de déferlement . . . 49
3.5 Modélisation du transfert SGN-SV . . . 50
3.6 Particularité de résolution . . . 53
3.7 Bilan . . . 53

4 Modélisation des écoulements multi-phases **55**
4.1 Introduction . . . 56
4.2 Les différentes approches numériques . . . 57
4.3 Construction des modèles bi-phases . . . 58
4.3.1 Modèle en déséquilibre total . . . 59
4.3.2 Modèle en équilibre mécanique . . . 60
4.3.3 Modèle isentropique en équilibre mécanique . . . 62
4.3.4 Modèle isentropique en équilibre mécanique relaxé . . . 63
4.3.5 Modèle minimum . . . 64

4.3.6 Suppléments sur la réduction isentropique et les lois d'états . . . 64
4.4 Quelques remarques et limitations sur les modèles présentés . . . 66
4.5 Bilan . . . 67

5 Méthodes numériques **69**
5.1 Introduction . . . 70
5.2 Méthode des volumes finis . . . 71
5.3 Résolution du problème de Riemann . . . 73
5.3.1 Equation scalaire . . . 73
5.3.2 Système linéaire . . . 74
5.3.3 Systeme non linéaire . . . 75
5.3.4 Solveurs approchés : Lax-Friedrichs, Rusanov, HLL et HLLC . . . 84
5.4 Stabilité . . . 85
5.5 Intégration en temps et montée en ordre temporel . . . 87
5.5.1 Méthode explicite . . . 87
5.5.2 Méthode implicite . . . 88
5.5.3 Méthode semi-implicite . . . 91
5.6 Intégration en espace d'ordre élevé . . . 92
5.7 Terme source . . . 97
5.8 Conditions aux limites . . . 97
5.9 Multi-dimensions . . . 101
5.10 Comparaison explicite implicite . . . 102
5.10.1 Cas test avec un méthode implicite à haute efficacité intrinsèque . . . 103
5.10.2 Cas tests avec un méthode implicite libre de matrice Jacobienne . . . 105
5.11 Bilan . . . 108

6 Le problème "Bas Mach" **109**
6.1 Introduction . . . 110
6.2 Difficultés à bas Mach . . . 111
6.3 Une estimation de l'erreur de troncature à bas Mach . . . 112
6.3.1 Cas 1D . . . 113
6.3.2 Cas 2D . . . 115
6.4 Quelques corrections . . . 118
6.4.1 Revue . . . 118
6.4.2 Tests numériques . . . 120
6.4.3 Bilan . . . 126
6.5 Vers un schéma Tous Mach TVD . . . 126
6.5.1 Construction . . . 126
6.5.2 Tests numériques . . . 132
6.5.3 Bilan . . . 136
6.6 Vers un schéma Tous Mach à oscillations réduites . . . 136
6.6.1 Construction . . . 136
6.6.2 Tests numériques . . . 137
6.6.3 Bilan . . . 142
6.7 Conclusion . . . 142

7 Méthodes de maillages adaptatifs **143**
7.1 Introduction . . . 144
7.2 Présentation de la méthode BB-AMR . . . 144
7.3 Critère et seuil de raffinement . . . 146
7.4 Une projection conservative pour les modèles verticalement intégrés . . . 149

8 Applications numériques des modèles d'ondes longues **153**
8.1 Applications numériques avec le modèle de Saint-Venant . . . 154
8.1.1 Méthodes numériques pour la résolution du modèle de Saint-Venant . . . 154
8.1.2 Cas tests pour le modèle de Saint-Venant . . . 154
8.1.3 Bilan . . . 173
8.2 Applications numériques avec le modèle de Serre-Green-Naghdi "standard" et dissipatif . . . 173
8.2.1 Méthodes numériques . . . 173
8.2.2 Cas tests pour le modèle de Serre-Green-Naghdi "standard" et dissipatif . . . 173
8.2.3 Bilan . . . 184

9 Applications numériques des modèles bi-phases **187**
9.1 Introduction . . . 188
9.2 Méthodes numériques . . . 189
9.3 Discussion sur les cas incompressibles . . . 190
9.4 Cas tests . . . 191
9.4.1 Tube à choc avec mélange . . . 191
9.4.2 Tube à cavitation . . . 194
9.4.3 Piston air-eau . . . 195
9.4.4 Explosion sous marine . . . 196
9.4.5 Déferlement sur une pente . . . 198
9.4.6 Impact sur un mur par rupture de barrage . . . 201
9.4.7 Impact normal sur une plaque . . . 209
9.5 Bilan . . . 211

10 Couplage de modèles hétérogènes **213**
10.1 Introduction . . . 214
10.2 Revue des couplages . . . 214
10.2.1 Couplage à un sens . . . 215
10.2.2 Couplage à deux sens . . . 216
10.3 Une méthode de couplage totalement explicite . . . 217
10.4 Application . . . 218
10.4.1 Opérateur de couplage à l'interface . . . 218
10.4.2 Cas tests . . . 222
10.5 Bilan . . . 226

Conclusions et perspectives **228**

A Compléments sur le modèle bi-phase isentropique à relaxation **229**

B Quelques changements de coordonnées et solutions analytiques de vortex stationnaires **231**

C Éléments pour les calculs d'erreurs de troncatures **235**

Liste des abréviations

$\frac{\partial \cdot}{\partial f}$	$\cdot_f$
BB-AMR	Block-Based Adaptive Mesh Refinement
BN	Baer-Nunziato
CL	Conditions aux Limites
EDO	Équation aux Dérivées Ordinaires
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
EU	Euler
MUSCL	Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws
NS	Navier-Stokes
SGN	Serre-Green-Naghdi
SV	Saint-Venant
TVB	Total Variation Bounded
TVD	Total Variation Diminishing
VF	Volumes Finis

Introduction

Les tsunamis d'ampleur sont des phénomènes rares mais dont les conséquences humaines et économiques peuvent être désastreuses. Les événements récents de 2004 en Indonésie et de 2011 au Japon illustrent de tels dégâts. Le premier a coûté la vie à plus de 250 000 personnes et détruit de nombreuses zones côtières jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres de la zone de génération comme la côte sud du Sri Lanka. Le second, au bilan humain moins lourd, a un coût estimé de l'ordre de plusieurs billons de dollars et a causé un accident nucléaire important. Ces événements montrent tout l'enjeu de bien comprendre ce phénomène aussi bien dans sa phase de génération, de propagation que d'impact.

Un grand pas a été fait ses vingt dernières années avec notamment la mise en évidence de comportements dispersifs importants, dans certaines conditions de propagation, mais beaucoup reste à faire notamment dans l'étude de la phase de génération et d'impact. L'écho de l'accident de Fukushima fut particulièrement important en France métropolitaine, qui compte quelques centrales nucléaires en zone côtière, et a donné naissance au projet TANDEM (Tsunamis en Atlantique et MaNche : Définition des Effets par Modélisation) financé par l'Agence Nationale pour la Recherche dans lequel s'inscrit cette thèse. Ce projet comporte 4 volets. Le premier vise à valider les modèles utilisés pour les différentes phases d'un tsunami via des cas de références, ainsi que sur de nouveaux cas pertinents. Le second a pour but d'évaluer les incertitudes associées, aussi bien au niveau de l'estimation des sources, qu'aux différents paramètres associés aux simulations numériques d'événements. La troisième et la dernière partie ont pour objectifs de reproduire la catastrophe de 2011 au Japon pour laquelle de nombreux relevés sont maintenant disponibles et d'appliquer toute la méthodologie mise en place pour une étude de risque sur la côte atlantique et manche française. La contribution de cette thèse s'inscrit principalement dans le premier et le troisième volets du projet.

Les travaux présentés dans ce manuscrit visent à modéliser toute la vie d'un tsunami pour une source donnée et à étudier l'impact des vagues sur des structures. La grande disparité d'échelles de ce phénomène implique deux voies de modélisation possibles. La première est d'élaborer un modèle suffisamment simple pour être utilisable sur les grandes échelles de propagation, mais néanmoins suffisamment bien posé pour donner des ordres de grandeur cohérents en zone côtière, siège de phénomènes à échelles beaucoup plus réduites. La physique en zone côtière étant particulièrement complexe, avec par exemple des déferlements de vagues et des interactions avec des structures, les hypothèses à effectuer pour une modélisation globale sont particulièrement délicates. La seconde approche possible est le couplage de différents modèles plus spécialisés, permettant dans leurs zones respectives, d'être moins contraints en hypothèses réductrices. Les deux approches sont étudiées via l'élaboration ou la considération de modèles adéquats. Pour effectuer, *in fine*, un couplage qui permette une éventuelle plus value par rapport aux modélisations globales, un modèle capable de représenter finement des impacts de vagues est considéré et étudié.

Ce manuscrit se divise en dix chapitres dont le premier a pour but de donner une vue d'ensemble des tsunamis, notamment en terme de mode de génération, de propagation et d'impact en zone côtière. Cette partie donne un aperçu des phénomènes physiques propres à chaque phase et des échelles caractéristiques associées. Elle permet aussi de voir quels modèles sont à considérer pour modéliser plus ou moins finement chaque phase. Des modèles, cohérents avec ces phénomènes, sont ensuite sélectionnés ou élaborés dans les trois chapitres qui suivent. Le premier présente la dérivation de modèles adéquats pour la phase de

propagation et éventuellement de l'envahissement simplifié en zone côtière. Le second vise à étudier un des modèles les plus complets pour étudier cette phase et à proposer une modification permettant de représenter approximativement la dissipation d'énergie lors de déferlements. Le troisième est consacré à la description de modèles multi-phases capables de représenter finement un déferlement ou des impacts violents sur des structures.

Le cinquième chapitre présente principalement les méthodes numériques utilisées pour résoudre les modèles sélectionnés. Le sixième chapitre est consacré à l'étude du problème numérique dit "Bas Mach" rendant à l'heure actuelle la résolution de modèles compressibles très délicate à tous les régimes. Cette difficulté numérique nous concerne principalement pour la résolution du modèle diphasique compressible sélectionné pour étudier les impacts de vagues sur des structures. Le septième chapitre présente la méthode de maillage adaptatif utilisée dans cette thèse pour réduire les temps de résolution, et quelques améliorations effectuées.

Le chapitre huit présente des applications numériques des modèles globaux de propagation et d'envahissement avec des cas tests académiques et réels, tel que le tsunami du Japon de 2011. Le chapitre neuf se focalise sur les impacts de vagues et présente des applications des modèles diphasiques sélectionnés. Enfin le dernier chapitre de cette thèse présente une méthode de couplage entre un modèle global adéquat pour la phase de propagation d'un tsunami et un modèle à vocation locale capable de prévoir finement des impacts ou le déferlement d'une vague.

Chapitre 1

Les tsunamis

Sommaire

1.1 Les tsunamis **14**
1.2 Echelles caractéristiques, phénomènes prépondérants et modélisation **15**
1.2.1 Phase de géneration 15
1.2.1.1 Génération sismique 15
1.2.1.2 Génération par glissement de terrain 16
1.2.1.3 Génération volcanique 16
1.2.1.4 Génération par impact d'astéroïde 17
1.2.1.5 Génération par phénomènes météorologiques 17
1.2.1.6 Bilan 17
1.2.2 Phase de propagation 18
1.2.2.1 De la source à la côte 18
1.2.2.2 Bilan 20
1.2.3 Impact et inondation 20
1.2.3.1 Submersion 22
1.2.3.2 Lame d'eau 23
1.2.3.3 Déferlante 25
1.2.3.4 Bilan 29

Le but de ce chapitre est de donner une vue d'ensemble des phénomènes physiques rencontrés dans la vie d'un tsunami. L'identification des échelles caractéristiques de la phase de génération jusqu'à la phase d'impact à la côte permet de dégager quelques modèles adéquats qui seront étudiés dans la suite de cette thèse.

1.1 Les tsunamis

Le mot tsunami signifie littéralement "vague dans le port" en japonais. Ce mot vient historiquement du fait que, les pêcheurs qui partaient en mer revenaient parfois dans un paysage de désolation, alors que rien de particulier ne s'était *a priori* passé en pleine mer. Évidemment, la plupart du temps, ils avaient croisé la ou les vagues qui avaient détruit leurs côtes, mais au large la longueur d'onde du phénomène était si grande devant son amplitude qu'ils n'avaient rien ressenti.

Pour être plus précis, on définit un tsunami comme une onde ou série d'ondes gravitaires de grande longueur, générée par un phénomène violent ou impulsif. Ces phénomènes peuvent être de natures très différentes, mais pour des tsunamis dits à risque l'énergie mise en jeu est souvent considérable. Généralement leur longueur d'onde est comprise entre celle d'une vague de tempête (quelques dizaines de mètres) et une onde de marée (quelques milliers de kilomètres), soit de l'ordre de la centaine de kilomètres. Cependant, il faut garder à l'esprit que si en zone de génération l'onde initiale est très longue, elle peut se compacter (gonflement en amplitude et réduction en longueur d'onde), par exemple en rencontrant une bathymétrie abrupte. D'autre part, cette grande fourchette de longueur d'onde initiale, qui dépend du type de génération, implique d'un côté d'une borne comme de l'autre, un aspect plus ou moins dispersif des ondes.

Pour générer un tel phénomène, il faut transmettre une énergie considérable à un grand volume d'eau. Cela arrive par exemple lorsque des plaques tectoniques en zone océanique se déplacent entre elles de manière très violente avec certains types de ruptures. On parle alors de génération de type sismique. C'est le cas au risque le plus élevé, défini généralement comme la probabilité facteur de la conséquence. Un autre cas légèrement moins probable est celui de glissements de terrain, aussi bien sub-aérien que sous marin. Une génération par séisme peut aussi entraîner un glissement de terrain donnant donc lieu à une génération à sources multiples. Certains auteurs (Kirby et al. [112]) ont proposé une telle source multiple pour l'événement du Japon de 2011. En descendant dans les probabilités, les générations par des phénomènes volcaniques arrivent parfois. Qu'ils soient situés en flanc de côte ou en zone sous-marine, ces générations font suite à l'expulsion de gaz et de produits pyroclastiques ou encore à l'effondrement sur lui même du volcan. Un autre cas est celui de l'impact d'une comète ou d'un astéroïde de taille élevée pouvant engendrer des tsunamis majeurs. Un autre type de tsunami est le météo tsunami, généré par une large dépression ou surpression de l'atmosphère sur l'eau.

Une fois la déformée initiale de surface libre générée, la gravité tend à ramener la surface à l'équilibre et l'onde, ou la série d'ondes, se propage. Après cette phase de propagation le tsunami finit par arriver sur les côtes et va, suivant ses caractéristiques, simplement se réfléchir sur des digues de protection ou monter légèrement sur les plages non protégées puis se retirer, ou hélas, être beaucoup plus destructeur.

Chacune de ces phases est détaillée dans les paragraphes qui suivent. Les échelles et phénomènes prépondérants sont décrits et les modèles ou méthodes de prédiction généralement utilisés sont évoqués.

1.2 Echelles caractéristiques, phénomènes prépondérants et modélisation

1.2.1 Phase de géneration

Dans cette section, les différents mécanismes de génération de tsunamis sont décrits. Notons qu'une part infime de l'énergie associée aux phénomènes générateurs est transmise à la colonne d'eau pour laquelle on peut définir l'énergie du tsunami. Cette part ridicule a tout de même pour ordre de grandeur $10^{16}J$ (Lay et al. [121]) pour un événement de grande ampleur (comme le tsunami de Sumatra de 2004), ce qui correspond tout de même à l'explosion de $2Mtonnes$ de TNT ou encore 100 bombes "A" telle que celle lâchée sur Nagasaki pendant la seconde guerre mondiale.

1.2.1.1 Génération sismique

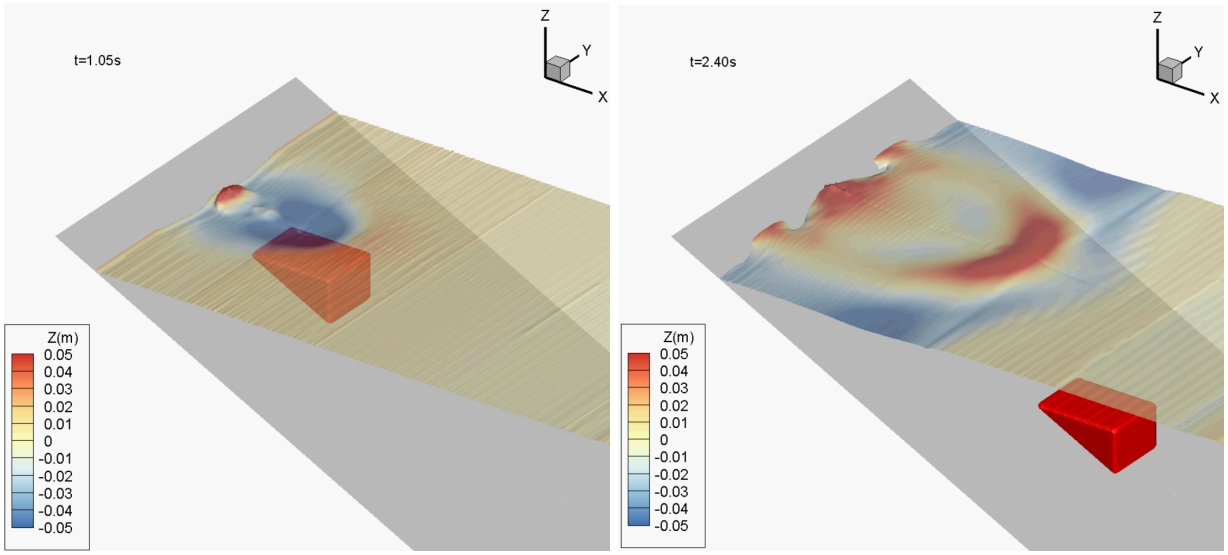
Cet événement correspond au risque tsunamique le plus élevé. Cela arrive lorsque des plaques tectoniques en zone océanique se déplacent entre elles de manière très violente. La lithosphère de notre planète est en effet composé de plusieurs plaques qui se chevauchent dans des zones que l'on appelle zones de subductions. Ces plaques se déplacent entre elles généralement de quelques centimètres par an. L'adhérence entre les plaques est parfois telle qu'une zone de blocage se crée pendant un certain temps. Lorsque la contrainte dépasse un seuil critique, des ruptures locales libèrent le mouvement et les plaques rattrapent le chemin non effectué depuis le blocage (ou au moins une partie). Selon le déplacement, la forme, la taille et la zone de rupture, cela génère des ondes sismiques plus ou moins intenses et parfois (heureusement rarement) un grand déplacement d'eau donnant naissance à un tsunami. Les principaux paramètres associés aux générations sismiques sont la géométrie (généralement de l'ordre de quelques dizaines à centaines de km), la direction du déplacement (plus ou moins horizontale), la vitesse de rupture (définie le long de la croûte) de l'ordre de 0.1 à $10km/s$ et le temps de déplacement (généralement de l'ordre de quelques dizaines à centaines de secondes). Notons que des vitesses de rupture plus faibles sont possibles selon Kanamori [102]. Pour plus de détails sur l'effet des paramètres cinétiques des ruptures tsunamiques, le lecteur peut se référer à Dutykh [63] ou Le Gal [122].

Pour estimer la déformation du fond pour un événement donné, il faut inverser les données dont on dispose comme les relevés sismiques ou/et le déplacement de surface libre (souvent obtenu grâce à des balises GPS). Il faut en premier lieu retrouver les caractéristiques principales de la rupture : l'énergie associée (corollaire de la magnitude du séisme) et les caractéristiques géométriques (comme l'angle de "glissement" et le volume déplacé), voir par exemple Shao [202]. Il faut ensuite déterminer la déformée du fond. La méthode la plus connue est celle d'Okada [168] basée sur l'hypothèse d'élasticité linéaire sur un espace homogène. Comme les ruptures ne sont en fait pas globales, pour obtenir une meilleure description de la déformée du fond, cette méthode peut être appliquée à plusieurs sous volumes (*i.e.* plusieurs sous ruptures), voir par exemple Satake et al. [192] pour le cas du Japon 2011. Ensuite, on suppose souvent que le mouvement du fond est suffisamment rapide (par rapport au déplacement de l'onde), pour être supposé instantané, et la déformée du fond est directement appliquée à la surface libre. On peut aussi utiliser un modèle en eau peu profonde contenant un terme de bathymétrie avec dépendance temporelle lorsque l'hypothèse de mouvement rapide ne peut être retenue.

Pour plus de détail sur la modélisation de la déformation du fond, le lecteur peut par exemple se référer à Dutykh et Dias [64]. Pour la modélisation du transfert entre le mouvement du fond et la surface libre, le lecteur peut par exemple se référer à Dutykh [63] ou encore à Le Gal [122]. L'ordre de grandeur des tsunamis d'origine sismique en zone de génération est de quelques centimètres à quelques mètres en amplitude pour des longueurs d'ondes de quelques dizaines à une centaine de kilomètres.

1.2.1.2 Génération par glissement de terrain

Un autre cas un peu moins probable est celui d'un glissement de terrain aussi bien sub-aérien que sous marin. Ce type de génération est généralement plus localisé et donne lieu à des inondations extrêmes, mais plutôt locales. Cependant, pour des glissements colossaux comme par exemple celui d'une partie d'une île des Canaries étudié par exemple par Abadie et al. [1], cette notion d'impact seulement "local" est évidemment fausse. Généralement les amplitudes de vagues sont supérieures au cas sismique, et à l'inverse, les longueurs d'ondes sont inférieures et induisent des effets dispersifs souvent moins négligeables. Pour des générations violentes, la modélisation se base sur le modèle de Navier-Stokes avec prise en compte de mouvements solides (*cf.* par exemple Abadie et al. [1] pour un cas réel et Marcer et al. [147] pour un cas académique illustré en figure 1.1). Pour des glissements plus mesurés la modélisation suit les équations d'Euler irrotationnel (résolues par la méthode des éléments de frontières, *cf.* par exemple Grilli et Watts [86]) ou le modèle en eau peu profonde de Boussinesq (ou de Saint-Venant) avec bathymétrie variable dans le temps (*cf.* Duthyck et Kalisch [65] pour une comparaison de ces modèles en eau peu profonde). Compte tenu des non linéarités associées à ce type de génération, il serait intéressant d'utiliser le modèle de Serre-Green-Naghdi avec bathymétrie dépendante du temps pour améliorer les prévisions du modèle de Boussinesq (faiblement non linéaire) et obtenir des temps de calcul plus réduits que le modèle de Navier-Stokes ou Euler irrotationnel.



(a) Début du glissement.

(b) Mileu du glissement.

FIGURE 1.1 – Effet d'un glissement d'un bloc sur un plan incliné sur la colonne d'eau. Images extraites de Marcer et al. [147]

1.2.1.3 Génération volcanique

En descendant dans les probabilités, les générations par des phénomènes volcaniques arrivent parfois. Pour un volcan situé en flanc de côte, une coulée conséquente peut s'apparenter à un glissement de terrain évoqué précédemment. Un cas plus propre au volcan est celui de l'expulsion de gaz et de produits pyroclastiques dans une zone sous marine. L'effondrement du volcan sur lui même est aussi un cas possible. Ces derniers événements nécessitent des modèles multi-phases avancés.

1.2.1.4 Génération par impact d'astéroïde

Un autre cas, aux échelles de temps (heureusement) très grandes, est celui de l'impact d'un astéroïde ou d'une comète. Ce type de génération peut engendrer des tsunamis majeurs pour des objets de grande taille. Comme les deux tiers de la Terre sont recouverts par de l'eau, il est plus probable qu'un tel objet finisse dans l'eau. La taille de ces objets peut atteindre quelques kilomètres de diamètre pour des vitesses de l'ordre de 20km/s. Les simulations de ce type d'impact montrent que des vagues très hautes, de plusieurs centaines de mètres voir plus, peuvent être générées mais que leurs longueurs d'ondes sont assez courtes pour les faire déferler rapidement (une illustration est donnée en figure 1.2). Pour simuler ce type de génération, des modèles multi-phases compressibles sont nécessaires. Il existe cependant des formules analytiques approchées de déformation initiale de la surface libre. Le lecteur peut se référer par exemple à Glimsdal et al. [76] et Abramov et al. [4] pour plus de détails sur ces événements.

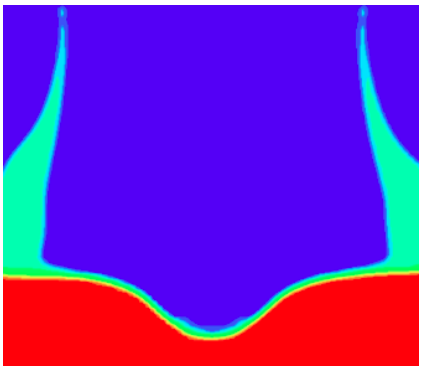


FIGURE 1.2 – Déformation du sol (en rouge) et de l'océan (en vert) après impact d'un géocroiseur de 1km de diamètre selon une simulation de Glimsdal et al. [76] d'où cette image a été extraite. L'objet est supposé impacter la surface libre à 22km/s dans une profondeur océanique de 4km. Les "vagues" générées mesurent ici environ 5km de haut.

1.2.1.5 Génération par phénomènes météorologiques

Un autre type de tsunami est le "météo tsunami", généré par une forte et large dépression ou surpression de l'atmosphère sur l'eau. Ces tsunamis sont généralement de faible ampleur. Le lecteur peut se référer par exemple à Monserrat et al. [161].

1.2.1.6 Bilan

Les phénomènes de génération de tsunamis sont complexes et variés.

En se concentrant sur les événements à risque élevé, la modélisation des glissements de terrain semble accessible avec des modèles relativement simples, comme celui de Saint-Venant ou de Serre-Green-Naghdi avec bathymétrie variable dans le temps, dès lors que le mouvement du "bloc glissant" peut être estimé. Le modèle de Navier-Stokes avec considération des solides en mouvement permet d'aller plus loin si nécessaire. Un point qui semble encore très délicat à modéliser est les forces de contact entre le "bloc" en mouvement et le sol. D'autre part, on parle jusqu'ici de "bloc" mais le glissement de terrain peut être un amas granulaire dont la rhéologie est particulièrement difficile à appréhender. Le cas des générations dites sismiques pourrait mériter de revoir l'hypothèse d'élasticité linéaire d'Okada pour prévoir les ruptures et déplacements du sol, compte tenu des forces et vitesses misent en jeu. Notons cependant que cette méthode a largement fait ses preuves.

1.2.2 Phase de propagation

1.2.2.1 De la source à la côte

On définit la phase de propagation d'un tsunami du moment où la génération est terminée, jusqu'à l'arrivée de la vague à la côte. Pour analyser à quels types de phénomènes nous avons à faire, il est utile d'introduire quelques notations. On note "a" l'amplitude de la vague, "λ" sa longueur d'onde et h_0 la hauteur d'eau au repos. On verra, dans le chapitre 2, que la propagation des tsunamis est caractérisée principalement par $\epsilon = a/h_0$ et $\sigma = h/\lambda$, qui sont respectivement représentatif du caractère non linéaire et dispersif de l'onde. Le choix du modèle adéquat, pour représenter cette phase, dépend principalement du caractère plus ou moins non linéaire et dispersif du tsunami étudié. Évidemment, si on considère toutes les sources possibles de tsunamis, ces nombres sans dimension sont très variés. Il faut alors considérer un modèle avec peu d'approximations, comme par exemple les équations d'Euler incompressibles. Ce modèle est cependant extrêmement coûteux à résoudre et ne peut pas à l'heure actuelle être considéré. Heureusement, en se concentrant sur les événements les plus à risques, on peut estimer que pour les tsunamis d'origine sismique on a $\epsilon \leq 1$ à cause au gonflement à la côte et $\sigma << 1$. Pour les tsunamis dus à des glissements de terrain, $\epsilon \leq 1$ potentiellement dès la génération, et $\sigma < 1$. Comme σ est toujours relativement petit dans ces cas, on peut obtenir des modèles représentatifs dit en eau peu profonde beaucoup plus simples que les modèles généraux comme celui d'Euler. Parmi ces modèles, il y a celui de Saint-Venant (non linéaire et non dispersif), de Boussinesq (faiblement non linéaire et faiblement dispersif) et de Serre-Green-Naghdi (non linéaire et faiblement dispersif). Aussi, grâce à quelques subtilités lors de la dérivation de ces modèles faiblement dispersifs, il est possible d'améliorer légèrement leurs relations de dispersion dans le cas linéaire (*cf.* les travaux de Madsen [145] par exemple). Il est aussi possible d'aller plus loin en prenant en compte des termes dispersifs d'ordre plus élevés, mais cela complique fortement les modèles pour un gain de précision assez faible compte tenu des nombres sans dimension précédents. Ces modèles permettent globalement de simuler avec une bonne précision la phase de propagation loin des côtes.

Remarque 1. *Le modèle de Saint-Venant est souvent nommé dans la littérature modèle "Non Linear Shallow Water" (NLSW). Il est possible d'utiliser sa version linéaire dans les cas où le gonflement du tsunami en zone côtière est faible et que les vagues en zone de génération sont de faibles amplitudes. Le modèle de Boussinesq est le plus utilisé à l'heure actuelle. Il semble cependant important de noter que ce modèle a un sérieux défaut : il ne respecte pas l'invariance Galiléenne. Son utilisation importante vient du fait qu'il est plus simple à résoudre que celui de Serre-Green-Naghdi. Compte tenu de sa généralité, ce dernier a reçu une attention très grande des numériciens ces dernières années (cf. par exemple Khakimzyanov et al. [110]). Il est cependant très difficile d'obtenir une convergence en maillage pour des cas réels multi-D à cause de son coût de résolution. Une méthode récemment proposée par Favrie et Gavrilyuk [68] semble prometteuse sur ce point et est étudiée dans cette thèse au chapitre 3.*

Nous avons jusqu'ici parlé de non linéarité au sens de la structure initiale de la vague ou de son gonflement en zone côtière. Un cas extrême est que "le tsunami" déferle. Pour être plus précis, il arrive qu'une vague initialement très stable, c'est à dire d'une grande longueur d'onde et faible amplitude, se transforme en sous vagues à cause de la dispersion : on parle parfois de désintégration du soliton (voir figure 1.4). La forme de la bathymétrie a aussi son rôle, car elle agit sur le gonflement et donc *in fine* sur la déstabilisation. On illustre en figure 1.3 un tsunami déferlant. Du point de vue modélisation, ce cas est très complexe. D'une manière générale, on se heurte à la compréhension assez réduite des scientifiques de la turbulence [1] qui ici joue un rôle determinant notamment en terme de dissipation d'énergie de la vague.

Pour des modélisations sur des grands domaines, seuls les modèles de type eau peu profonde, comme ceux évoqués précédemment, sont envisageables. Pour ces modèles les approches les plus utilisées pour prendre en compte la turbulence, ou au moins ses conséquences, sont basées sur l'introduction de termes dissipatifs de type viscosité (turbulente), analogue à l'approche RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes). La difficulté

1. Une phrase attribuée (*cf.* [149]) à Heisenberg illustre cela :"When I meet God, I am going to ask him two questions : Why relativity ? And why turbulence ? I really believe he will have an answer for the first".

FIGURE 1.3 – Déferlement du tsunami de Sumatra (2004). La figure du haut correspond au tsunami approchant l'île de Koh Jum et la figure du bas l'arrivée sur une plage Thaïlandaise. Ces images sont extraites de Madsen et al. [144].

est alors de fermer le modèle, ce qui implique généralement l'introduction de beaucoup de termes empiriques. Une autre approche assez utilisée est de se servir d'un choc du modèle de Saint-Venant pour représenter le déferlement. Les solutions faibles de ce modèle induisent en effet une perte d'énergie mécanique. Il est assez fascinant que cette perte d'énergie soit assez bien représentative de celle engendrée lors d'un déferlement. L'avantage de cette approche est que quasiment aucun terme de calibration n'est nécessaire. Une dernière approche plus récente et peut être la plus prometteuse en terme de précision par rapport au nombre de paramètres empiriques introduits, est basée sur la prise en compte des effets rotationnels dans les modèles. On a alors accès à des informations importantes pour envisager la modélisation de la turbulence et par voie de conséquence la dissipation associée au déferlement. Le lecteur est renvoyé au chapitre 3 de ce manuscrit où ces approches sont plus détaillées.

Il est parfois nécessaire de considérer d'autres phénomènes lors de la propagation sur de grandes distances (plusieurs milliers de kilomètres), comme par exemple la force de Coriolis (*cf.* par Lannes [119]). On peut aussi se demander si les effets visqueux ont un rôle important dans la propagation. Il est en fait possible de montrer que l'ordre de grandeur de la dissipation d'énergie associée aux effets visqueux est extrêmement faible pour un tsunami devant son énergie totale, ce qui permet de la négliger. Le lecteur peut par exemple se référer à Mei et al. [154] pour une estimation des ordres de grandeur.

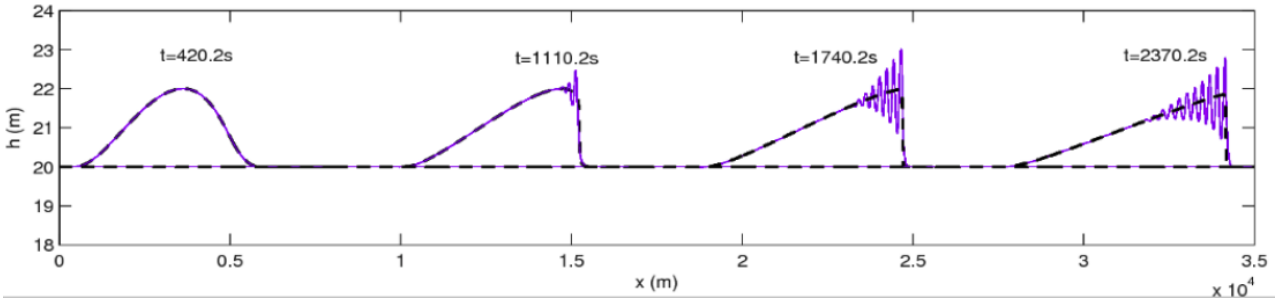


FIGURE 1.4 – "Désintégraton" d'une onde. Les effets dispersifs génèrent des "sous-ondes" lors de la propagation d'une onde unique initiale sur une distance conséquente. Cette image est extraite de Tissier et al. [217] et correspond à une simulation d'une onde longue d'amplitude de 2m et de période de 780s par 20m de fond (plat) avec le modèle de Serre-Green-Naghdi.

Maintenant que les types de vagues qui peuvent arriver à la côte ont été détaillés, nous allons passer à la description de la dernière phase de la vie d'un tsunami : son impact en zone côtière.

1.2.2.2 Bilan

La propagation des tsunamis sur de grandes échelles peut être modélisée par des modèles de couche mince, compte tenu de leur longueur d'onde devant la profondeur océanique. Le modèle de Saint-Venant est souvent suffisant mais il est parfois nécessaire de considérer des modèles plus évolués, comme celui de Serre-Green-Naghdi prenant en compte le caractère dispersif des ondes. La dérivation de ces modèles est détaillée au chapitre 2. Le modèle de Saint-Venant sera utilisé dans cette thèse, notamment pour simuler l'événement de 2011 au Japon (*cf.* chapitre 8).

Un point très délicat est la modélisation du déferlement possible de certaines vagues en zone côtière, et de la dissipation d'énergie mécanique associée, avec ces modèles de couche mince. Un modèle de Serre-Green-Naghdi dissipatif est proposé au chapitre 3 pour tenter de traiter ce phénomène.

Ces modèles peuvent être utilisés dans un cadre prédictif pour savoir ce qu'il peut se passer pour une source donnée. Pour améliorer les systèmes d'alertes actuels, des travaux permettant d'accélérer la résolution de ces modèles sont nécessaires. Un travail sur les méthodes à maillage adaptatif est proposé au chapitre 7. D'autre part, l'étude du système approché de Serre-Green-Naghdi de Favrie et Gavrilyuk [68], va aussi dans ce sens (*cf.* chapitres 3 et 8).

1.2.3 Impact et inondation

L'impact d'un tsunami dans les zones côtières commence souvent par le retrait rapide de la mer dû à la géneration. Lorsque la ou les vagues arrivent et que des structures de protection sont érigées, il s'en suit l'endommagement ou parfois la destruction de ces structures. Une fois ces premiers remparts passés, l'inondation des rues et structures côtières commence. Suivant l'intensité de l'inondation, les habitations ou zones industrielles côtières peuvent être rasées. Dès lors que certaines structures ou ancrages lâchent, le transport des débris, allant du simple tronc d'arbre au bateau de grande taille ou morceau d'habitation, amplifie la destruction des structures encore en place. Quelques images sont présentées en figures 1.5(a) et 1.5(b) pour illustrer les dégâts occasionnés par le passage d'un tsunami.

(a) Grand bâtiment à structure en béton. (b) Grand bâtiment à structure en acier.

FIGURE 1.5 – Effet du passage du tsunami du Japon de 2011 en zone côtière. Photos extraites de Gakkai [71].

Avant d'aller plus loin, on peut s'interroger sur l'intérêt pratique de l'étude de l'interaction de tel phénomène avec des infrastructures. En effet, elles n'ont *a priori* que peu de chance de résister à des événements de grande ampleur. Avec un peu d'optimisme, un premier argument est de se dire que l'on peut potentiellement réussir à construire des digues de protection dans les zones les plus "importantes", capables à défaut de stopper le phénomène, de réduire son impact à la côte. Pour cela il faut donc bien appréhender les différents types d'impact possibles sur une digue, pour imaginer comment la faire tenir au mieux. Lors du tsunami de 2011 au Japon, de nombreuses digues dimensionnées pour résister à un tsunami ont en partie cédé, mais rappelons que cet événement était d'une ampleur exceptionnelle et bien supérieur aux cas majorants considérés (séisme de magnitude 8.5 dans l'état de l'art). Le recul sur expérience de cet événement peut servir de base pour savoir comment construire des digues plus résistantes.

Cela étant dit, il est impossible de construire des digues d'ampleur sur toute la côte. La priorité, lorsque qu'un événement se produit, reste donc d'évacuer la population des zones côtières frappées. Hélas il arrive que des tsunamis puissent être générés proche des côtes et l'évacuation à temps dans ce cas devient quasi impossible. Une solution majeure est alors d'avoir confiance en certains bâtiments côtiers pour permettre à un maximum de personnes de s'y réfugier. L'interaction de tsunamis avec ce type de structure est donc aussi un sujet à ne pas négliger dans certaines zones. D'autre part, certaines structures industrielles comme les centrales nucléaires ont parfois besoin d'être en zone côtière, à défaut de cours d'eau interne exploitable, car pour fonctionner elles nécessitent beaucoup d'eau. Notons que les centrales à fission ne peuvent pas être arrêtées et "abandonnées" en quelques minutes si une alerte tsunamique est donnée. Les éléments fissionnés restent en effet actifs (*i.e.* rayonnent et chauffent) même une fois la réaction en chaîne en leur sein stoppée. Il est donc clair que ces centrales doivent être protégées si elles se trouvent dans une zone à risque pour ces événements rapides. Un des aspect du projet Tandem était d'ailleurs d'évaluer le risque dans les zones côtières où se trouvent certaines centrales françaises.

Finalement, que ce soit pour des besoins de refuge humain, pour des besoins de protection de baie en général, ou pour des besoins de protection de zones industrielles à haut risque, il est important de bien appréhender l'interaction d'un tsunami avec une digue et avec des bâtiments.

Sans trop empiéter sur les paragraphes qui suivent, où les choses seront abordées plus en détails, il existe principalement 3 types d'interactions fluide-structure connus pour être capables de détruire une structure.

Lorsqu'un tsunami envahit une zone initialement au sec, c'est généralement une lame d'eau de forme triangulaire longeant le sol qui vient impacter les structures non immergées. Ce cas est relativement similaire aux risques d'impacts liés aux ruptures de barrage. Pour des structures en partie immergées, le premier sous cas concerne l'impact de vagues non déferlantes. Ceci se traduit par une ou plusieurs élévations du niveau de l'eau du côté de l'arrivée du tsunami par rapport au côté rivage de la digue. Lorsque l'amplitude et la longueur d'onde de l'impacteur sont suffisamment grandes, la vague passe par dessus la digue jusqu'à éventuellement créer un ressaut hydraulique. Notons que le terme impact est quelque peu abusif ici, car la poussée maximale met un certain temps pour être atteinte. Pour finir, l'impact d'une vague déferlante est aussi un cas important. Plusieurs sous cas se dégagent de cette catégorie : la vague qui va déferler et la vague qui a déferlé depuis un certain temps et qui constitue donc un rouleau.

Dans la suite, ces cas sont détaillés et les modèles minimums pour pouvoir prévoir les forces mises en jeu, et donc la tenue des structures, sont évoqués. Pour plus de détails sur les formules empiriques données, le lecteur peut se référer à Yeh [234].

1.2.3.1 Submersion

Considérons le cas d'une onde longue non déferlante arrivant sur une digue en partie immergée. Si la vague a une amplitude et une longueur suffisamment grandes, elle finit pas passer par dessus la digue. Une sorte de ressaut se forme alors derrière la digue et la variation de hauteur d'eau amont-aval sur la digue induit une force quasi-statique pouvant déplacer la digue. Aussi des effets hydrodynamiques augmentent cette poussée. Ce cas est potentiellement accompagné d'une déstabilisation des fondations de la digue. La déstabilisation des fondations reste cependant très difficile à mettre en évidence car elle nécessite une modélisation fine de l'écoulement dans un milieu à grains (de l'enrochement qui sert souvent de support à la digue au sable sur lequel tout cela est posé). Des expériences seraient intéressantes pour étudier ce cas complexe. Négligeant ce phénomène non systématique, la modélisation du ressaut ne nécessite pas en première approximation de modèles complexes. En effet le modèle de Saint-Venant permet de reproduire l'écart de hauteur induite par un ressaut de manière relativement précise. Pour une description plus précise, un modèle hydrostatique avec prise en compte de la vorticité permet d'améliorer la description d'un ressaut, le lecteur pourra se référer a Richard [185] pour plus de détails sur cette approche plus évoluée.

Pour prendre en compte les effets hydrodynamiques, on peut s'appuyer sur des formules empiriques comme celle de Morison :

$$F_{mor} = 0.5\rho_{eau} C_d \cdot A \cdot u^2 \tag{1.2.1}$$

avec C_d le coefficient de traînée généralement compris entre 1 et 2 ; "A" correspond à l'aire de la structure projetée dans le plan normal à la direction de l'écoulement et "u" correspond à la vitesse en amont de l'interaction fluide-structure.

Il est aussi important de considérer la poussée d'Archimède (verticale) que la structure subie :

$$F_{Archi} = \rho_{eau} \cdot g \cdot V_{déplacé} \tag{1.2.2}$$

Ce cas de submersion est illustré en figure 1.6. Selon Arikawa et al. [9], lors de l'événement de 2011 au Japon, la digue du port de Kamaishi a cédé principalement à cause de l'écart de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval de la structure. Leur étude, basée sur une expérience à échelle réduite, a été effectuée pour mettre en évidence les effets prépondérants dus au passage d'une onde longue sur une digue. On propose au chapitre 8 de vérifier cette proposition dans des conditions moins idéalisées sur la digue de Kamaishi.

FIGURE 1.6 – Passage d'une onde longue au dessus d'une "digue". Cette image est extraite de Arikawa et al. [9] qui ont effectué une expérience à échelle réduite de ce type submersion d'une digue par une onde longue.

1.2.3.2 Lame d'eau

Ce cas concerne les structures non immergées. Lorsque le tsunami finit par envahir le rivage, sa forme est généralement quasi triangulaire. Ce cas est illustré en figure 1.7. Chaque structure rencontrée subit au moment de l'impact une force impulsive due à la décélération locale de la "vague" . Ce type d'impact peut être assez violent. La pression peut largement dépasser la pression hydrostatique ce qui rend les modèles de Saint-Venant ou même de Serre-Green-Naghdi insuffisants pour prévoir précisément la poussée (voir par exemple l'étude expérimentale effectuée par Shafiei et al. [200] illustrée en figure 1.8). Dans la littérature ce cas se nomme "surge". Selon Yeh et al. [234] lorsque la bathymétrie est faiblement variable, c'est ce type de cas qui prédomine. Il est illustré en figure 1.7. Des formules empiriques existent pour estimer la force subie par une structure avec ce type d'impact comme par exemple :

$$F_{surge} = 4.5\rho_{eau} \cdot g \cdot h^2, \tag{1.2.3}$$

avec h la hauteur en amont (en zone où h la hauteur d'eau est quasi constante). Notons que la vitesse du fluide avant l'interaction avec la structure peut être relativement bien prédite par le modèle de Saint-Venant (voir chapitre 5 où la résolution exacte d'une détente sur fond sec donne : $u = 2\sqrt{gh}$).

Connaissant grossièrement la hauteur d'eau en amont de la lame, on peut donc estimer la poussée initiale subie. Cette formule empirique peut cependant sous-estimer l'impact. De plus, comme noté par Yeh et al. [234], la hauteur d'eau en amont est parfois délicate à sélectionner (hors cas académique de rupture de barrage).

Une solution plus coûteuse est d'utiliser une modèle bifluide incompressible si chaque fluide est pur. La force à l'impact peut alors être déterminée avec précision, même si cela n'a rien d'évident et que peu d'études présentent des résultats avec une convergence en maillage. Il existe aussi une formule analytique due à Von Karman [228], qui s'est intéressé à la pression subie sur les "foils" d'un hydravion lors de son amerrissage. La formule qu'il obtient pour la pression maximale, au centre de symétrie de l'impact, est :

$$P_{VK}^{max} = \frac{\rho_{eau} V_0^2}{2} \pi \cdot arctan(\alpha) \tag{1.2.4}$$

Avec V_0 la vitesse avant impact et α l'angle entre la surface libre et la structure. Avec un changement de référentiel l'impact du flotteur sur une surface libre peut être transposé au cas de l'impact d'une surface libre de forme triangulaire sur une structure. Cette approche a été améliorée par Wagner pour lui donner

FIGURE 1.7 – Envahissement de la côte par une lame d'eau. Cette photographie (extraite de https ://www.telegraph.co.uk) correspond au tsunami du Japon de 2011 sur la côte nord à Iwanuma.

un domaine de validité plus étendu en terme d'angle d'impact. Cette approche est très intéressante dans un cadre idéal pour se rendre compte de l'effet de la forme de la lame d'eau sur la violence de l'impact. Un écart de quelques degrés de l'angle entre la lame d'eau et la structure peut changer radicalement la poussée. Des travaux intéressants sur la modélisation d'impact de vague avec ce type d'approche ont été effectués par exemple par Mokrani [159], auquel le lecteur peut se référer (voir aussi Faltinsen [67] pour un cadre général).

A ce sujet, le cas où l'interaction est parfaitement normal (*i.e.* la lame d'eau n'est plus assimilable à un triangle mais à un rectangle) a été étudié par Ma et al. [143], en considérant l'impact d'une plaque plane sur une surface libre au repos. L'auteur a utilisé un modèle diphasique évolué (modèle de Kapila) et a montré que si le milieu est aéré, la compressibilité des fluides, et plus précisément du mélange air-eau, doit être considérée. Le cas pur est aussi concerné par cette assertion notamment parce que suite à l'impact une forte onde de détente repart dans le fluide et peut localement le faire caviter. Même si en terme de dimensionnement une description de la cavitation locale ne semble pas primordiale, on peut se demander ce qu'un modèle incompressible donnerait dans ce cas. En suivant le raisonnement de Von Karman la pression tend vers l'infini dans ce cas. Comme des simplifications sont effectuées dans son approche, des essais numériques avec un modèle complet, à défaut de pouvoir trouver une solution analytique, seraient intéressants. Notons que ce cas du "rectangle" impactant se rapproche fortement du cas que nous présenteront dans un paragraphe ultérieur : une vague quasi déferlée. Aussi, si on observe la photo du cas réel de la lame d'eau envahissant une côte japonaise, illustré en 1.7, la lame semble loin d'être pure. Si on oublie les débris pour l'instant, il semble que cette lame soit relativement aérée. Comme la compressibilité d'un milieu aéré est beaucoup plus élevée que celle de phases pures, il serait intéressant d'étudier l'effet de l'aération sur un impact avec un modèle adéquat (*i.e.* diphasique compressible).

Pour récapituler sur la modélisation de ce type d'interaction, on peut utiliser la formule empirique (1.2.3) ou des formules théoriques simplifiées découlant des travaux de Von Karman. Pour affiner la précision un modèle bifluide incompressible est une bonne solution. Enfin, si l'impact est suffisamment violent pour solliciter des effets compressibles , un modèle bifluide compressible est nécessaire. Également, dans le cas d'un mélange air-eau, compte tenu de la forte compressibilité d'un mélange (plus de détails seront donnés sur ce point au chapitre 4), il semble inévitable de devoir considérer un modèle diphasique compressible. Dans le cas incompressible, il est important de noter que, comme le montre la formule de Von Karman, une faible variation de l'angle du triangle implique un forte variation de la pression d'impact (le lecteur peut aussi se référer à Abadie et Mokrani [2] sur ce point). La géométrie à l'impact est donc à considérer avec attention

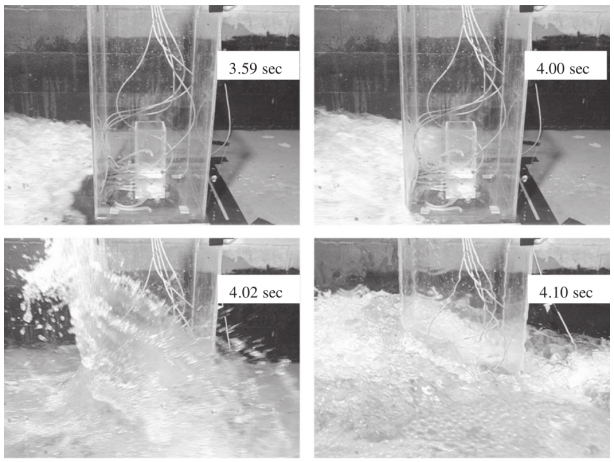


FIGURE 1.8 – Envahissement d'une zone initialement sèche par une lame d'eau. Ces photographies correspondent aux expériences de Shafiei et al. [200] pour étudier l'impact sur des structures de "vagues" de type "surge".

pour ce type d'impact.

Une fois la phase d'impact passée, la lame contourne l'obstacle et des efforts de traînée et effets quasi statiques se mettent en place. On se retrouve alors dans une configuration similaire au cas précèdent (type ressaut). Pour une prévision précise, un modèle bifluide avec modèle de turbulence adéquat peut être utilisé.

Une autre force qu'il est parfois utile de considérer dans ce cas, est l'impact des objets emportés (morceau de structure, arbres, voitures, bateaux, etc.). Hors modèles capables de modéliser finement ce cas, on utilise généralement la formule empirique suivante pour déterminer la force d'impact :

$$F_{sol} = m \cdot u_{struct}/(\triangle t) \tag{1.2.5}$$

Avec m la masse de l'objet impactant, u_{struct} la vitesse de l'objet qui peut normalement être considérée comme égale à la vitesse du fluide, $\triangle t$ est la durée de l'impact (temps entre le contact et la force maximale). En pratique pour des impacts sur un mur, on prend les durées empiriques suivantes : $\triangle t = [0.1 - 1.1]s$ pour une structure en bois, et $[0.2 - 0.6]$ pour du béton plus ou moins renforcé. Cette force peut être utilisée en supplément des autres forces présentées dans chaque cas de cette section, même si elle concerne principalement ce cas.

1.2.3.3 Déferlante

En se rapprochant de la côte certains tsunamis peuvent perdre leur structure initiale et mènent à une série de déferlantes. Ce cas concerne principalement les structures de protection en partie immergées et est particulièrement délicat à modéliser. Dans tous les cas ci dessous, la formule empirique qui est généralement utilisée est :

$$F_{breaking} = 0.5\rho \cdot g \cdot C_{bw} \cdot A \cdot H_b^2 \tag{1.2.6}$$

avec $C_{bw} \approx 2$, "A" la surface apparente de l'objet et H_b la hauteur de la déferlante. On va voir ci dessous qu'il y a en fait de grandes différences entre les différents "types" de déferlantes, ce qui encourage à être très prudent avec cette formule. D'autre part dans le cas particulier de déferlantes avancées (*i.e.* rouleaux), Tomiczek et al. [219] ont montré avec leurs expériences que ce type de formules empiriques sous estime la poussée.

D'une manière générale, pour tous les cas présentés ci dessous, le lecteur peut se référer aux travaux de Bullock et al. [35].

"Flip Through" :

Il faut différencier plusieurs sous-événements. Le premier concerne les vagues qui vont déferler comme illustré en figure 1.9. Selon les expériences de Bullock et al. [35], ce cas, nommé "flip through", est le pire du point de vue de la pression maximale subie par la structure. Ce cas a été étudié numériquement par exemple par Cooker et Peregrine [45] et [46]. Il peut généralement être modélisé par un modèle incompressible basé sur les équations d'Euler. Le lecteur peut par exemple se référer à Medina et Abadie [151], où ce cas est traité en condition quasi réelle (*i.e.* avec une description de digue particulièrement représentative de la réalité) avec un modèle bifluide incompressible. Dans ce travail, tout comme dans les expériences de Bullock et al. [35], des vitesses très élevées sont obtenues à l'impact. Comme des pressions potentiellement très élevées sont également atteintes, une modélisation avec un modèle bifluide compressible de ce cas serait intéressante. Comme noté précédemment avec le modèle de Von Karman, le cas limite où l'impact est parfaitement normal à la structure (très proche du flip through) pourrait, mener un modèle incompressible vers des résultats erronés. Une illustration de ce type d'impact est donné en figure 1.9.

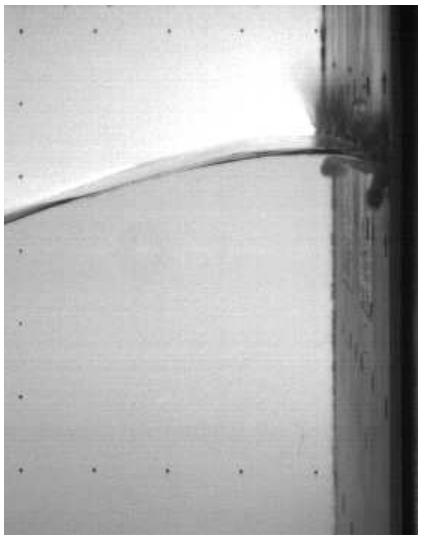


FIGURE 1.9 – Impact de type flip through. Cette photographie est extraite de Bogaert et al. [29].

"Piston de Bagnol" :

Le deuxième sous-événement est l'impact d'une déferlante dans un état légèrement plus avancé que le cas précèdent. Lors de l'impact, la courbure de la lèvre est suffisamment grande pour emprisonner une grosse bulle d'air. Ce cas est étudié expérimentalement dans Bogaert et al. [29]. La bulle principale emprisonnée est fortement contrainte ce qui met en jeu sa compressibilité. On obtient souvent une force impulsive oscillante due à cette bulle, le temps qu'elle s'échappe ou se désagrège. Pour une prévision précise de ce cas, un modèle bifluide compressible est adéquat. Des estimations de l'effet de l'emprisonnement de "la" bulle d'air peuvent être effectuées en 1D et se réfèrent dans la littérature au cas du "piston de Bagnol" (dû à ses travaux précurseurs sur ce sujet [16]). Une étude de ce cas avec un modèle bifluide SPH a été effectuée par Rafiee et al. [184] mais les auteurs concluent qu'une discrétisation plus fine que celle accessible (avec des temps de calcul raisonnable) avec leur code est nécessaire pour conclure. Une illustration de ce type d'impact est donné en figure 1.10.

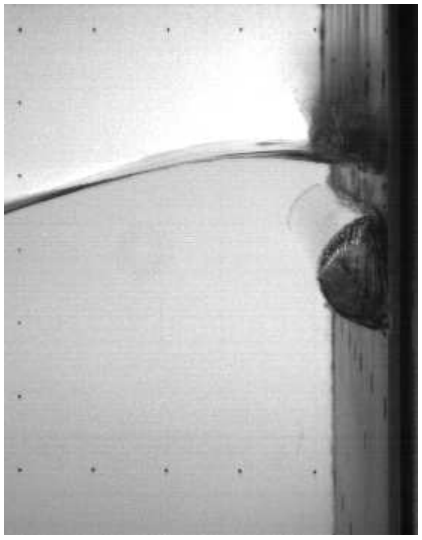


FIGURE 1.10 – Impact de type piston de Bagnol. Cette photographie est extraite de Bogaert et al. [29].

Rouleau :

Le dernier cas est celui d'une vague totalement déferlée frappant une digue semi immergée. Comme on l'a vu dans le paragraphe traitant de la "phase de propagation" (1.2.2), certains cas de tsunamis peuvent induire des déferlantes massives. Ce cas, sans doute le plus complexe à modéliser, est très peu présent dans la littérature.

Compte tenu de ce que nous avons vu précédemment sur le cas du "flip through", considéré comme majorant en terme de pression maximale d'impact de déferlante, ce cas peut paraître à première vue secondaire. En effet, généralement, on considère le pire des cas pour dimensionner un objet. En terme d'étude de risque, il faut cependant également tenir compte de la probabilité d'occurrence. A notre connaissance, pour étudier le risque tsunami dans une zone, on procède de la manière suivante : un inventaire des potentielles sources possibles est effectué, puis ces cas sont simulés avec des modèles "simples" (type Saint-Venant ou au mieux Serre-Green-Naghdi). En se concentrant sur une zone donnée, il est alors possible de savoir grossièrement ce qui peut se passer. Suivant le cas on peut arriver au résultat que des effets dispersifs seront présents et que les tsunamis engendreront des déferlantes (suite à la désintégration des ondes mères). Si pour une zone donnée, on peut montrer que ce cas est de loin le plus probable, alors ce cas sera le cas dimensionnant.

D'un point de vue moins appliqué, le cas d'impact de déferlante semble très intéressant. Pour aller plus loin dans ce raisonnement, on peut aussi se dire que le cas du "flip through" est certes *a priori* le pire, mais qu'il est peu probable, car il demande que la vague soit dans une configuration très particulière au moment de l'impact. Il en est de même pour le "piston de Bagnol". Selon nous, le cas des déferlantes est donc d'une importance majeure et peut être considéré comme au moins aussi important que le "flip through". Maintenant que ce cas, souvent considéré comme exotique, est justifié, passons à la manière dont il peut être modélisé plus précisément qu'avec la formule empirique (1.2.6). Un prérequis est d'être capable de faire déferler une vague.

Le modèle considéré doit donc être capable de gérer plusieurs interfaces dues à la génération de macro bulles au début du déferlement. S'en suit la destruction des macro-bulles en sous-bulles beaucoup plus petites. Selon les expériences de Mori et al. [163] et [162], les tailles moyennes de bulles observées dans un déferlement sont de l'ordre de $0.5mm$ ou plus. Les bulles les plus petites ont tendance à rester en "suspension" beaucoup plus longtemps que les plus grosses, qui remontent plus vite à la surface. En moyenne, la fraction volumique d'air varie entre 0.1 et 0.2 dans le rouleau, mais peut localement atteindre des valeurs de l'ordre de 0.5.

Même si les déferlantes de tsunami peuvent comporter des spécificités, ces valeurs peuvent être considérées *a priori* en terme d'ordre de grandeur aussi dans ce cas.

Un modèle bifluide considérant chaque bulle est clairement trop coûteux à résoudre compte tenu de la variété des échelles mises en jeu. Dans cette thèse, on propose de suivre la voie qui consiste à considérer qu'un rouleau peut être modélisé comme un mélange diphasique (compressible). Une telle modélisation est en accord avec les quelques expériences de la littérature des milieux aérés. Lorsque le modèle est bien construit on retrouve notamment la vitesse acoustique de Wood vérifiée expérimentalement pour ces milieux à bulles. Évidemment, la finesse des modèles pour bien représenter les milieux à bulles peut aller plus loin que cela, en considérant par exemple une bonne modélisation des pulsations des bulles du mélanges (voir par exemple Gavriliuk et Saurel [74] et Drui [61]). Cependant, le fait d'obtenir la bonne vitesse acoustique est une première étape, qui permet d'obtenir des modèles d'une relative simplicité. On rappelle que lorsque la bonne vitesse acoustique est obtenue, cela permet d'être assuré que la compressibilité du milieu est cohérente. On se restreindra à cette contrainte pour modéliser ce type d'impact.

Bien que la littérature soit assez pauvre sur l'impact de milieux aérés, on peut citer les travaux de Plumerault [173], Dias et al. [57], Bredmose [32] ou encore Ma et al. [142] et [143], utilisant ce type d'approches. Hélas, comme souvent lorsque des modèles complexes sont considérés, les convergences en maillages ne sont pas présentées en dehors d'une partie des travaux de Ma et al. [143]. Cela mis de côté, la plupart de ces travaux s'accordent sur le fait que les pressions d'impact sont plus longues dans le temps mais réduites en amplitude comparées au cas de fluides purs. La construction d'un schéma numérique "tous Mach robuste" (voir chapitre 6 pour plus de détails sur ce point) nous permettra d'envisager la convergence des résultats avec des maillages plus acceptables. Reste que ces types d'approches demeurent très coûteux en temps de calcul sans solveurs très évolués et doit donc être réduits à quelques études ponctuelles.

Nous avons jusqu'ici discuté d'effet compressible potentiel de ce type d'impact qu'il convient de préciser. On verra dans la partie modélisation que des mélanges très aérés peuvent impliquer des vitesses acoustiques de l'ordre de 20m/s pour des taux d'air de 50%. A faible vitesse (de l'ordre de 1m/s) on s'attend donc à observer des effets de compressibilité "classique". Mais pour certains rouleaux et impacts, des vitesses particulaires plus élevées sont tout à fait probables, ce qui pourrait générer des phénomènes plus singuliers comme des ondes de choc. D'autre part, dans le cas d'un impact d'eau pure sur une plaque (travaux de Ma et al. [143]), de la cavitation pourrait être observée (*cf.* aussi Lugni et al. [137]). Une contrainte importante en dehors de la généralité des modèles à considérer sera donc d'utiliser des méthodes numériques robustes et en partie dédiées à ces cas critiques.

Des expériences de ce genre d'impact sont assez peu répandues dans la littérature. Les travaux expérimentaux de Bullock et al. [35] montrent que les mélanges aérés ont tendance à réduire les pressions maximales atteintes, mais à allonger la durée de l'effort. Une question se pose alors. Qu'en est il de la force subie par la structure ? Il est en effet possible que localement la pression diminue, mais que sur la globalité du mur la poussée subie soit supérieure au cas pur, ou du moins pas autant "amorti" que soupçonné. Cette interrogation est en accord avec la réflexion donnée dans Bullock et al. [35]. Ce point encourage à pousser les études en considérant aussi l'analyse des forces. Dans le cas ou un basculement de la structure est possible, le calcul du moment est aussi important.

Déstabilisation des sols :

Un autre cas, qui n'est jamais pris en compte et n'a, semble-t-il, pas été étudié, est celui de la déstabilisation des sols sous vagues (tsunamique). Ce cas sort un peu du sujet des "impacts", mais peut avoir un rôle dans la déstabilisation d'une digue en temps long comme celle engendrée par le cas d'une submersion présentée dans le paragraphe 1.2.3.1. Notons que, par déstabilisation des sols, nous ne parlons pas de phénomène d'érosion de surface ou d'arrachement par le dessus d'une couche sableuse ou rocheuse, pouvant *in fine* effectivement déstabiliser une digue qui serait posée sur le sable, mais du phénomène dit de liquéfaction d'un milieu granulaire. Pour plus de détail sur le phénomène d'érosion ou d'arrachement autour d'une digue lors du passage d'un tsunami, le lecteur est renvoyé à Islam [101]. Le cas que nous évoquons se nomme liquéfaction des sols. Les travaux de Mutlu et al. [167] considèrent ce problème sous contrainte de vagues courtes (*i.e.*

vagues de vent). Il serait intéressant d'essayer de réfléchir à ce phénomène dans le cas des tsunamis et plus particulièrement lorsqu'un ressaut se forme sur une digue semi immergée où ce phénomène semble possible.

1.2.3.4 Bilan

On a vu que les différents types d'impacts de tsunami sur des structures sont variés du point de vue phénoménologique. En dehors du cas d'une submersion lente de digue (paragraphe 1.2.3.1), les vrais impacts (au sens violent) sont délicats à modéliser.

Pour englober tous ces cas, la modélisation des impacts sera effectuée avec un modèle compressible diphasique permettant de prévoir des impacts avec mélange air-eau à l'échelle macroscopique (ce vocabulaire est précisé dans le chapitre 4) et des phases parfaitement séparées. Une des contraintes de résolution est de pouvoir traiter la coalescence ou la séparation d'interfaces. Une autre contrainte, que l'on peut qualifier d'ultime, est de pouvoir à partir de phases séparées "générer" un mélange dès lors que la représentation de chaque bulle est inaccessible du point vue de précision de résolution / temps de calcul. Le respect de cette contrainte est un sujet très délicat et ne sera donc pas respecté. Lorsqu'on voudra représenter des mélanges, il seront imposés en condition initiale pour être simulés. On verra qu'il est possible, avec un schéma numérique adéquat, de résoudre aussi les cas "incompressibles" avec cette approche diphasique compressible. Ceci permet d'envisager tous les cas possibles. On verra également que dans les cas compressibles (avec ou sans mélange), le coût de calcul est très élevé et demande pour envisager de larges études de sensibilité le développement de solveurs élaborés.

Chapitre 2

Modèles pour les ondes longues

Sommaire

2.1 Introduction **32**
2.2 Dérivation **33**
2.2.1 Notations 33
2.2.2 Système de départ 33
2.2.3 Conditions aux limites 33
2.2.4 Equations d'Euler incompressible moyennées sur la verticale 34
2.2.5 Hypothèses suplémentaires et adimensionnement 35
2.2.6 Modèle de Serre 37
2.2.7 Modèle de Boussinesq 41
2.2.8 Modèle de Saint-Venant 41
2.2.9 Equations sur l'énergie 42
2.3 Bilan **42**

Le but de ce chapitre est de donner quelques éléments historiques sur l'évolution des modèles adaptés aux ondes longues et de montrer comment ces modèles peuvent être dérivés. Cela permet de bien comprendre les limites de ces modèles.

2.1 Introduction

L'étude des ondes longues remonte à bien longtemps. Une des premières théories abouties vient de Laplace [148] quand il propose un modèle adapté aux ondes de marée. Sans décrire les avancées majeures qui ont suivi, avec notamment les travaux de Lagrange et Poisson (le lecteur est renvoyé à [47, 49] pour plus de détails sur ce point), l'étude des ondes plus courtes, telles que les ondes de vent, sont attribuées à Airy (en 1841 [5]) puis Stokes pour une description non linéaire proposée quelques années plus tard. Vient ensuite en 1871 le modèle de Saint-Venant [51] permettant d'étudier les ondes non-linéaires en milieu peu profond. Ce modèle est souvent appelé NLSW (Non Linear Shallow Water). A ce moment de l'histoire, l'existence d'ondes solitaires mises en évidence expérimentalement par Russell en 1834 n'était toujours pas expliquée théoriquement. Les travaux de Russell étaient alors très controversé par Airy. Il fallut attendre 1872 pour que Boussinesq [31] explique ce phénomène avec un modèle en eau peu profonde faiblement dispersif et faiblement non linéaire, où non-linéarité et dispersion s'équilibrent. Il posa ensuite en 1877 la célèbre équation dite de KdV (équation redécouverte indépendamment par Korteweg-de Vries en 1895).

Ce grand pas dans les modèles en eau peu profonde fut suivi des travaux de Serre en 1953 [199] et indépendamment de Su et Gadner [209] quelques années après (le lecteur pourra se référer à [18] pour une dérivation plus détaillée). Leur modèle permit de prendre en compte une forte non-linéarité des ondes tout en restant faiblement dispersif. L'extension du modèle de Boussinesq en 2D sur fond faiblement variable est dû à Peregrine [170]. La prise en compte d'une bathymétrie quelconque pour le modèle de Serre 1D est publié par Seabra-Santos en 1987 [198]. Le lecteur peut aussi se reporter à Cienfuegos [43] où la dérivation de ce modèle est plus détaillée. Finalement en 1976, l'extension 2D sur bathymétrie quelconque est effectuée par Green et Naghdi [82].

D'autres modèles plus perfectionnés ont par la suite été dérivés améliorant encore la validité de ces modèles références (*cf.* Wei et al. [230] et Madsen et al. [145]).

En plus des papiers fondateurs, de nombreuses dérivations plus "modernes" (*i.e.* plus mathématiques) de ces modèles sont proposées dans la littérature. Cependant peu d'entre elles traitent de problèmes sur bathymétrie quelconque et beaucoup font des hypothèses non nécessaires à la dérivation (telle que supposer une répartition hydrostatique de la pression ou faire des développements en série *a priori* sans justification par exemple). Dans ce chapitre, les trois modèles de référence vont être redérivés rigoureusement à partir des équations d'Euler en mettant en évidence les paramètres dominants des écoulements en milieu peu profond. La procédure présentée est générale et permet de déduire les modèles simplifiés des modèles étendus. Le premier modèle que l'on obtiendra est celui de Serre sur bathymétrie quelconque. Le second est celui de Boussinesq sur fond faiblement variable. Pour finir, on déduira le modèle le plus simple mais pas le moins utile, le modèle de Saint-Venant. Ce travail de dérivation est relativement similaire à la première partie du papier de Lannes [120] en terme d'aboutissement, mais la méthode de dérivation employée ici ne fait pas appel à l'opérateur Dirichlet-Neumman et nécessite donc moins de connaissances en mathématiques avancées. Les principales références sur lesquelles la dérivation qui suit s'appuie sont (hormis les papiers fondateurs précédemment évoqués) : [75, 209, 18, 158] pour les résultats sur fond plat et [190, 43, 120] pour les cas avec bathymétrie variable. Pour les grandes lignes, le lecteur pourra aussi se reporter à [231, 229]. Précisons pour finir que le modèle de Saint-Venant et de Serre-Green-Naghdi peuvent être aussi dérivés en utilisant le principe variationnel (*cf.* Miles et Salmon [156]).

2.2 Dérivation

2.2.1 Notations

On se place en 2D pour plus de simplicité. Soient $\overrightarrow{x}$ le vecteur unitaire horizontal et $\overrightarrow{z}$ le vecteur unitaire vertical. Le sens de $\overrightarrow{z}$ est choisi de sorte que les effets gravitaires s'expriment $\overrightarrow{g} = -\|\overrightarrow{g}\|\,\overrightarrow{z}$. Soient u la vitesse selon $\overrightarrow{x}$, w la vitesse selon $\overrightarrow{z}$, et $\overrightarrow{U}$ le vecteur vitesse défini par ces deux composantes. Soient p la pression et ρ la masse volumique. On note b la position du fond et η la surface libre. Le domaine physique étudié est $\Omega = \mathbb{R} \times [b, \eta]$. La hauteur d'eau totale est définie par $h = \eta - b \geq 0$.

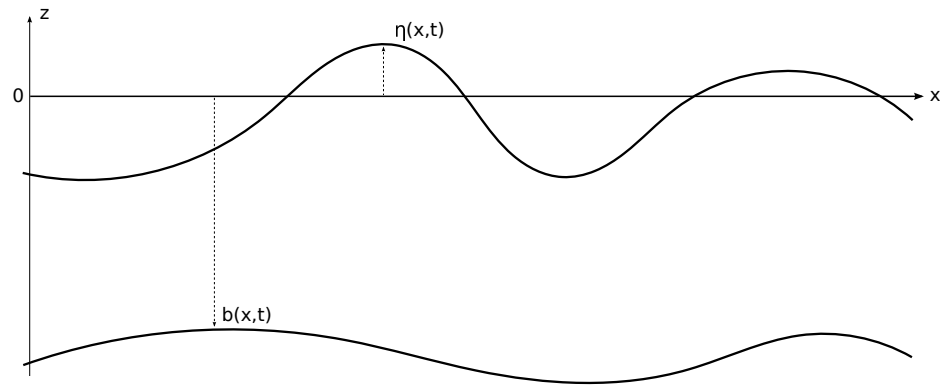


FIGURE 2.1 – Notations.

Dans la suite on note les dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial g} := f_g$.

2.2.2 Système de départ

Condition d'incompressiblité ($div\overrightarrow{U} = 0$) :

$$u_x + w_z = 0 \tag{2.2.1}$$

Équations de conservation de quantité de mouvement d'Euler en 2D :

$$u_t + uu_x + wu_z = -\frac{1}{\rho}p_x \tag{2.2.2}$$

$$w_t + uw_x + ww_z = -\frac{1}{\rho}p_z - g \tag{2.2.3}$$

2.2.3 Conditions aux limites

Hors précisions particulières, les variables $\{u, v, p\}$ dépendent de $\{x, z, t\}$.

— Conditions en surface :

On exprime d'abord le fait qu'une particule matérielle en surface reste en surface (surface imperméable), d'où :

$$w(z = \eta) = \frac{d\eta}{dt} = \eta_t + u(z = \eta)\eta_x \tag{2.2.4}$$

De plus, en assumant que les effets de l'air sont négligeables, il vient que la pression dans l'air est constante. La pression peut être définie à une constante près que l'on choisit de sorte que $p_{air} = 0$. Par continuité de la pression à l'interface fluide léger / fluide dense on a donc :

$$p(z = \eta) = 0 \tag{2.2.5}$$

— Conditions au fond :
Cette dernière condition exprime l'imperméabilité du fond (supposé ici non dépendant du temps).

$$w(z=b) = \frac{db}{dt} = b_t + ub_x = ub_x \tag{2.2.6}$$

2.2.4 Equations d'Euler incompressible moyennées sur la verticale

On définit une quantité moyennée sur la hauteur d'eau ($h = \eta - b$) par :

$$\overline{f}(x,t) = \frac{1}{\eta - b}\int_b^\eta f(x,z,t)dz = \frac{1}{h}\int_b^\eta f(x,z,t)dz \tag{2.2.7}$$

D'autre part on rappelle la théorème d'intégration de Leibniz (f et $\partial_{x,z}f$ sont continues et $\big(\alpha(x), \beta(x)\big)$ sont des fonctions différentiables de x) :

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,z)dz = \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,z)dz\Big)_x - f(x,\beta(x))\beta_x(x) + f(x,\alpha(x))\alpha_x(x) \tag{2.2.8}$$

Équation de masse moyennée sur la verticale :

On part de la condition d'incompressibilité (2.2.1).

$$\begin{aligned}
u_x + w_z &= 0 \\
\Longleftrightarrow \int_b^\eta w_z dz &= -\int_b^\eta u_x dz \\
\Longleftrightarrow w(z=\eta) - w(z=b) &= -\int_b^\eta u_x dz \\
\underbrace{\Longleftrightarrow}_{avec(2.2.8)} \quad ... &= -\big((\int_b^\eta u dz)_x - u(\eta)\eta_x + u(b)b_x\big) \\
\underbrace{\Longleftrightarrow}_{avec(2.2.7)} \quad ... &= -\big((h\overline{u})_x - u(\eta)\eta_x + u(b)b_x\big)
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les conditions au limites (2.2.4) et (2.2.6), on obtient l'équation de masse moyennée sur la verticale :

$$\boxed{\eta_t + (h\overline{u})_x = 0} \tag{2.2.9}$$

Équation de quantité de mouvement horizontale moyennée sur la verticale :

On part de l'équation de quantité de mouvement selon $\overrightarrow{x}$ (2.2.2).

$$\begin{aligned}
u_t + uu_x + wu_z &= -\frac{1}{\rho}p_x \\
\Longleftrightarrow \underbrace{\int_b^\eta u_t dz}_{\alpha} + \underbrace{\int_b^\eta uu_x dz}_{\beta} + \underbrace{\int_b^\eta wu_z dz}_{\gamma} &= -\frac{1}{\rho}\underbrace{\int_b^\eta p_x dz}_{\zeta}
\end{aligned}$$

Pour alléger l'expression, on simplifie chaque terme séparément.

$$\alpha \underbrace{=}_{avec(2.2.8)} (\int_b^\eta udz)_t - u(\eta)\eta_t + u(b)b_t = (h\overline{u})_t - u(\eta)\eta_t$$

$$\beta = \int_b^\eta \frac{1}{2}(u^2)_x dz \underbrace{=}_{avec(2.2.8)} \frac{1}{2}\Big((\int_b^\eta u^2 dz)_x - u^2(\eta)\eta_x + u^2(b)b_x\Big)$$

$$\gamma \underbrace{=}_{\text{par intégration par parties}} [wu]_b^\eta - \int_b^\eta w_z u dz \underbrace{=}_{avec(2.2.1)} [wu]_b^\eta + \int_b^\eta u_x u dz = w(\eta)u(\eta) - w(b)u(b) + \beta$$

$$\underbrace{=}_{avec(2.2.4)et(2.2.6)} \eta_t u(\eta) + u^2(\eta)\eta_x - u^2(b)b_x + \beta$$

$$\zeta \underbrace{=}_{avec(2.2.8)} -\frac{1}{\rho}\left(\Big(\int_b^\eta pdz\Big)_x - p(\eta)\eta_x + p(b)b_x\right) \underbrace{=}_{avec(2.2.5)} -\frac{1}{\rho}\Big((h\overline{p})_x + p(b)b_x\Big)$$

Finalement, on obtient l'équation de quantité de mouvement horizontale moyennée sur la verticale :

$$\boxed{(h\overline{u})_t + (h\overline{u^2} + \frac{1}{\rho}h\overline{p})_x = -\frac{1}{\rho}p(b)b_x} \tag{2.2.10}$$

Équation de quantité de mouvement verticale moyennée sur la verticale :

Pour fermer le système formé par les deux équations précédentes ((2.2.9) et (2.2.10)), il faut trouver une relation sur la pression. On part de l'équation de quantité de mouvement selon $\overrightarrow{z}$ (2.2.3).

$$-p_z = \rho\big(g + w_t + uw_x + ww_z\big)$$

$$\begin{aligned} & -p_z = \rho\big(g + w_t + uw_x + ww_z\big) \\ \underbrace{\Longleftrightarrow}_{avec(2.2.5)} \quad & p(z) = \rho\big(\int_z^\eta gdz + \int_z^\eta w_t dz + \int_z^\eta uw_x dz + \int_z^\eta ww_z dz\big) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'équation de quantité de mouvement horizontale moyennée sur la verticale :

$$\boxed{p(z) = \rho g(\eta - z) + \rho\big(\int_z^\eta w_t dz + \int_z^\eta uw_x dz + \int_z^\eta ww_z dz\big)} \tag{2.2.11}$$

On obtient ainsi les équations d'Euler moyennées sur la verticale. La seule hypothèse forte faite jusqu'ici vient de l'incompressibilité du fluide. Le champ de vitesse est rotationel.

2.2.5 Hypothèses suplémentaires et adimensionnement

Pour aller plus loin, la condition d'irrotationalité ($rot\overrightarrow{U} = 0$) est exprimée. Cette condition est peu restrictive en dehors des zones de déferlement ou de fort cisaillement. En 2D on a :

$$u_z - w_x = 0 \tag{2.2.12}$$

Rappelons le système général obtenu :

$$
\begin{aligned}
&u_x + w_z = 0\\
&u_z - w_x = 0\\
&\eta_t + (h\overline{u})_x = 0\\
&(h\overline{u})_t + (h\overline{u^2} + \frac{1}{\rho}h\overline{p})_x = -\frac{1}{\rho}p(b)b_x\\
&p(z) = \rho g(\eta - z) + \rho\big(\int_z^\eta w_t dz + \int_z^\eta u w_x dz + \int_z^\eta w w_z dz\big)
\end{aligned}
$$

complété par les conditions aux limites (2.2.4),(2.2.5) et (2.2.6).

Ce système correspond aux équations d'Euler irrotationnelles moyennées sur la verticale. Il est capable de modéliser proprement beaucoup d'ondes gravitaires.

Dans ce chapitre on souhaite étudier plus particulièrement les ondes longues (ou les ondes en eau peu profonde). Cette restriction d'étude va nous permettre de simplifier le système précédent. Pour cela chaque variable est adimensionnée par des grandeurs caractéristiques d'un écoulement en couche mince. Les quantités introduites sont :

— λ la longueur d'onde caractéristique de l'écoulement,
— a l'amplitude caractéristique des ondes de l'écoulement,
— h_0 la hauteur d'eau caractéristique de l'écoulement,
— $c_0 = \sqrt{gh_0}$ la célérité caractéristique de l'écoulement,
— b_0 la variation caractéristique de la bathymétrie.

On forme ainsi trois petits paramètres dans le cas d'ondes longues (ou d'eau peu profonde) :

$$
\begin{cases}
\boxed{\epsilon = a/h_0} & \textbf{le parèmetre de non-linéarité de la surface libre}\\
\boxed{\sigma = h_0/\lambda} & \textbf{le paramètre de dispersion}\\
\boxed{\beta = b_0/h_0} & \textbf{le paramètre de non-linéarité de la bathymétrie}
\end{cases}
$$

A partir de là, l'intuition physique ou des données expérimentales permettent de bien adimensionner les variables afin de construire un modèle bien adapté aux couches minces.

$$
\begin{aligned}
x &= \tilde{x}\lambda\\
z &= \tilde{z}h_0\\
\eta &= \tilde{\eta}a\\
b &= \tilde{b}b_0\\
t &= \tilde{t}\frac{\lambda}{c_0}\\
p &= \tilde{p}\rho c_0^2\\
u &= \tilde{u}c_0\epsilon\\
w &= \tilde{w}c_0\epsilon\sigma
\end{aligned}
$$

Ces variables sont injectées dans le système précédent. Le système adimensionné obtenu est le suivant :

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{w}_{\tilde{z}} = 0 \tag{2.2.13}$$

$$\tilde{u}_{\tilde{z}} - \sigma^2\tilde{w}_{\tilde{x}} = 0 \tag{2.2.14}$$

$$\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \epsilon(\tilde{h}\tilde{\overline{u}})_{\tilde{x}} = 0 \tag{2.2.15}$$

$$\sigma\epsilon(\tilde{h}\tilde{\overline{u}})_{\tilde{t}} + (\sigma\epsilon^2\tilde{h}\tilde{\overline{u^2}} + \sigma\tilde{h}\tilde{\overline{p}})_{\tilde{x}} = -\sigma\beta\tilde{p}(\tilde{b})\tilde{b}_{\tilde{x}} \tag{2.2.16}$$

$$\tilde{p}(\tilde{z}) = (\epsilon\tilde{\eta} - \tilde{z}) + \epsilon\sigma^2\int_{\tilde{z}}^{\epsilon\tilde{\eta}}\tilde{w}_{\tilde{t}}d\tilde{z} + \epsilon^2\sigma^2\int_{\tilde{z}}^{\epsilon\tilde{\eta}}\tilde{u}\tilde{w}_{\tilde{x}}d\tilde{z} + \epsilon^2\sigma^2\int_{\tilde{z}}^{\epsilon\tilde{\eta}}\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{z}}d\tilde{z} \tag{2.2.17}$$

Dans la suite les “ ˜ ” seront omis pour simplifier l'écriture des expressions mathématiques. D'autre part, lors des futures intégrations, il faut veiller à prendre les bonnes bornes pour les calculs suite aux changements de variables. On rappelle les deux cas principaux rencontrés ci-dessous :

— si $z = \eta$ alors $\tilde{z} = \dfrac{\eta}{h_0} = \epsilon\tilde{\eta}$,

— si $z = b$ alors $\tilde{z} = \dfrac{b}{h_0} = \beta\tilde{b}$.

2.2.6 Modèle de Serre

Tous les modèles qui vont être dérivés dans la suite supposent les différents paramètres adimensionnant plus ou moins petits. Le modèle de Serre est un des modèles (à deux équations) le plus général utilisé pour les simulations d'écoulement en eau peu profonde. Ce modèle est précis en $O(\sigma^4)$.

Détermination des vitesses :

On part de (2.2.13).

$$\begin{aligned} & u_x + w_z = 0 \\ \Longleftrightarrow & \int_{\beta b}^{z} w_z dz = -\int_{\beta b}^{z} u_x dz \\ \underbrace{\Longleftrightarrow}_{avec(2.2.8)} & w(z) - w(\beta b) = -\Big(\int_{\beta b}^{z} u dz\Big)_x + u(z)z_x - u(b)\beta b_x \end{aligned}$$

D'où avec (2.2.6) :

$$w(z) = -\Big(\int_{\beta b}^{z} u dz\Big)_x \tag{2.2.18}$$

On part maintenant de (2.2.14).

$$\begin{aligned} & u_z = \sigma^2 w_x \\ \Longleftrightarrow & \int_{\beta b}^{z} u_z dz = \sigma^2 \int_{\beta b}^{z} w_x dz \end{aligned}$$

D'où :

$$u(x, z, t) = u(x, z = \beta b, t) + \sigma^2 \int_{\beta b}^{z} w_x dz \tag{2.2.19}$$

On injecte (2.2.19) dans (2.2.18) :

$$w(z) = -\Big(\int_{\beta b}^{z} u(\beta b) dz\Big)_x + O(\sigma^2)$$

D'où l'expression de la vitesse verticale adimensionnée à la précision $O(\sigma^2)$:

$$w(x, z, t) = -\big(u(\beta b)(z - \beta b)\big)_x + O(\sigma^2) = -u_x(\beta b)z + \beta\big(u(\beta b)b\big)_x + O(\sigma^2) \tag{2.2.20}$$

On injecte (2.2.20) dans (2.2.19) :

$$\begin{aligned}
u(x,z,t) &= u(\beta b) + \sigma^2 \int_{\beta b}^{z} w_x dz \\
&= u(\beta b) + \sigma^2 \int_{\beta b}^{z} \Big(- \big(u(\beta b)(z-\beta b)\big)_x + O(\sigma^2)\Big)_x dz \\
&= u(\beta b) + \sigma^2 \int_{\beta b}^{z} \Big(- \big(u(\beta b)(z-\beta b)\big)_{xx}\Big) dz + O(\sigma^4) \\
&= u(\beta b) + \sigma^2 \Big(- u_{xx}(\beta b) \int_{\beta b}^{z} (z-\beta b) dz + u(\beta b)\beta b_{xx} \int_{\beta b}^{z} dz\Big) + O(\sigma^4)
\end{aligned}$$

D'où l'expression de la vitesse horizontale adimensionnée à la précision $O(\sigma^4)$:

$$u(x,z,t) = u(\beta b) + \sigma^2 \Big(- u_{xx}(\beta b) \frac{(z-\beta b)^2}{2} + u(\beta b)\beta b_{xx}\big(z-\beta b\big)\Big) + O(\sigma^4) \tag{2.2.21}$$

Remarque 2. *Cette procédure peut être continuée pour obtenir des expressions sur les vitesses à des ordres plus élevés. On note qu'on s'est arrêté à l'ordre $O(\sigma^2)$ pour $w(x,z,t)$, alors qu'on est allé jusqu'à $O(\sigma^4)$ pour $u(x,z,t)$. Comme on souhaite construire un modèle à la précision $O(\sigma^4, \epsilon\sigma^2)$, cet ordre est suffisant pour $w(x,z,t)$, car cette variable est toujours facteur de σ^2 dans les équations gouvernantes (2.2.17).*

Remarque 3. *On a finalement obtenu un développement asymptotique des vitesses autour du petit paramètre σ. Dans beaucoup de travaux, ce développement est supposé vrai alors qu'il est justifiable.*

On souhaite formuler un modèle dépendant de la vitesse moyenne de l'écoulement. Les équations sur les vitesses sont intégrées selon la verticale afin d'obtenir les quantités moyennées :

$$\begin{aligned}
\overline{u}(x,z,t) &= \frac{1}{\epsilon\eta - \beta b} \int_{\beta b}^{\epsilon\eta} u(x,z,t) dz \\
&= u(\beta b) + \sigma^2 \Big(- u_{xx}(\beta b) \frac{h^2}{6} + u(\beta b)\beta b_{xx} \frac{h}{2}\Big) + O(\sigma^4)
\end{aligned}$$

En injectant $u(\beta b)$ dans (2.2.21) puis dans (2.2.20), on obtient :

$$\boxed{u(x,z,t) = \overline{u} + \sigma^2 \left(- \overline{u}_{xx} \Big(\frac{(z-\beta b)^2}{2} - \frac{h^2}{6}\Big) + \overline{u}\beta b_{xx} \Big((z-\beta b) - \frac{h}{2}\Big)\right) + O(\sigma^4)} \tag{2.2.22}$$

$$\boxed{w(x,z,t) = -\big(\overline{u}(z-\beta b)\big)_x + O(\sigma^2)} \tag{2.2.23}$$

Détermination de la pression :

On part de (2.2.17) :

$$p(z) = (\epsilon\eta - z) + \big(\underbrace{\epsilon\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} w_t dz}_{\alpha} + \underbrace{\epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} u w_x dz}_{\beta} + \underbrace{\epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} w w_z dz}_{\gamma} \big)$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \epsilon\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} w_t dz \\
&= \epsilon\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \Big(- \big(\overline{u}(z-\beta b)\big)_x + O(\sigma^2)\Big)_t dz \\
&= \epsilon\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \Big(- \overline{u}_x(z-\beta b) + \overline{u}\beta b_x\Big)_t dz + O(\epsilon\sigma^4) \\
&= \epsilon\sigma^2\Big(- \overline{u}_{xt}\big(\frac{h^2}{2} - \frac{(z-\beta b)^2}{2}\big) + \overline{u}_t\beta b_x(\epsilon\eta - z)\Big) + O(\epsilon\sigma^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} u w_x dz \\
&= \epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \Big(\big(\overline{u} + O(\sigma^2)\big)\big(- \big(\overline{u}(z-\beta b)\big)_x + O(\sigma^2)\big)_x\Big) dz \\
&= \epsilon^2\sigma^2\overline{u} \int_z^{\epsilon\eta} \Big(- \big(\overline{u}(z-\beta b)\big)_{xx}\Big) dz + O(\epsilon^2\sigma^4) \\
&= \epsilon^2\sigma^2\overline{u} \int_z^{\epsilon\eta} \Big(- \big(\overline{u}_{xx}(z-\beta b) - 2\overline{u}_x\beta b_x - \overline{u}\beta b_{xx}\big)\Big) dz + O(\epsilon^2\sigma^4) \\
&= \epsilon^2\sigma^2\overline{u}\Big(- \overline{u}_{xx}\big(\frac{h^2}{2} - \frac{(z-\beta b)^2}{2}\big) + \big(2\overline{u}_x\beta b_x + \overline{u}\beta b_{xx}\big)(\epsilon\eta - z)\Big) + O(\epsilon^2\sigma^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \big(w w_z\big) dz \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \big(w^2\big)_z dz \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \Big(\big(- \big(\overline{u}(z-\beta b)\big)_x + O(\sigma^2)\big)^2\Big)_z dz \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \Big(\big(\big(\overline{u}(z-\beta b)\big)_x\big)^2\Big)_z dz + O(\epsilon^2\sigma^4) \\
&= \epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \Big(\big(\overline{u}(z-\beta b)\big)_x \overline{u}_x\Big) dz + O(\epsilon^2\sigma^4) \\
&= \epsilon^2\sigma^2 \int_z^{\epsilon\eta} \Big((\overline{u}_x)^2(z-\beta b) - \overline{u}\overline{u}_x\beta b_x\Big) dz + O(\epsilon^2\sigma^4) \\
&= \epsilon^2\sigma^2\Big((\overline{u}_x)^2\big(\frac{h^2}{2} - \frac{(z-\beta b)^2}{2}\big) - \overline{u}\overline{u}_x\beta b_x(\epsilon\eta - z)\Big) + O(\epsilon^2\sigma^4)
\end{aligned}
$$

D'où les expressions de la pression adimensionnée et de sa moyenne à la précision $O(\epsilon\sigma^4)$:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
p(x,z,t) = (\epsilon\eta - z) & \\
& \epsilon\sigma^2\Big(- \overline{u}_{xt}\big(\frac{h^2}{2} - \frac{(z-\beta b)^2}{2}\big) + \overline{u}_t\beta b_x(\epsilon\eta - z)\Big) \\
& \epsilon^2\sigma^2\overline{u}\Big(- \overline{u}_{xx}\big(\frac{h^2}{2} - \frac{(z-\beta b)^2}{2}\big) + \big(2\overline{u}_x\beta b_x + \overline{u}\beta b_{xx}\big)(\epsilon\eta - z)\Big) \\
& + \epsilon^2\sigma^2\Big((\overline{u}_x)^2\big(\frac{h^2}{2} - \frac{(z-\beta b)^2}{2}\big) - \overline{u}\overline{u}_x\beta b_x(\epsilon\eta - z)\Big) + O(\epsilon\sigma^4)
\end{aligned}
}
\tag{2.2.24}
$$

$$\overline{p} = \frac{1}{h}\Bigg[\frac{h^2}{2} + \epsilon\sigma^2\Big(-\overline{u}_{xt}\frac{h^3}{3} + \overline{u}_t\beta b_x\frac{h^2}{2}\Big) + \epsilon^2\sigma^2\overline{u}\Big(-\overline{u}_{xx}\frac{h^3}{3} + \big(2\overline{u}_x\beta b_x + \overline{u}\beta b_{xx}\big)\frac{h^2}{2}\Big)$$
$$+ \epsilon^2\sigma^2\Big((\overline{u}_x)^2\frac{h^3}{3} - \overline{u}\overline{u}_x\beta b_x\frac{h^2}{2}\Big)\Bigg] + O(\epsilon\sigma^4) \tag{2.2.25}$$

Détermination du flux de masse :

Le système à deux équations trouvé précédemment ((2.2.15), (2.2.16)) dépend de $(h, \overline{u}, \overline{u^2}, \overline{p})$. Le terme $\overline{u^2}$ est problématique car il rajoute une inconnue. Pour supprimer cette variable estimons l'écart avec $\overline{u}^2$.

$$\begin{aligned}
\overline{u^2} &= \frac{1}{\epsilon\eta - \beta b}\int_{\beta b}^{\epsilon\eta} u^2 dz \\
&= \frac{1}{\epsilon\eta - \beta b}\int_{\beta b}^{\epsilon\eta}\Big(u(\beta b) + \sigma^2\big(-\frac{(z^2-(\beta b)^2)}{2}u_{xx}(\beta b) + \big(z-\beta b\big)\big(u(\beta b)\beta b\big)_{xx}\big) + O(\sigma^4)\Big)^2 dz \\
&= \frac{1}{\epsilon\eta - \beta b}\int_{\beta b}^{\epsilon\eta}\Big(u^2(\beta b) + 2u(\beta b)\sigma^2\big(-\frac{(z^2-(\beta b)^2)}{2}u_{xx}(\beta b) + \big(z-\beta b\big)\big(u(\beta b)\beta b\big)_{xx}\big)\Big)dz + O(\sigma^4) \\
&= \frac{1}{\epsilon\eta - \beta b}\Big(u^2(\beta b)(\epsilon\eta - \beta b) + 2u(\beta b)\sigma^2\big(-(\frac{(\epsilon\eta)^3}{6} + \frac{(\beta b)^3}{3} - \frac{(\beta b)^2\epsilon\eta}{2})u_{xx}(\beta b) + (\frac{(\epsilon\eta-\beta b)^2}{2})\big(u(\beta b)\beta b\big)_{xx}\big)\Big) + O(\sigma^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u}^2 &= \left(\frac{1}{\epsilon\eta - \beta b}\int_{\beta b}^{\epsilon\eta} u dz\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\epsilon\eta - \beta b}\int_{\beta b}^{\epsilon\eta}\Big(u(\beta b) + \sigma^2\big(-\frac{(z^2-(\beta b)^2)}{2}u_{xx}(\beta b) + \big(z-\beta b\big)u(\beta b)\beta b\big)\Big)dz\right)^2 + O(\sigma^4) \\
&= \left(\frac{1}{\epsilon\eta - \beta b}\Big(u(\beta b)(\epsilon\eta - \beta b) + \sigma^2\big(-(\frac{(\epsilon\eta)^3}{6} + \frac{(\beta b)^3}{3} - \frac{(\beta b)^2\epsilon\eta}{2})u_{xx}(\beta b) + (\frac{(\epsilon\eta-\beta b)^2}{2})u(\beta b)\beta b\big)\right)^2 + O(\sigma^4)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\overline{u}^2 - \overline{u^2} = O(\sigma^4)} \tag{2.2.26}$$

Modèle de Serre sur bathymétrie quelconque

On remplace (2.2.26) puis $\overline{p}$ dans l'équation de quantité de mouvement selon x (2.2.16) :

$$\begin{aligned}
&\sigma\epsilon(h\overline{u})_t + (\sigma\epsilon^2 h\overline{u}^2 + \sigma h\overline{p})_x = -\sigma\beta p(\beta b)b_x \\
\underbrace{\Longleftrightarrow}_{avec(2.2.25)} \quad &\sigma\epsilon(h\overline{u})_t + \Bigg(\sigma\epsilon^2 h\overline{u}^2 + \sigma\Big(\frac{h^2}{2} - \epsilon\sigma^2 .....
\end{aligned}$$

On obtient finalement le système 1DV composé de l'équation de masse et de quantité de mouvement selon x suivant :

$$\boxed{h_t + (h\overline{u})_x = 0} \tag{2.2.27}$$

$$\boxed{\sigma\epsilon(h\overline{u})_t + \sigma\epsilon^2(h\overline{u}^2)_x + \sigma(\frac{h^2}{2})_x + \sigma\beta h b_x + \epsilon\sigma^3 T_{temps} + \epsilon^2\sigma^3 T_{inertie} + \epsilon^2\sigma^3 T_{bathy} = 0} \tag{2.2.28}$$

Avec les termes additionnels classés dans 3 familles (temporels, inertiels et bathymétriques) :

$$T_{temps} = \left(\left(-\frac{h^3}{3}\overline{u}_{xt} \right)_x + \frac{\beta}{2}\left(\left(h^2 b_x \overline{u}_t \right)_x - h^2 b_x \overline{u}_{xt} \right) + \beta^2 h (b_x)^2 \overline{u}_t \right) \tag{2.2.29}$$

$$T_{inertie} = \left(-\frac{h^3}{3}\left(\overline{u}\overline{u}_{xx} - (\overline{u}_x)^2 \right) \right)_x \tag{2.2.30}$$

$$T_{bathy} = \left(\frac{\beta}{2}\left(\left(h^2 \overline{u}(\overline{u}_x b_x + \overline{u} b_x x) \right)_x - h^2 b_x \left(\overline{u}\overline{u}_{xx} - (\overline{u}_x)^2 \right) \right) + \beta^2 b_x h \left(\overline{u}\overline{u}_x + (\overline{u})^2 b_{xx} \right) \right) \tag{2.2.31}$$

Ce modèle de Serre-Green-Naghdi (adimensionné) sur bathymétrie quelconque est valable quelque soit la non-linéarité de la surface libre, mais sous contrainte du paramètre σ petit (termes en $O(\sigma^4)$ supposés nuls). On retrouve ici exactement le résultats de Lannes [120] réduit en 1DV. Ce modèle est dispersif.

Remarque 4. *Supposant la bathymétrie plate (i.e. $b(x) = b_0 \in \mathbb{R}$), on obtient :*

$$\boxed{h_t + (h\overline{u})_x = 0} \tag{2.2.32}$$

$$\boxed{\sigma\epsilon(h\overline{u})_t + \sigma\epsilon^2(h\overline{u}^2)_x + \sigma(\frac{h^2}{2})_x - \left(\frac{h^3}{3}\left(\epsilon\sigma^3\overline{u}_{xt} + \epsilon^2\sigma^3\overline{u}\overline{u}_{xx} - \epsilon^2\sigma^3(\overline{u}_x)^2 \right) \right)_x = 0} \tag{2.2.33}$$

Ce modèle de Serre (adimensionné) sur fond plat est obtenu sous la même forme que Su et Gardner [209] ou encore Barthelemy [18].

2.2.7 Modèle de Boussinesq

Ici on se place dans le cas faiblement non linéaire : soit $\epsilon = O(\sigma^2)$. Les termes en $O(\epsilon^2\sigma^2)$ sont donc maintenant négligés.

$$\boxed{h_t + (h\overline{u})_x = 0} \tag{2.2.34}$$

$$\boxed{\sigma\epsilon(h\overline{u})_t + \sigma\epsilon^2(h\overline{u}^2)_x + \sigma(\frac{h^2}{2})_x + \sigma\beta h b_x + \epsilon\sigma^3 T_{temps} = 0} \tag{2.2.35}$$

Ce modèle est celui de Boussinesq sur fond quelconque attribué à Peregrine, que l'on retrouve sous cette forme par exemple dans Lannes [120]. Ce modèle est dispersif.

2.2.8 Modèle de Saint-Venant

Pour finir, le modèle de Saint-Venant (adimensionné), pour lequel la non-linéarité de la bathymétrie et de la surface libre sont quelconques, est obtenu en négligeant les termes en $O(\sigma^2)$. Ce modèle est non dispersif.

$$\boxed{h_t + (h\overline{u})_x = 0} \tag{2.2.36}$$

$$\boxed{\sigma\epsilon(h\overline{u})_t + \sigma\epsilon^2(h\overline{u}^2)_x + \sigma(\frac{h^2}{2})_x + \sigma\beta h b_x = 0} \tag{2.2.37}$$

La dérivation en partant des équations Navier-Stokes obtenue par Gerbeau et Perthame [75] donne un système identique lorsque la viscosité est négligée.

Remarque 5. *Le modèle de Saint-Venant est hyperbolique tandis que celui de Boussinesq et de Serre-Green-Naghdi sont elliptiques. Ceci complexifie entre autres leur résolution.*

2.2.9 Equations sur l'énergie

La procédure est la même que pour les équations précédentes. On part de la conservation d'énergie mécanique d'Euler, on intègre sur la verticale, on adimensionne puis on néglige les termes d'ordre réduit. Pour simplifier, on se concentre seulement sur le modèle de Saint-Venant dans ce paragraphe. Le lecteur peut se référer par exemple à Richard [185] pour plus de détails dans le cas de modèles non dispersifs. On peut aussi l'obtenir en manipulant l'équation de conservation de quantité de mouvement et de masse du système. Pour le système de Saint-Venant, on trouve sur fond plat, avec $E = h\frac{\overline{u}^2}{2} + g\frac{h^2}{2}$ et $P = g\frac{h^2}{2}$:

$$\big(E\big)_t + \big(\overline{u}(E+P)\big)_x = 0$$

Ce bilan ne fournit cependant pas de relation de saut. Soit deux états (h_L, u_L) et (h_R, u_R), pour un saut à vitesse κ, la relation de Rankine-Hugoniot sur ce bilan donne :

$$\begin{aligned} &[\![\overline{u}(h\frac{\overline{u}^2}{2} + gh^2)]\!] = \kappa[\![h\frac{\overline{u}^2}{2} + g\frac{h^2}{2}]\!] \\ \Longleftrightarrow &[\![gh^2(\overline{u} - \frac{\kappa}{2}) + h\frac{\overline{u}^2}{2}(\overline{u} - \kappa)]\!] = \xi \quad \text{avec } \xi = 0 \end{aligned}$$

En se servant des relations fournies par les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement on montre que $\xi = -h(\overline{u} - \sigma)g\frac{h_L^2}{4h_R}(\frac{h_R}{h_L} - 1)^3$. En dehors du cas $h_L = h_R$ et $\kappa = \overline{u}$, la relation de saut sur l'énergie n'est pas vérifiée. Comme une création d'énergie est exclue par le premier principe, il y a dissipation d'énergie à travers les chocs : $\xi \leq 0$. Pour le modèle de Saint Venant l'énergie correspond à une entropie de Lax. L'équation sur l'énergie est en fait :

$$\big(E\big)_t + \big(\overline{u}(E+P)\big)_x \leq 0 \tag{2.2.38}$$

Cette description incomplète peut-être améliorée en prenant en compte les fluctuations de vitesses dans la dérivation (modèle de Richard et al. [186]). Dans le cas de Saint-Venant, la dissipation d'énergie est brutale et localisée. Une description plus complète permet par exemple de "contrôler" le taux de génération des fluctuations ainsi que leurs dissipations (souvent plus lentes).

2.3 Bilan

On a vu dans ce chapitre comment dériver les modèles de base d'ondes longues (ou d'eau peu profonde). Lors de l'utilisation de ces modèles, il est important de garder en tête les ordres de grandeur des paramètres sur lesquels on s'est appuyé pour leurs dérivations. Si les ordres supposés ne sont pas ou plus vérifiés à un moment donné, les résultats doivent être rejetés.

Chapitre 3

Un modèle de Serre-Green-Naghdi dissipatif

Sommaire

3.1 Introduction 44
3.2 Dissipation d'énergie et turbulence 45
3.3 Un modèle SGN approché dissipatif 47
3.4 Revue des critères de déferlement 49
3.5 Modélisation du transfert SGN-SV 50
3.6 Particularité de résolution 53
3.7 Bilan 53

Ce chapitre se focalise sur un modèle approché de Serre-Green-Naghdi et sur la prise en compte de la dissipation d'énergie mécanique engendrée par un déferlement de vague.

3.1 Introduction

Le modèle de Serre-Green-Naghdi est un des modèles de couche mince les plus élaborés. On a vu dans le chapitre 2 que seuls les termes en $O(\sigma^4)$ sont négligés. Pour des ondes relativement longues, ou faiblement dispersives, cette restriction est tout à fait acceptable et permet d'obtenir des prévisions de qualité. Il permet d'outrepasser les restrictions en terme de propagation du modèle de Saint-Venant, qui en temps fini converge vers un choc et dissipe de l'énergie. Ce modèle ne prend cependant pas en compte les phénomènes dissipant de l'énergie.

Le point principal développé dans cette partie est la construction d'un modèle de SGN dissipatif afin d'augmenter le domaine de validité du modèle standard. Les applications visées sont la simulation des ondes longues, de la phase de propagation à la phase de run-up, en passant par la zone de surf.

Dans le cas des ondes longues, la dissipation prépondérante vient de la turbulence générée lors du déferlement. Évidemment, les modèles intégrés sur la verticale ne permettent pas une description précise du retournement d'une vague car la surface libre est une fonction mono-évaluée par construction. Cependant, dès lors que seule la dynamique à grande échelle est d'intérêt, la modélisation détaillée du phénomène peut être exclue en première approximation.

Dans la littérature deux voies sont principalement suivies. La première est basée sur l'ajout d'un terme source de type viscosité turbulente (*cf.* par exemple Zelt [235] ou Kennedy et al. [109]). Ce terme diffusif, agissant sur la quantité de mouvement, nécessite une loi de fermeture du modèle de turbulence. Les lois les plus simples sont basées sur une longueur de mélange turbulent, dit modèle scalaire (*cf.* par exemple Pope [179] pour plus de détails sur ce sujet). La seconde voie est basée sur une transition du modèle initial vers le modèle de Saint-Venant qui représente de manière remarquable l'évolution d'un rouleau (*cf.* par exemple Tissier et al. [218], Kazolea et al. [106, 107] ou Roeber et al. [189]). Ici les termes dispersifs sont supprimés pour retrouver le modèle de SV qui, une fois convergé en onde de choc, dissipe de l'énergie ; on parle alors de modèle "hybride". Pour ces deux méthodes, un critère de déferlement ou de production de turbulence doit être introduit. Ce point d'initiation reste à l'heure actuelle mal compris, aussi bien dans la pratique que dans la théorie (*cf.* par exemple la revue de Perlin et al. [171]).

Les résultats de ces deux approches sont généralement de bonne qualité mais nécessitent souvent un calibrage du critère déclencheur de dissipation suivant les cas d'applications. La simplicité des méthodes visant à basculer sur le modèle de SV est attractive mais induit souvent des instabilités proches de l'interface de transition, les quantités physiques n'étant pas nécessairement compatibles dans cette zone. Un état des lieux clair sur ce sujet est donné par Kazolea et Ricchuito [108]. Pour les approches basées sur un modèle de viscosité turbulente, une difficulté supplémentaire est liée au choix de la fermeture ainsi que, dans une moindre mesure, à la discrétisation des termes sources (d'ordre 2).

Le travail proposé dans ce chapitre est en continuité avec les travaux basés sur un modèle dit "hybride" SGN-SV. Une des originalités est de proposer des transitions particulières entre le modèle de SGN et de SV. On note dans la suite ce modèle dissipatif SGNd. La bascule entre les modèles ne sera pas nécessairement instantanée, comme cela est fait dans la littérature, mais potentiellement plus contrôlée. il est difficile d'avoir une idée précise de quand et comment effectuer cette transition. D'un point de vue numérique, plus la transition entre les deux approches sera douce moins le problème d'incompatibilité évoqué précédemment devrait être présent. Pour fermer la modélisation il faut se donner un taux de transition. Comme il est clair que dans les cas qui nous intéressent, la turbulence est principalement générée par des déferlements, une revue des critères de cette perte d'équilibre d'une vague est donnée. On propose aussi un autre critère simple. Ensuite, la mise en équations sera présentée. A la différence des travaux précédemment évoqués, la construction du modèle global sera basée sur le "modèle" approché de SGN proposé récemment par Favrie et Gavrilyuk [68]. Le système associé contient plus d'équations que le "modèle classique", 4 au lieu de 2 en 1D, mais est hyperbolique. Ce point est un avantage très important qui permet, entre autres, d'envisager des simulations grandes échelles multi-D en des temps raisonnables. La résolution numérique du modèle SGNd

est, pour finir, succinctement présentée. Elle est basée sur les méthodes volumes finis avec un schéma up-wind HLL. La plus value ici est "l'extension" du schéma équilibre d'Audusse [12] au système approché de Favrie et Gavrilyuk avec terme bathymétrique.

Avant de construire le modèle SGNd, la section qui suit présente dans un premier temps quelques notions phénoménologiques de la turbulence et de sa modélisation. Dans un second temps, des détails sont donnés dans le cadre des modèles en couche mince.

3.2 Dissipation d'énergie et turbulence

La turbulence est un phénomène qui reste aujourd'hui mal compris. A partir d'un certain niveau d'énergie cinétique d'un écoulement, des structures fluctuantes, et semble-t-il désordonnées, sont générées. Il y a un transfert de l'énergie cinétique moyenne vers l'énergie cinétique turbulente à grande échelle. Cette nouvelle forme d'énergie se transfère ensuite vers des échelles plus petites jusqu'à atteindre l'échelle de Kolmogorov et se transforme alors en énergie interne. Ce cycle est la cascade de Richardson [1]. Dans le cas du déferlement d'une vague, la turbulence générée est très intense et peut réduire drastiquement l'énergie mécanique initiale de la vague en un temps de l'ordre de sa période. Les rouleaux formés sont initialement de l'ordre de l'amplitude de la vague et se transforment en plus petits tourbillons. En amont de l'onde, la génération des grandes structures demeure tant que la vague ne retrouve pas une certaine forme de stabilité. Les petits tourbillons, conséquences des grandes structures, restent visibles en aval de la vague sous forme de remous modérés et sont globalement entraînés par le mouvement principal. Ces tourbillons tendent à mélanger les différentes couches de fluide et, par conséquent, à uniformiser la pression dynamique. Ce point explique qu'en zone de surf, la pression est proche de sa composante hydrostatique comme le confirme les mesures de Stive [208]. Évidemment, cela est valable dans une certaine gamme de temps mais peut encourager à utiliser un modèle hydrostatique dans cette zone. La production d'énergie turbulente dans le domaine des ondes longues est aussi possible en dehors des zones de surf comme, par exemple, quand une vague interagit de manière conséquente avec la bathymétrie ou une structure.

En revenant dans un cadre général, tout comme sa compréhension, la modélisation de la turbulence est un problème très complexe. La solution la plus simple, mais aussi la plus inaccessible, est de résoudre les équations de Navier Stokes jusqu'aux échelles les plus fines, on parle de simulation numérique directe (DNS). On simule ainsi toute la vie de la turbulence. Hélas, hors cas académique très réduit en temps et en espace et à Reynolds relativement faible (au plus quelques milliers), ceci est impraticable du point de vue temps de résolution. La voie la plus employée à l'heure actuelle pour simuler des écoulements turbulents est l'approche RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes equations). L'idée est de supposer que les champs de variables peuvent se mettre sous la forme $f = \overline{f} + f'$, avec $\overline{f}$ un champ moyen et f' un champ fluctuant. En injectant cela dans les équations de Navier Stokes on obtient des nouveaux termes. Une des approches les plus utilisées pour fermer le problème est l'hypothèse de Boussinesq. On se retrouve finalement à devoir modéliser un terme analogue à une viscosité, nommée viscosité turbulente. Il existe une multitude de fermetures possibles, des simples modèles scalaires, aux modèles à plusieurs équations. On peut par exemple citer les deux fermetures les plus utilisées dans l'industrie qui sont nommées $k - \epsilon$ et $k - \omega$ en référence aux variables turbulentes modélisées. Entre la DNS et l'approche RANS, où toutes les structures turbulentes sont modélisées, il y a la méthode LES (pour Large Eddy Simulation). Ici, les plus grosses structures sont simulées de manière directe alors que les plus petites sont modélisées de la même manière que la méthode RANS. On parle parfois de méthode de filtrage.

1. Le poème de Richardson illustre la décroissance :

Big Whirls have little whirls
That feed on their velocity,
And little whirls have lesser whirls
And so on to viscosity.

Cas des modèles intégrés sur la verticale
Revenons au cas des vagues déferlantes modélisées par des modèles type eau peu profonde. Comme ces modèles sont mono-évalués sur la verticale, il est clair qu'il n'est pas possible de simuler de manière directe un déferlement et par conséquent la dissipation fine associée. Une modélisation de type RANS (adaptée aux modèles eau peu profonde) est possible comme par exemple les travaux de Zelt [235] ou Kennedy et al. [109]. La difficulté est alors de déterminer la viscosité turbulente adéquate. Un plus ou moins grand nombre de constantes "empiriques" sont introduites pour arriver à coller à la réalité.

L'autre voie très utilisée est l'utilisation du modèle de Saint-Venant pour décrire la dissipation associée au déferlement. Ce modèle ne conserve pas l'énergie mécanique totale lorsqu'il converge vers un choc. Géométriquement, la description d'une déferlante par un choc est tout d'abord acceptable (voir figure 3.1). De plus, de manière remarquable pour ne pas dire magique, la dissipation que ce modèle prédit est assez bien représentative d'un déferlement. Rappelons cependant que normalement, la dissipation d'énergie mécanique (transformée en énergie interne) est la dernière phase de la turbulence alors qu'avec une telle approche, on dissipe l'énergie dans une zone donnée : au niveau du choc. Ce modèle est en fait incomplet dans le sens où l'énergie totale est perdue par le système. Pour mieux prédire la production de turbulence en zones de génération de rouleaux ainsi que son atténuation progressive, un modèle hydrostatique plus complet peut être adopté (*cf.* Richard et Gavrilyuk [186]). Ce type de modèle plus élaboré a été introduit par Teshukov [215] et complété par Richard et Gavriluyk [186]. Dans cette approche la turbulence est véritablement inclue dans le modèle via une variable supplémentaire (nommée enstrophie) permettant de conserver l'énergie. La production d'énergie turbulente a lieu lorsqu'un choc se forme et sa dissipation n'est pas seulement localisée au niveau de la discontinuité, ce qui est plus conforme à la réalité. Des résultats très intéressants sur les ressauts hydrauliques ont pu être obtenus avec cette approche, améliorant ainsi la description partielle du modèle de Saint-Venant. Aussi, avec un couplage bi-couches entre ce modèle en couche supérieure et le modèle de SGN en couche inférieure, a permis à Gavriluyk et al. [73] de reproduire assez finement un déferlement. Un des avantages de cette modélisation de la dissipation turbulente est qu'assez peu de termes empiriques sont introduits.

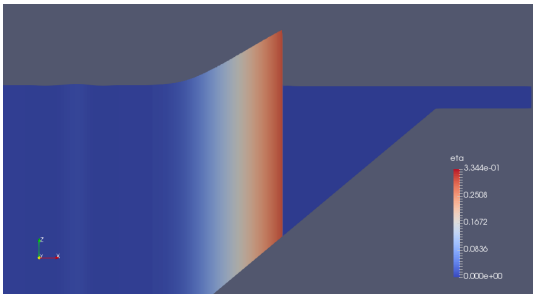


FIGURE 3.1 – Représentation d'une déferlante avec le modèle de SV.

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à l'approche, sans doute la plus simple, basée sur une transition du modèle de SGN vers celui de SV. L'idée est d'exploiter la capacité du modèle de SV à dissiper l'énergie pour modéliser le déferlement. Cette voie a été suivie par exemple par Tissier et al. [218], Roeber et al. [189] et Kazolea et al. [106]. L'avantage de cette approche est que la question de la dissipation est réglée sans introduction de coefficients empiriques car pour le modèle de SV, toute solution discontinue induit la perte d'"énergie" suivante :

$$\xi = -h(\overline{u} - \kappa) g \frac{h_L^2}{4h_R} (\frac{h_R}{h_L} - 1)^3 \tag{3.2.1}$$

avec κ la vitesse du choc, (h_L, h_R) les hauteurs d'eau en amont et en aval du choc et $\overline{u}$ la vitesse horizontale moyenne associée au système de SV. Le lecteur peut se référer au chapitre 2 où cette perte sèche est

détaillée. Sans se risquer trop profondément à des analyses physiques périlleuses, compte tenu du fait que cette approche est assez empirique, on peut tout de même noter que modéliser une déferlante avec un modèle hydrostatique a un minimum de sens. En effet, comme évoqué précédemment, les mesures de Stive [208] montrent qu'en zone de déferlement la pression sur la verticale est proche de l'hydrostatique. On peut essayer de comprendre cela en se disant, qu'en moyenne, les tourbillons engendrent tantôt une poussée verticale vers le haut et tantôt une poussée verticale vers le bas, ce qui, sur une certaine échelle bien choisie, mène à une pression quasi hydrostatique. Cela étant dit, il demeure mystérieux que la dissipation d'énergie associée à un choc pour SV soit représentative d'un déferlement, tant ce phénomène est complexe.

Mais revenons à la pratique. La difficulté est qu'il faut changer de modèle au bon moment et de manière robuste. Rappelons que les autres approches sont aussi sujettes à cela, mais de manière moins directe car dans le cas présent, l'énergie principale ne sera dissipée que lorsque le modèle de SV aura convergé vers un choc. Pour être plus rigoureux précisons que le simple fait de passer du modèle de SGN à SV induit une dissipation d'énergie même pour des solutions fortes car l'énergie associée au système de SV est différente de celle du système de SGN. Cependant ce changement est négligeable devant ce qui va se produire lorsque les solutions de SV auront convergé vers un choc. Pour changer de modèle il faut se donner un critère de déferlement. La littérature n'est pas très détaillée sur le point de la robustesse, mais les travaux récents de Kazolea et Ricchuito [108] pointent que ce n'est pas chose aisée. En effet l'approche qu'ils emploient engendre des oscillations pour des maillages fins. Comme la méthode qu'ils utilisent est assez standard, il semble que cette difficulté soit un problème assez ouvert. Ils montrent aussi que les approches à viscosité turbulente sont moins sujettes à cette difficulté. Cette difficulté fait sens car si le transfert est effectué dans une zone dispersive, les deux modèles ne sont pas parfaitement compatibles, notamment en terme de pression. Dans Kazolea et al. [106] et Tissier et al. [218], les auteurs utilisent une zone de changement de taille conséquente, fonction de la "longueur de rouleau", centrée sur le point de déferlement. Il semble qu'une longueur suffisamment grande permet d'avoir une interface loin des effets dispersifs et par conséquent permet d'éviter des incompatibilités locales. Avec une même approche de transfert que Kazolea et al. [106], Filippini [69] évoque la sensibilité du choix de cette longueur, ce qui va donc dans le sens du raisonnement précédent. Dans Smit et al. [204], la solution employée est d'ajouter un terme de diffusion de type viscosité moléculaire à l'équation de quantité de mouvement. Cette ajout de dissipation est cependant difficile à calibrer pour ne pas être quantitatif sur le domaine d'étude mais suffisamment actif pour rendre les fluctuations inconsistantes.

Pour essayer de réduire cette difficulté, nous allons proposer différentes méthodes de bascules entre les deux modèles.

3.3 Un modèle SGN approché dissipatif

Le point de départ est le système de SGN approché, dérivé grâce au principe variationnel par Favrie et Gavrilyuk [68]. L'idée de fond est de considérer un lagrangien augmenté qui, sous contrainte, tend vers le lagrangien du modèle (exact) de SGN. On part de ce système et on ajoute un terme source prenant en compte les variations bathymétriques sur l'équation (3.3.2). Ce terme simple est valable sous condition de variations faibles du fond (voir chapitre 2 pour sa justification pour le système de SGN exact). En toute rigueur la dérivation du système approché sur bathymétrie variable doit être reprise d'emblée, à partir de l'action intégrée sur la verticale, mais par simplicité le terme source est directement ajouté comme par exemple dans Serre [199] ou encore Gavrilyuk et al. [73]. En 1D on a :

$$h_t + (hu)_x = 0 \tag{3.3.1}$$

$$(hu)_t + \big(hu^2 + \frac{g}{2}h^2 - \frac{\lambda}{3}(\frac{\eta}{h} - 1)\big)_x = -ghb_x \tag{3.3.2}$$

$$(hw)_t + (hwu)_x = -\lambda(\frac{\eta}{h} - 1) \tag{3.3.3}$$

$$(h\eta)_t + (h\eta u)_x = hw \tag{3.3.4}$$

Les variables h, u, w, η, b correspondent respectivement à la hauteur d'eau, la vitesse horizontale moyenne, la vitesse verticale auxiliaire, la hauteur d'eau auxiliaire et à la bathymétrie. g correspond à la constante gravitationnelle et λ à la constante de relaxation du système approché vers le système exact. Ce système a pour vitesse acoustique $c = \sqrt{gh + \frac{\lambda}{3}(\frac{\eta}{h})^2}$ et découle du lagrangien $L = \frac{(x_t)^2}{2} + \frac{(\eta_t)^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \lambda\frac{(\tau\eta - 1)^2}{6}$ (en variables lagrangiennes avec $\tau = 1/h$, *cf.* Favrie et Gavrilyuk [68] pour plus de détails). Pour le système de SV on a $L_{SV} = \frac{(x_t)^2}{2} - \frac{g}{2\tau}$. Pour avoir une transition "naturelle" du système vers SV, deux contraintes sont à respecter :

- $\otimes$ $\eta\tau = \frac{\eta}{h} \longrightarrow 1$
- $\otimes$ $w \longrightarrow 0$.

On propose de formuler la transition en introduisant une fonction $\beta \in [0, 1]$ telle que :

$$\beta = \begin{cases} 1 & \Longrightarrow \text{modèle de SV} \\ 0 & \Longrightarrow \text{modèle de SGN (initial)} \end{cases}$$

Il est beaucoup plus simple de se restreindre au cas où on résout soit le modèle de SGN, soit le modèle de SV. Dans ce cas là, il suffit d'imposer ces contraintes dans les zones SV. Cette approche sera également utilisée dans la suite mais on dérive un terme général de sorte que d'autres choix de transition soient possibles.

Pour satisfaire les contraintes énoncées précédemment , l'ajout de termes dissipatifs est nécessaire. Il faut raisonner sur les équations associées aux variables à contraindre : (3.3.3) et (3.3.4). Pour simplifier les calculs on se place sous la forme lagrangienne. Les deux dernières équations du système non dissipatif viennent de (*cf.* Favrie et Gavrilyuk [68]) :

$$\eta_{tt} = -\lambda(\eta\tau - 1)\tau \tag{3.3.5}$$

Pour caractériser la dissipation, on ajoute un terme source général qu'il va falloir expliciter pour obtenir le comportement voulu. Soit :

$$\eta_{tt} + \lambda(\eta\tau - 1)\tau = a\eta_{tt} + b\eta_t + c\eta + d \tag{3.3.6}$$

On a une EDO du second ordre. On impose à sa solution d'être oscillante pour avoir $\eta\tau \approx 1$, et décroissante pour retrouver $\eta\tau \longrightarrow 1$. Ceci se traduit en premier lieu par des racines associées au polynôme caractéristique qui doivent être complexes à partie réelle négative. La partie complexe s'obtient en imposant :

$$\triangle = b^2 - 4(1 - a)(\lambda\tau^2 - c) \leq 0$$

Un choix simple est alors $b^2 = 4(1 - a)c$ avec $a \in [0, 1]$, soit $\triangle = -4(1 - a)\lambda\tau^2$. D'autre part, on veut que la solution particulière de l'EDO soit $\eta_0 = \frac{1}{\tau_0}$, ce qui implique en injectant η_0 et τ_0 dans (3.3.6) : $d\tau_0 = c$. Finalement les racines sont $r_{1,2} = \frac{b \pm i\sqrt{-\triangle}}{2(1 - a)}$ et donc en posant $\gamma = \frac{\sqrt{-\triangle}}{2(1 - a)}$ et en choisissant $\frac{b}{2(1 - a)} = \frac{-\beta}{1 - \beta}$ (*i.e.* $a = \beta$ et $b = -2\beta \leq 0$), la contrainte de décroissance est satisfaite et on obtient :

$$\boxed{\eta(t) = exp(\frac{-\beta}{1 - \beta}t)(C1cos(\gamma t) + C2sin(\gamma t)) + 1/\tau} \tag{3.3.7}$$

De plus comme on veut $w \longrightarrow 0$ quand $\beta \longrightarrow 1$ on pose $\boxed{\eta_t(1 - \beta) = w}$ d'où :

$$\boxed{w(t) = -\beta(\eta(t) - 1/\tau) + (1 - \beta)exp(\frac{-\beta}{1 - \beta}t)\big(-C1\gamma sin(\gamma t) + C2\gamma cos(\gamma t)\big)} \tag{3.3.8}$$

Avec, grâce aux conditions initiales : $C1 = \eta_0 - \frac{1}{\tau}$ et $C2 = \big(\frac{w_0}{1 - \beta} - \gamma C1\big)/\beta$. Toutes les variables du terme dissipatif ont été précisées en fonction de β ou des conditions initiales, le système est donc fermé sous

connaissance de ces termes. On a finalement le comportement souhaité : pour $\beta = 0$ les solutions sont celles de SGN approché [68] et pour $\beta \longrightarrow 1$ celles de SV : $\eta\tau \longrightarrow 1$ et $\eta_t \longrightarrow 0$. L'équation (3.3.6) contenant la dissipation peut donc s'écrire :

$$w_t = -\lambda(\eta\tau - 1)\tau - \eta\frac{-2\beta}{1-\beta} - \frac{\beta^2}{1-\beta}(\eta - 1/\tau) \tag{3.3.9}$$

$$\eta_t = \frac{1}{1-\beta}w \tag{3.3.10}$$

Le système dissipatif sous forme eulérienne est finalement :

$$h_t + (hu)_x = 0 \tag{3.3.11}$$

$$(hu)_t + \big(hu^2 + \frac{g}{2}h^2 - \frac{\lambda}{3}(\frac{\eta}{h} - 1)\big)_x = -ghb_x \tag{3.3.12}$$

$$(hw)_t + (hwu)_x = -\lambda(\frac{\eta}{h} - 1) - \eta h\frac{-2\beta}{1-\beta} - h\frac{\beta^2}{1-\beta}(\eta - h) \tag{3.3.13}$$

$$(h\eta)_t + (h\eta u)_x = \frac{1}{1-\beta}hw \tag{3.3.14}$$

Il faut maintenant qualifier β de sorte que le modèle de SV soit retrouvé en zone de déferlement. Le modèle obtenu est hélas irrotationnel ce qui ne permet pas d'accéder à une grandeur représentative de la turbulence telle que la vorticité. La solution pour fermer le système est donc de trouver β comme une fonction du déferlement. Lorsque le déferlement va avoir lieu, β doit tendre vers 1 et à l'inverse en zone stable, β doit être nul. Dans la section suivante une revue non exhaustive des critères de déferlement souvent employés est présentée, un nouveau critère est proposé et la fonction β est définie. Ensuite, la méthode pour décrire la fonction de transition et résoudre le modèle sera exposée. Rappelons que si on souhaite transiter de manière directe d'un modèle à un autre, tout ceci n'est pas nécessaire. Il suffit en effet d'imposer dans les "zones SV" $\eta = h$ et $w = 0$. L'introduction de ces termes plus "complexes" permet d'étudier des méthodes de transitions potentiellement continues.

3.4 Revue des critères de déferlement

Les prédictions du point de déferlement les plus simples sont basées sur un critère géométrique. L'angle de crête, le rapport hauteur d'eau / hauteur de crête (attribué à Stokes) ou encore le rapport hauteur de crête / longueur d'onde sont des approches très utilisées. Cependant, l'expérience montre une grande variabilité des critères géométriques pour prédire le point de déferlement, avec par exemple, pour le critère de raideur limite $a/h_0 \in [0.15, 0.44]$ impliquant un manque de robustesse de cette approche (*cf.* par exemple Perlin et al. [171] ou Barthelemy et al. [19]).

La seconde approche est basée sur des critères cinématiques. Un des plus étudiés énonce que lorsque la vitesse particulaire horizontale de crête dépasse la célérité de l'onde, celle-ci déferle. Ce critère, attribué à Miche, est simple mais fait sens. En effet si une particule en surface va plus vite que l'onde il semble peu probable, sauf décélération impromptue, que celle ci ne sorte pas du rang de la vague. Dans le cas d'une onde solitaire, la prévision obtenue grâce à ce critère est proche de la pratique (*cf.* Bjorkavag et Kalisch [27]). De nombreuses études expérimentales ont tenté de vérifier cette proposition dans des configurations générales mais les différents résultats manquent de convergence pour conclure précisément. Par exemple les travaux de Stansell et MacFarlane [207] ont montré que les déferlements glissants sont déclenchés quand $u_c/c \leq 0.95$ tandis que les déferlements plongeants quand $u_c/c \leq 0.81$. A l'opposé, les travaux de Wu et Nepf [232] montrent que les déferlements plongeants ont lieu lorsque $u/c \geq 1.5$, tandis que les déferlements glissants quand $u_c/c \geq 1$. Il faut noter qu'une des grandes difficultés expérimentales liée à ce critère est l'évaluation de la vitesse d'onde car celle-ci se déforme rapidement en zone de déferlement. La mesure des vitesses particulaires est, quant à elle, plus fiable grâce aux mesures PIV. Numériquement, pour des cas tests d'ondes longues, Bacigaluppi et al. [14] obtiennent de bons résultats avec $u_c/c \geq 0.75$. Un autre critère cinématique

intéressant est celui proposé par Kennedy et al. [109] : $\eta_t > \beta\sqrt{gh}$, avec cependant une variabilité de β assez importante selon le cas ($\beta \in [0.3, 0.65]$).

La troisième et plus récente approche développée est basée sur des critères dynamiques. Bien que ces critères semblent prometteurs, ils sont souvent complexes et par conséquent difficiles à analyser aussi bien qu'à calculer. Pour une analyse plus détaillée des différents types de critères de déferlement le lecteur est renvoyé à la revue plus complète de Perlin et al. [171].

L'approche qui semble à l'heure actuelle la plus universelle est basée sur le critère $u_c/c \geq 1$. Cependant comme ce critère ne semble pas parfaitement approuvé il reste critiquable et, à ce compte là, peut être simplifié pour être plus facile à implémenter dans un code numérique. On propose le critère analogue suivant : $\overline{u}/c \geq 0.45$. L'avantage de ce critère est qu'il est plus simple que celui basé sur la vitesse de crête qui n'est pas facile à évaluer en multi-D dans un code volume finis non structuré étant donné son expression pour le modèle de SGN. Le lecteur est renvoyé au chapitre 2 pour le détail de son expression. Il est intéressant de noter que, pour une onde solitaire, il est connu qu'elle perd sa stabilité pour $a/h_0 \approx 0.8$. On peut montrer que ce critère donne le bon ordre de seuil de déferlement sur un tel cas. Ce critère sera utilisé dans le chapitre 8.

3.5 Modélisation du transfert SGN-SV

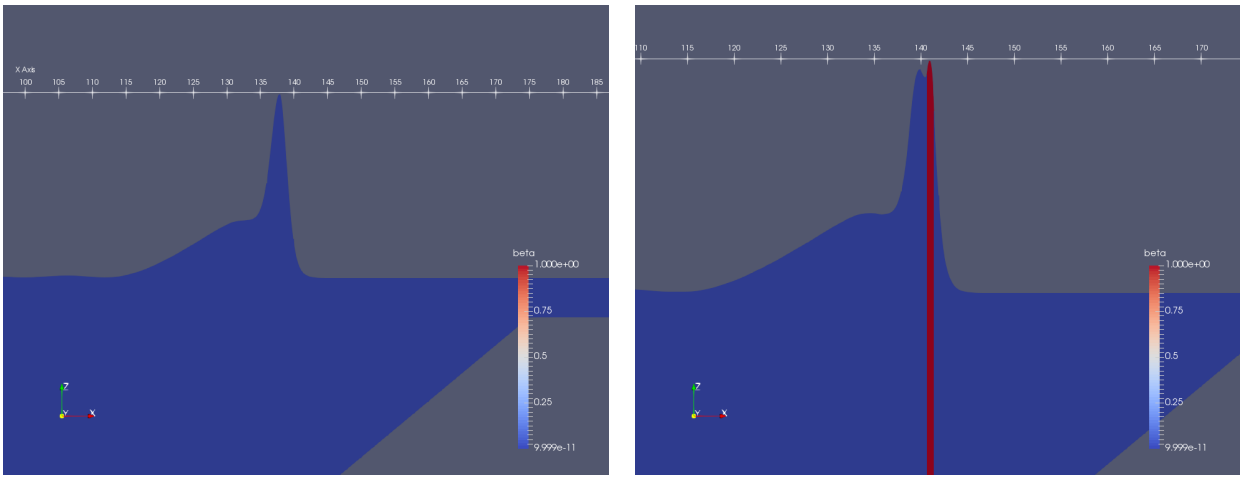
L'idée la plus simple pour passer du modèle de SGN à celui de SV est, une fois le critère de déferlement évalué sur le domaine, de prendre pour chaque cellule $\beta = 1$ si le critère est satisfait et $\beta = 0$ sinon. Cette approche est la plus utilisée. Généralement en plus de cela, quand la zone supposée déferlante est déterminée, elle est agrandie de manière à réduire les effets parasites au raccord entre les modèles. D'après les mesures de Haller et Catalan [92], la largeur du rouleau est de l'ordre de $l_r \approx 3a$ (avec a l'amplitude de la déferlante). Tissier et al. [218] considèrent une zone finale où le modèle de SV s'applique de $l_{SV} \approx 2.5l_r$. Ces ordres de grandeur sont suivis par Kazolea et al. [106]. Hors quelques subtilités, l'approche hybride SGN-SV est traitée dans la littérature de cette manière. Hélas, comme noté par Kazolea et Ricchiuto [108], aucune étude de convergence en maillage n'a été effectuée, ou presque, avec ce transfert localisé et instantané. Les auteurs montrent (avec leur méthode de résolution qui est assez standard) qu'en raffinant le maillage des instabilités apparaissent au niveau de l'interface de transfert jusqu'à n'être plus négligeable du tout.

Pour tenter de résoudre ce problème, on peut penser à plusieurs méthodes. On commence par récapituler la méthode classiquement employée dans la littérature que l'on a évoquée jusqu'à maintenant.

Méthode 1 **:** La transition entre le modèle de SGN et SV est raide et locale. En pratique on se donne un critère, on marque les cellules vérifiant ce critère, on agrandit le stencil, puis on applique le modèle de SGN en dehors de cette zone et le modèle de SV dedans. Cette méthode, utilisée dans la littérature, est testée dans le chapitre 8. On choisit de prendre une valeur de stencil du même ordre que, par exemple, Tissier et al. [218] ou Kazolea et al. [106]. En l'occurrence on prend $L_{breaking} \approx 10h$. On verra au chapitre 8 que ce changement raide induit des oscillations en accord avec les conclusions que Kazolea et Ricchiuto [108]. Cependant, il semble que la méthode que l'on utilise, basée uniquement sur les volumes finis, permette un certain contrôle de ces "instabilités" car même avec des maillages très fins nous n'avons pas obtenu des résultats incohérents. Une comparaison plus fine avec ces travaux serait intéressante pour éclaircir ce point. On illustre en figure 3.2 le comportement observé avec une telle transition, avec pour favoriser l'apparition d'une instabilité, un stencil très petit.

Pour réduire ou supprimer ce problème on peut proposer deux autres approches :

Méthode 2 **:** La première idée qui vient est de considérer toujours un changement raide de modèle, mais dans les zones compatibles. De la même manière que pour la méthode 1, on cherche les cellules où le critère de déferlement est satisfait, mais cette fois on agrandit le stencil autant que nécessaire pour avoir, par exemple, $p_{SGN} = p_{SV}$. Une solution simple est de prendre comme bornes des zones au repos. L'inconvénient est qu'*a priori* en aval de la zone de déferlement les éventuels effets non hydrostatiques sont perdus. Cette approche est illustrée en figure 3.3(a).



(a) Modèle de SGN seul avant transition.

(b) Modèle de SGN-SV (la partie rouge correpond au modèle de SV détecté comme zone de déferlement). Le stencil d'application du modèle de SV est choisi très petit pour favoriser ce problème.

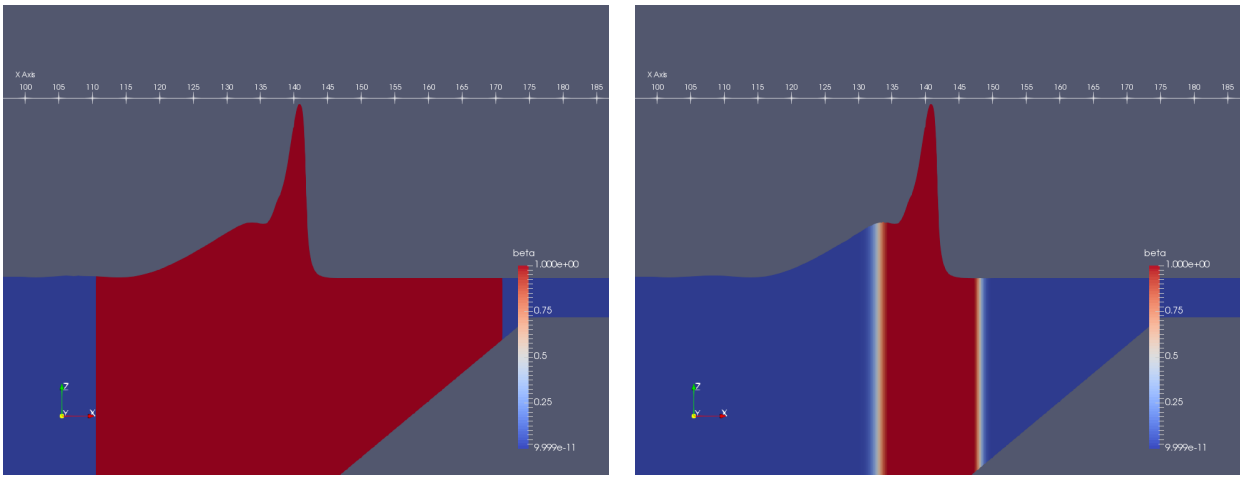
FIGURE 3.2 – Oscillations rencontrées avec un transfert instantanné de SGN vers SV. La limite de transition induit une oscillation (figure 3.2(b)).

Pour cette méthode comme pour la précédente, les termes sources dérivés dans la section 3.3 pour faire transiter le modèle de SGN vers celui de SV sont inutilement complexes. Il suffit pour cette méthode, d'imposer dans ces zones $\eta = h$ et $w = 0$ sur le système de base de Favrie et Gavrilyuk [68].

Méthode 3 : L'idée ici est de faire transiter un modèle vers l'autre de manière non instantanée et non locale. Pour cela il faut que la variable de transition β suive l'onde afin qu'elle puisse croître ou décroître au cours de l'évolution de la vague. En soit, suivre l'onde n'a rien d'évident pour le modèle de SGN. A défaut de mieux on prend simplement :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + u\frac{\partial \beta}{\partial x} = Prod - Dest \tag{3.5.1}$$

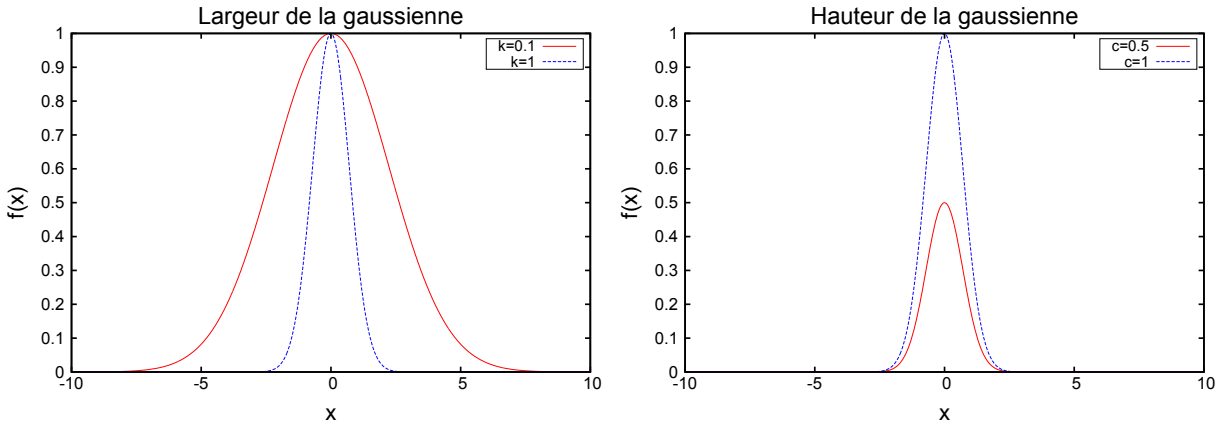
u correspond à la variable vitesse du modèle. Ensuite, il faut modéliser le terme de croissance ($Prod$) et le terme de destruction ($Dest$). On peut d'ailleurs penser à aussi rajouter un terme de diffusion, bien que le fait de résoudre une équation d'advection induit naturellement un peu de diffusion. Ces valeurs peuvent être choisies grâce à des expériences numériques. Quitte à complexifier pour obtenir une méthode la plus stable possible, on peut aussi imposer un profil de variation spécial. L'idée est donc d'avoir un profil de croissance ou de décroissance bien définie. On choisit par exemple une gaussienne comme illustrée en figure 3.4.



(a) Transition localisée (large) en zone compatible pour SGN et SV : Méthode 1.

(b) Transition localisée avec transition continue : Méthode 3.

FIGURE 3.3 – Différentes transitions spatiale du modèle SGNd.



(a) Croissance en largeur.

(b) Croissance en amplitude.

FIGURE 3.4 – Comportemment de la gaussienne définit par $f(x) = c * exp(-kx^2)$.

Pour éviter d'avoir une dépendance au pas de temps on prend arbitrairement $Prod = 0.001 \cdot f(x_c)/dt$ avec x_c le centre de la zone de déferlement, ou si on souhaite une gaussienne avec plateau ($i.e$ pas un unique maximum), les deux limites de la zone. Il suffit de choisir k pour avoir la transition spatiale souhaitée. On le choisit arbitrairement tel que la variation totale de l'amplitude de la gaussienne, des deux côtés de la zone de déferlement, soit effectuée sur une distance de $L_{breaking}/2$. Dans les zones "hors déferlement" on prend $Dest = -0.001/dt$. On a finalement une méthode qui induit une transition spatiale et temporelle continue entre les deux modèles purs. Cependant, comme nous l'avons évoqué précédemment il est difficile de suivre parfaitement l'onde car on ne connaît pas exactement sa vitesse.

Toutes ces méthodes sont testées dans le chapitre 8. On verra qu'il existe un autre type d'instabilité que celui énoncé dans la littérature. Lorsque pour une onde donnée par le modèle de SGN, on bascule sur le

modèle de SV, des ondulations sont générées et partent vers l'aval de la vague. En fait rien n'empêche cela car le modèle de SV n'a pas à "accepter" une solution du modèle de SGN et la faire continuer sur sa lancée. On touche du doigt la notion de condition "initiale" mal préparée. D'une manière générale on verra que les essais effectués montrent que, même avec des maillages très fins, les oscillations parasites restent mesurées et *a priori* acceptables avec la résolution employée , peu importe la méthode de transition. Cela est sans doute dû au fait que, comme ce système est hyperbolique, on peut s'appuyer sur une méthode numérique unique pour résoudre le modèle "hybride" contrairement à ce qui se fait généralement dans la littérature. On verra également que la transition lente donne des résultats moins sujets aux instabilités parasites que la méthode 1, mais n'est pas totalement épargnée. Compte tenu de sa "complexité" pour le faible gain que nous observerons, cette approche sera rejetée. Le lecteur est renvoyé au chapitre 8 pour plus de détails.

3.6 Particularité de résolution

Ce modèle n'est pas particulièrement compliqué à résoudre. On peut utiliser une méthode de "splitting" pour traiter dans un premier temps la partie homogène puis les termes sources. Dans cette thèse, nous avons sélectionné le solveur HLL pour résoudre la partie homogène avec le schéma explicite en temps d'ordre 2 de Runge Kutta, et une montée en ordre spatial de type MUSCL avec le limiteur minmod. Comme les termes sources sont assez raides, il serait intéressant d'utiliser un méthode adéquate (type Strang) mais par simplicité nous sommes restés sur une intégration simple en réduisant la CFL par deux pour les cas tests effectués. Notons qu'on dispose des solutions exactes pour l'intégration de ces termes (*cf.* équations 3.3.7 et 3.3.8), ce qui rend leur prise en compte directe. Le seul point délicat est que pour les problèmes généralement considérés avec ce genre de modèle, il est important d'avoir un schéma qui respecte les conditions d'équilibres. Le schéma de base est corrigé pour préserver l'équilibre de lac au repos en "étendant" la méthode d'Audusse [12], proposée pour le système de Saint-Venant. Il suffit pour cela de remarquer qu'au repos on a $\eta = h$ et que donc l'équation de quantité de mouvement du système de SGN approché est identique à celle de SV. Il faut donc simplement modifier η de la même manière que h pour préserver l'équilibre $(h - b = cste, u = 0m/s)$.

3.7 Bilan

Dans ce chapitre on a vu comment modifier le système de SGN approché de Favrie et Gavrilyuk [68] pour ajouter de la dissipation grâce à une transition (potentiellement non instantanée) vers le modèle de SV. Les difficultés rencontrées dans la littérature avec ce genre d'approches ont été évoquées puis différentes méthodes de transitions ont été proposées. Une revue des critères de déferlement les plus employés a été présentée et un critère analogue, mais plus simple, au critère cinématique a été proposé. Ces approches seront testées au chapitre 8.

Chapitre 4

Modélisation des écoulements multi-phases

Sommaire

4.1 Introduction **56**
4.2 Les différentes approches numériques **57**
4.3 Construction des modèles bi-phases **58**
4.3.1 Modèle en déséquilibre total 59
4.3.2 Modèle en équilibre mécanique 60
4.3.3 Modèle isentropique en équilibre mécanique 62
4.3.4 Modèle isentropique en équilibre mécanique relaxé 63
4.3.5 Modèle minimum 64
4.3.6 Suppléments sur la réduction isentropique et les lois d'états 64
4.4 Quelques remarques et limitations sur les modèles présentés **66**
4.5 Bilan **67**

Ce chapitre se focalise sur la présentation de quelques modèles permettant de représenter des écoulements potentiellement compressibles, contenant de l'air et de l'eau. Une des finalités est de retenir un modèle capable de représenter des écoulements de phases pures liquide-gaz compressibles, aussi bien en configurations séparées que mélangées à l'échelle macroscopique. Ceci permettra d'envisager la représentation des déferlements et des impacts de vagues sur des structures avec des milieux purs ou aérés.

4.1 Introduction

La modélisation de ce type d'écoulement a attiré beaucoup d'attention ces dernières décennies de part leurs larges présences dans la nature et dans les applications industrielles. On les rencontre par exemple dans la propagation et le déferlement d'une vague ou encore dans les générateurs de vapeur des réacteurs nucléaires.

On peut distinguer les écoulements où les fluides en présence sont une phase liquide et une phase gazeuse d'un même fluide, et les écoulements où les molécules sont différentes. Du point de vue microscopique, dans le premier cas seule l'agitation moléculaire différencie les deux phases alors que dans le second cas, les molécules sont simplement différentes, et peuvent évidemment aussi être dans divers états d'agitation. Lorsqu'on étudie un écoulement contenant une unique espèce présente sous différentes formes (liquide, gazeuse et/ou solide), on peut parler d'écoulement multi-états. Dans le cas le plus général on peut parler d'écoulement multi-espèces. Dans la littérature, le terme multi-phases est généralement utilisé (la notion de plusieurs espèces est alors considérée comme implicite [1]) ou encore de multi-fluides. Pour préciser la différence entre ces deux catégories, on s'appuie sur Saurel et Abgrall [193] qui considèrent qu'un écoulement est multi-fluides lorsque les fluides sont séparés par des interfaces bien définies. A l'inverse, lorsque certaines parties de l'écoulement (hors interfaces) sont modélisées par un mélange, c'est à dire qu'on ne fait plus la distinction entre les fluides, on parle de multi-phases.

Il existe plusieurs sous-catégories d'écoulements multi-phases. Lorsque peu de séparations entre les phases existent, on parle de phases séparées. La propagation d'une vague illustre bien ce cas. A l'inverse, si un très grand nombre d'objets d'une certaine phase sont contenus dans une autre phase, on a à faire à beaucoup d'interfaces et on parle alors d'écoulement à phase dispersée. Un cas qui illustre cela est un brouillard : des particules d'eau sont suspendues dans un gaz. Il est immédiat qu'entre les deux cas la nuance peut être compliquée à définir. La notion de phase dispersée renvoie en fait directement à l'échelle de visualisation. En effet, si on agrandit une zone donnée d'un brouillard, on pourra sans difficulté visualiser des petites gouttes entourées de gaz, que l'on ne pourra plus localement différencier de la définition précédente d'écoulement à phase séparée. Ces définitions sont donc données par rapport à l'échelle macroscopique. Un modèle bi-fluides, conçu pour les phases séparées, permet de modéliser proprement un écoulement à phases dispersée dès lors que la discrétisation est suffisamment fine pour capter les objets de la phase dispersée (*i.e.* les plus petits objets). Cela est évidemment rarement envisageable hormis pour des cas très particuliers. On peut rajouter que, lorsqu'une phase est peu présente, la notion de phase diluée est employée.

Comme dans notre cas, l'écoulement le plus compliqué que l'on souhaite modéliser est le déferlement d'une vague et son impact sur une structure (ou en étant plus raisonnable l'effet d'un milieu aéré lors d'un impact), il est clair que considérer chaque petite bulle entraînée dans un déferlement est inaccessible d'un point de vue simulation numérique. L'idée est donc de modéliser la "mousse" par un mélange. On parlera donc dans la suite de modélisation bi-phases.

Les contraintes sur le modèle que l'on souhaite employer sont par conséquent : être capable de représenter un mélange et, à grande échelle, des phases séparées. Comme on le verra plus tard, un mélange est très facilement compressible, ce qui justifie la contrainte supplémentaire d'utiliser un modèle compressible. Lors de l'impact d'une vague, et plus particulièrement d'une vague déferlée, on s'attend à observer des compressions et des détentes. Comme une forte détente peut entraîner de la cavitation, une contrainte supplémentaire

1. Landau et al. [118] définissent les phases d'une substance comme ses états qui peuvent coexister simultanément à l'équilibre, tout en étant en contact direct. En supprimant le mot substance, le mot phase se rapporte donc simplement à un état de la matière.

intéressante est que le modèle sélectionné soit capable de traiter ce phénomène même grossièrement. Notons que dans les gammes de pression attendues, il n'y a pas de différence importante entre de l'air et de la vapeur d'eau. Cela permet de construire un modèle pour les écoulements *a priori* air-eau mais de considérer comme physiquement représentatif la cavitation de la phase dense vers la phase légère sans avoir à reconsidérer la description thermodynamique des fluides (*i.e.* l'eau cavite en air, bien que fondamentalement, cela soit faux). Même si ce type de phénomène peut sembler exotique dans les applications visées, il semble délicat de l'exclure lors d'impact violent (*cf.* par exemple Lugni et al. [137] sur ce point).

4.2 Les différentes approches numériques

A partir du moment où un écoulement bi-phase est considéré, hors zone de mélange, un nouvelle "discontinuité", nommée discontinuité de contact, séparant les deux phases avec des propriétés thermodynamiques potentiellement très différentes apparaît. Il existe plusieurs méthodes pour simuler ces problèmes à interfaces (on suit principalement Anderson et al. [8] et Saurel et Pantano [196]).

La première idée est de suivre le déplacement de l'interface grâce à la grille de discrétisation (*cf.* par exemple Hirt et al.). Cette approche, bien que précise, peut trouver ses limites lors de fortes déformations de l'interface rendant le maillage mal conditionné. Une autre possibilité est de conserver une grille fixe pour les fluides purs et de suivre l'interface avec des marqueurs lagrangiens. Cette méthode se nomme "Front Tracking" et a fait ses preuves pour des cas généraux mais nécessite l'emploi de deux types de solveur ce qui peut être coûteux et délicat pour des déformations étendues.

Une autre idée est de conserver une vision purement lagrangienne. Deux sous catégories de ces méthodes sont l'approche SPH (Smoothed Particles Hydrodynamic) ou l'approche LB (Lattice-Boltzman). Pour la méthode SPH, le domaine étudié est discrétisé en ensemble de nœuds dont la connectivité pourra évoluer au cours des calculs. Chaque nœud est évalué, non pas comme un élément unique, mais comme une sommation plus ou moins pondérée des états des points voisins. Les poids des nœuds du sous-domaine sont définis par une fonction de répartition, ou noyau, dont l'étendue varie pour garantir un nombre de particules suffisant. Cette méthode peut être vue comme une approche lagrangienne lissée (d'où le terme « Smoothed »). L'idée de résoudre un système sans maillage permet de réduire certains problèmes engendrés par exemple par de fortes déformations de surfaces libres. Notons que c'est une approche type microscopique mais avec des particules qui peuvent être de taille macroscopique suivant la précision requise. Un défaut de cette méthode est son instabilité numérique qui nécessite souvent l'introduction d'une viscosité artificielle. La méthode LB repose sur la théorie cinétique des gaz pour laquelle la répartition des particules est solution de l'équation de Boltzmann. A l'échelle microscopique, la résolution du déplacement de chaque particule dont les degrés de liberté sont très élevés est numériquement inaccessible. Le milieu étudié est donc discrétisé à l'échelle mésoscopique et les types de déplacements possibles des particules « fictives » sont réduits. Le mouvement des particules obéit donc à l'équation de Boltzmann avec des contraintes de déplacements (et de collisions) prédéfinies, d'où le nom de méthode de Boltzmann sur réseaux. Les données macroscopiques du système peuvent être retrouvées par intégration des variables d'ensemble sur un volume relativement étendu. Les conditions aux limites sont définies à l'échelle du réseau et sont donc des fonctions de répartition particulières. Les forces extérieures, comme par exemple la gravité, sont appliquées par le biais d'ajout de forces à la fonction de collision dans l'équation de Boltzmann. L'idée sous-jacente de cette approche est qu'une description relativement simplifiée des interactions à l'échelle microscopique (chocs élastiques, directions d'advection privilégiées, etc) est suffisante pour décrire l'état macroscopique d'un fluide pour un nombre de particules fictives élevées. Cette approche à fort potentiel est à l'heure actuelle surtout utilisée pour modéliser les écoulements incompressibles. Ces méthodes particulaires initialement considérées comme très coûteuses ont connu un fort essor ces dernières années car elles sont en fait particulièrement compatibles avec les architectures actuelles des ordinateurs.

Une autre méthode est de rester sur une approche avec maillage mais d'utiliser une fonction eulérienne pour faire évoluer l'interface. Cette méthode nommée Level Set (*cf.* Aslam et al. [11] dans le cas compressible) a pour point fort de se passer de changement de maillage, mais peut donner lieu à des problèmes de

conservation de masse. Elle nécessite aussi des réinitialisations fréquentes de la fonction Level Set, qui a naturellement tendance à se diffuser.

Une autre méthode est d'autoriser la diffusion de l'interface (le minimum possible évidemment). Ces approches se nomment méthodes à interfaces diffuses, ou parfois méthode de capture d'interface. La difficulté principale de cette méthode est de devoir définir un état thermodynamique pour la zone de mélange. A partir de là, deux voies existent. La première est de considérer une interface comme une zone visco-capillaire. Un des défauts importants de cette approche est de nécessiter une interface très fine (de l'ordre de grandeur du nanomètre) pour être cohérente (*cf.* Cahn et Hilliard [36]). Pour finir, une autre approche à interface diffuse est celle introduite initialement par Hirt et Nichols en 1981 dans un cadre incompressible et étendue par la suite dans un cadre compressible (*cf.* par exemple Abgrall [3] et Saurel et Abgrall [194, 193]). L'interface entre deux phases est ici définie par la fraction volumique d'une phase par rapport à l'autre, ou par une fonction couleur si on se restreint au cas incompressible ou qu'on ne souhaite pas modéliser les mélanges. Cette fraction intervient directement dans les équations de conservations. L'atout remarquable de cette approche est que le même système d'équations est utilisé dans tout le domaine. L'interface peut être reconstruite par des méthodes géométriques comme par exemple l'approche "VOFPLIC" dans le cas incompressible ou bien simplement gardée suffisamment fine grâce à des schémas peu diffusifs voir anti-diffusifs ou compressifs. Les méthodes géométriques peuvent s'avérer complexes dans le cas de déformations quelconques (beaucoup de cas à prévoir). A l'inverse les méthodes basées sur des schémas "anti" diffusifs sont en ce sens parfaitement générales mais il reste difficile à justifier que l'interface ne soit pas numériquement déformée *in fine*. Il existe donc un fort besoin de comparer les différentes méthodes de "compression d'interface" proposées dans la littérature avec l'espoir que certaines d'entre elles se détachent de manière générale.

Compte tenu de sa "simplicité", de sa capacité à traiter naturellement les créations et coalescences d'interfaces et d'éventuellement traiter des mélanges, l'approche à interface diffuse est considérée dans cette thèse.

Il existe différents systèmes d'équations, plus ou moins complexes, pour modéliser les écoulements diphasiques compressibles. Dans le paragraphe qui suit un des principes de dérivation de ces modèles est présenté succinctement.

4.3 Construction des modèles bi-phases

Il existe principalement deux moyens d'obtenir un modèle bi-phase compressible. Le premier consiste à considérer deux phases, régies respectivement par les lois classiques de conservation et des termes de sauts entre les phases, puis d'effectuer une moyenne sur un échantillon à une certaine échelle pour obtenir un modèle d'ensemble à l'échelle d'intérêt. Un autre moyen est de repartir de zéro et de postuler ou estimer l'énergie du milieu d'intérêt et d'appliquer le principe de moindre action. Dans la suite nous allons présenter succinctement le principe de la méthode de moyenne pour obtenir le modèle diphasique général de Baer et Nunziato (noté BN) avant d'effectuer des hypothèses supplémentaires pour arriver à des modèles les plus simples possibles. Pour plus de détails sur la seconde méthode basée sur le principe variationnel, le lecteur est renvoyé à Berdichevsky [21] pour un cadre général, Dell'Isola et Gavrilyuk [56] dans un cadre multiphasique ou encore Caro et al. [38] ou Drui [61] pour le cas plus simplifié qui va *in fine* nous intéresser dans cette thèse.

La méthode de moyenne est la suivante :
On considère tout d'abord que deux phases régies par les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, sont présentes dans un domaine Ω. Pour simplifier, les effets visqueux sont négligés (ie. équations d'Euler) et on raisonne en 1D. Il faut maintenant stipuler les relations de saut d'une phase à une autre. La contrainte est que la présence d'interface ne doit pas empêcher de conserver la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale. Vient alors le temps du processus de moyenne. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé à Drew et al. [60] ou Drew et Allen [59] qui a été principalement suivi pour ce résumé. Il n'est en effet pas toujours nécessaire de résoudre toutes les interactions entre les phases, en particulier à des échelles réduites, lorsque seuls des phénomènes de taille macroscopique nous intéressent. La notion de moyenne introduit naturellement la notion de mélange. On rappelle cependant qu'on ne s'intéresse

ici qu'à des fluides non miscibles. Le terme mélange que l'on emploie n'est donc pas associé à une interaction moléculaire, mais simplement à une présence commune de plusieurs phase dans une zone. Pour repérer chaque phase une fonction caractéristique de présence ξ_k, attachée à la phase k, est introduite :

$$\xi_k(x,y,z,t) = \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est à la position (x,y,z) à l'instant } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.3.1}$$

La zone discontinue de cette fonction correspond à une interface. En notant V_i la vitesse de l'interface, cette fonction, qui est par construction attachée à la phase k, est donc régie par :

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} + V_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x} = 0 \tag{4.3.2}$$

En dehors de l'interface, on a $\dfrac{\partial \xi_k}{\partial x} = 0$. La définition de la fonction permet de définir son gradient avec la distribution de Dirac. Les équations de conservation de chaque phase sont maintenant multipliées par cette fonction de présence. En moyennant ces equations on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial x} = S_1 \\
&\frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k^2 + P_k}{\partial x} = S_2 \\
&\frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u_k (E_k + P_k)}{\partial x} = S_3
\end{aligned}$$

Avec par construction $\alpha_k =< \xi_k >$ la fraction volumique, ρ_k la masse volumique, u_k la vitesse, P_k la pression et E_k l'énergie totale de la phase k. Le système déterminé doit maintenant être fermé. Le lecteur est renvoyé aux références précédentes pour plus de détails sur les termes sources. Hormis des relations de saut aux interfaces, nous n'avons pas suffisamment de contraintes pour lier les "sources" aux variables du système. Cependant, moyennant quelques hypothèses topologiques comme assumer une forme particulière d'interface, il est possible d'avancer. Le point clef d'après vient de la détermination de la fraction volumique. Pour deux phases la connaissance d'une fraction volumique entraîne évidemment la connaissance de l'autre. En ajoutant une équation sur la fraction volumique, Baer et Nunziato [15] ont obtenu un système hyperbolique. Ce modèle était initialement formulé pour des phénomènes à grains mais est à la base de la plupart des modélisations multiphasiques actuelles. Ce modèle est détaillé dans la section suivante.

4.3.1 Modèle en déséquilibre total

Le point de départ de tous les modèles qui vont suivre est un système très général supposant un déséquilibre total, en pression et vitesse, entre les phases, introduit par Baer et Nunziato [15] et proposé initialement pour les milieux granulaires. Saurel et Abgrall [193] ont construit un modèle diphasique liquide - gas sur la base de ce modèle. Il est capable de traiter des problèmes à interfaces, tout comme des problèmes de mélange au sens large en déséquilibre. Ce modèle s'écrit en 1D sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha_g\big)_t + V_i\big(\alpha_g\big)_x = \mu(P_g - P_l) \\
&\big(\alpha_g\rho_g\big)_t + \big(\alpha_g\rho_g u_g\big)_x = 0 \\
&\big(\alpha_g\rho_g u_g\big)_t + \big(\alpha_g\rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g\big)_x = P_i\big(\alpha_g\big)_x + \lambda(u_l - u_g) \\
&\big(\alpha_g\rho_g E_g\big)_t + \big(u_g(\alpha_g\rho_g E_g + \alpha_g P_g)\big)_x = P_i V_i\big(\alpha_g\big)_x + \mu P_i(P_g - P_l) + \lambda V_i(u_l - u_g) \\
&\big(\alpha_l\rho_l\big)_t + \big(\alpha_l\rho_l u_l\big)_x = 0 \\
&\big(\alpha_l\rho_l u_l\big)_t + \big(\alpha_l\rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l\big)_x = -P_i\big(\alpha_g\big)_x - \lambda(u_l - u_g) \\
&\big(\alpha_l\rho_l E_l\big)_t + \big(u_l(\alpha_l\rho_l E_l + \alpha_l P_l)\big)_x = -P_i V_i\big(\alpha_g\big)_x - \mu P_i(P_g - P_l) - \lambda V_i(u_l - u_g)
\end{aligned}$$

Avec α_k la fraction volumique, ρ_k la masse volumique, u_k la vitesse, P_k la pression et E_k l'énergie totale de la phase k. P_i et V_i sont la pression et vitesse de l'interface et λ et μ sont les coefficients de relaxation de vitesse et de pression. Pour fermer le système, une équation d'état par phase est nécessaire :

$$P_k = P(\alpha_k, \rho_k, e_k)$$

La variable μ est liée à la nature des matériaux et est très complexe à déterminer dans le cas général. Heureusement, en pratique cette variable contrôle la vitesse de relaxation des pressions des matériaux, vitesse qui est souvent très grande (bien supérieure à l'hydrodynamique). Par conséquent sa connaissance est rarement nécessaire (*cf.* par exemple Massoni et al. [152]).

Ce modèle général doit être utilisé lorsque les différences de vitesses et de pressions entre les phases sont importantes.

4.3.2 Modèle en équilibre mécanique

Une simplification très intéressante, basée sur la limite asymptotique au premier ordre du modèle précédent, dans la limite des forts effets de relaxation des vitesses et des pressions (λ et μ tendent vers l'infini) a été proposé en 2001 par Kapila et al. [103]. Le résultats obtenus est un modèle à l'équilibre mécanique (pour une démonstration détaillée, le lecteur peut se référer par exemple à [98]). Le système d'équation obtenu en 1D est le suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = K\frac{\partial u}{\partial x}\\
&\frac{\partial \alpha_1\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1\rho_1 u}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \alpha_2\rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2\rho_2 u}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + P)}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

$$K = \alpha_l\alpha_g \frac{\rho c_m^2}{\rho_l c_l^2 \rho_g c_g^2}\left(\rho_l c_l^2 - \rho_g c_g^2\right) \tag{4.3.3}$$

$$\frac{1}{\rho c_m^2} = \frac{\alpha_l}{\rho_l c_l^2} + \frac{\alpha_g}{\rho_g c_g^2} \tag{4.3.4}$$

Avec $\rho E = \alpha_l\rho_l e_l + \alpha_g\rho_g e_g$ et $\rho = \alpha_l\rho_l + \alpha_g\rho_g$. L'équation d'état qui vient fermer le système est une fonction d'au moins trois variables : $P = P(\alpha_g, \rho, e)$. La vitesse acoustique c_m de ce modèle est non monotone en fonction de la fraction volumique et donne de faibles vitesses pour les mélanges de phases.

Le modèle de Kapila est fermé par une loi d'état unique déterminée à partir des lois de pression respective à chaque fluide. On l'obtient à partir de l'expression de l'énergie interne de mélange : $\rho e = \alpha_1\rho_1 e_1 + \alpha_2\rho_2 e_2$. Si pour chacune des phases l'équation d'état "stiffened gas" est utilisée, chacune des lois respectives ayant évidemment des coefficients différents, l'équilibre des pressions donne la pression de mélange suivante :

$$P(\rho, e, \alpha_1) = \frac{\rho e - \left(\frac{\alpha_1\gamma_1 P_{\infty 1}}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2\gamma_2 P_{\infty 2}}{\gamma_2 - 1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1}} \tag{4.3.5}$$

Remarque 6. *Bien que le raisonnement effectué pour obtenir ce modèle soit formellement rigoureux, il est intéressant de vérifier expérimentalement le résultat obtenu sur la vitesse du son en milieu diphasique homogène. De nombreuses expériences ont été effectuées le siècle dernier montrant la validité de cette loi. Une étude plus récente (2009) de Shamsborhan [201] confirme globalement les anciens résultats expérimentaux et donne une bonne revue des différents travaux (expérimentaux et théoriques) visant à déterminer cette fonction. La figure ci-dessous extraite de ces travaux présente une comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux :*

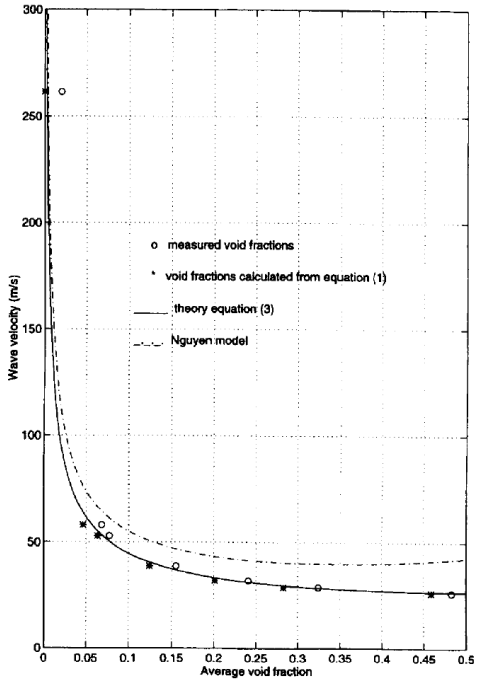


FIGURE 4.1 – Comparaison entre expérience et théorie pour la vitesse du son dans un mélange air-eau. La courbe en trait plein correspond à la formule (4.3.4). Les cercles correspondent au résultats expérimentaux. La vitesse du son de Wood correspond bien à la réalité. Cette image a été extraite de Shamsborhan [201].

Ce modèle est hyperbolique et la vitesse du son associé est celle de Wood (1930) qui correspond bien à la réalité. Ce modèle est par conséquent physiquement bien posé. Pour des applications de ce modèle, le lecteur pourra se référer par exemple à [6, 165].

Il pose cependant des difficultés de résolution. La première vient de la non monotonie de la vitesse du son face à la fraction volumique. La diffusion de l'interface n'étant pas physique, les ondes traversant une interface "épaisse" seront ralenties anormalement. Une autre difficulté vient du second membre de l'équation sur la fraction volumique Ku_x (terme non conservatif). Ce terme peut devenir très grand dans les chocs ou les fortes détentes. La résolution de l'équation sur la fraction volumique ne garantit alors plus la positivité de cette fraction. D'autre part, les relations de Rankine-Hugoniot permettant de résoudre le problème de Riemann sont valables pour des lois de conservation, ce qui rend ce terme problématique. Une solution efficace permettant d'éviter ces deux difficultés a été publiée par Saurel et al. [197]. L'idée est de revenir à un modèle intermédiaire entre celui de "Baer et Nunziato" et "Kapila" en déséquilibre de pression. Ce modèle à 6 équations peut être résolu via une relaxation de la pression et tend alors vers le modèle de Kapila. L'équation sur la fraction volumique devient :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{P_1 - P_2}{\mu} \tag{4.3.6}$$

La vitesse du son devient alors :

$$c = c_{frozen} = \sqrt{\frac{\alpha_1\rho_1}{\rho}{c_1}^2 + \frac{\alpha_2\rho_2}{\rho}{c_2}^2}$$

On peut naïvement se dire qu'on vient de perdre la bonne propriété acoustique du modèle de Kapila car cette vitesse du son n'est pas en accord avec l'expérience (comme par exemple dans [172]). En fait on retrouve bien après relaxation de la pression la vitesse du son de Wood.

Pour justifier physiquement la simplification du modèle de BN vers un modèle à une vitesse, on peut raisonner de la manière suivante. Dès lors que le temps caractéristique des effets de frottements sont beaucoup plus petits que ceux des effets convectifs, cette hypothèse est valide. En effet les frottements tendent à limiter le glissement et donc à donner localement une vitesse commune aux objets.

Remarque 7. *Il peut être tentant de vouloir "dériver" un modèle à une pression mais deux vitesses. Hélas ce choix mène à un modèle mal posé (non hyperbolique) et est donc à proscrire.*

4.3.3 Modèle isentropique en équilibre mécanique

Il est possible de transformer l'équation sur l'énergie en équation (de transport) sur l'entropie (*cf.* par exemple Saurel et al. [197]). En supposant que l'écoulement est isentropique on a donc

$$\frac{\partial \alpha_1\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1\rho_1 u}{\partial x} = 0 \tag{4.3.7}$$

$$\frac{\partial \alpha_2\rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2\rho_2 u}{\partial x} = 0 \tag{4.3.8}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0 \tag{4.3.9}$$

$$P = P(\rho_g) = P(\rho_l) \tag{4.3.10}$$

L'égalité sur les pressions fournit la connaissance de α via la résolution d'une équation au pire non linéaire. Des informations complémentaires (existence d'entropie, équation équivalente sur α, *etc.*) sur ce modèle peuvent être trouvées dans Chanteperdrix [40].

Remarque 8. *Pour la détermination de α il est généralement conseillé d'utiliser la méthode de Newton. Notons cependant que cette fonction a parfois une forme qui donne une mauvaise convergence de la méthode de Newton. D'après notre expérience sur le sujet, une combinaison entre une méthode de dichotomie et de Newton donne des temps de convergence bien plus intéressants sur les cas tests effectués.*

Caractéristiques et vitesse du son

Une manière efficace de trouver la vitesse du son associé à ce modèle est de passer par une forme primitive de la pression.

$$(4.3.7) + (4.3.8) \iff \rho_t + \big(\rho u\big)_x = 0 \tag{4.3.11}$$

$$\iff \rho_P P_t + \rho u_x + u\rho_P P_x = 0 \tag{4.3.12}$$

$$\iff \frac{1}{c^2}P_t + \rho u_x + u\frac{1}{c^2}P_x = 0 \tag{4.3.13}$$

$$\iff \frac{1}{c^2}\frac{dP}{dt} + \rho u_x = 0 \tag{4.3.14}$$

De la même manière on a pour chaque fluide :

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k \rho_k u}{\partial x} = 0 \tag{4.3.15}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial t} + \alpha_k \rho_k \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial x} = 0 \tag{4.3.16}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial P_k}\frac{dP_k}{dt} + \alpha_k \rho_k \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.3.17}$$

$$\Longleftrightarrow (\rho_1 \frac{\partial \alpha_k}{\partial P_k} + \alpha_k \frac{1}{{c_k}^2})\frac{dP_k}{dt} + \alpha_k \rho_k \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.3.18}$$

$$\Longleftrightarrow (\frac{\partial \alpha_k}{\partial P_k} + \alpha_k \frac{1}{\rho_k {c_k}^2})\frac{dP_k}{dt} + \alpha_k \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.3.19}$$

Pour ce modèle les pressions des fluides sont en équilibre ($P = P_k$). En sommant (4.3.19) sur $k = 1, 2$ on obtient :

$$(\frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_1 c_2^2})\frac{dP}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.3.20}$$

Par identification avec (4.3.14), la vitesse du son est :

$$\frac{1}{\rho c^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \tag{4.3.21}$$

On retrouve la vitesse de son de Wood conforme à la réalité. Ce modèle est assez simple et contient la propriété minimum qui nous intéresse dans cette thèse. Il semble donc à retenir. Cependant, comme discuté dans la description du modèle de Kapila, ce modèle implique des difficultés numériques dues à la non monotonie de la vitesse du son. Ce modèle sera testé dans le chapitre 9. En suivant Saurel et al. [197] ou Chanteperdrix [40], de la même manière que pour le modèle de Kapila, un modèle parent permet de s'affranchir de cette difficulté. Ce modèle est décrit dans le paragraphe suivant.

4.3.4 Modèle isentropique en équilibre mécanique relaxé

Pour ce modèle, l'équilibre des vitesses est toujours supposé mais l'évolution des pressions est laissée libre. La relaxation des pressions vers l'équilibre permet de retrouver asymptotiquement le modèle à l'équilibre. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{P_1 - P_2}{\mu} \\
&\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 u}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 u}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

Caractéristiques et vitesse du son

L'écriture sous forme quasi linéaire donne :

$$W_t + A(W)W_x = 0$$

$$\text{avec } W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ u \end{pmatrix} \text{ et } A(W) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ \frac{P_1 - P_2}{\rho} & \frac{\alpha_1 {c_1}^2}{\rho} & \frac{\alpha_2 {c_2}^2}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

Le calcul des valeurs propres associées ($Det(A - \lambda Id) = 0$) donne $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_{2,3} = u$ et $\lambda_4 = u + c$ avec :

$$c = c_{frozen} = \sqrt{\frac{\alpha_1 \rho_1}{\rho} {c_1}^2 + \frac{\alpha_2 \rho_2}{\rho} {c_2}^2} = \sqrt{Y_1 {c_1}^2 + Y_2 {c_2}^2}$$

La condition de sous caractéristique de Whitham est vérifiée : $c_{Wood} < c_{frozen}$. Encore une fois la vitesse du son trouvée ne présage en rien de la vitesse réelle des ondes acoustiques une fois les pressions relaxées. On retrouve bien (tant que le développement asymptotique est valide) la vitesse du son Wood *in fine*.

Ce modèle est un bon candidat pour l'étude d'impact de vague et est donc retenu pour la suite de cette thèse. Notons que la description d'un mélange par ce modèle reste assez simpliste. Pour une description plus fine des mélanges le lecteur peut se référer à Gavrilyuk et Saurel [74] et Drui [61]. Des compléments mathématiques sur ce modèle sont donnés en Annexe A.

4.3.5 Modèle minimum

Tous les modèles que nous avons vu jusqu'à présent, sont capables de décrire plus ou moins finement un mélange de phases et des phases séparées. Il n'est parfois pas nécessaire de décrire des mélanges ce qui permet de considérer des modèles dédiés aux problèmes où l'interface est toujours décrite. Dans un cadre isotherme on a par exemple en 1D :

$$\begin{aligned}
&\Phi_t + u\big(\Phi\big)_x = 0 \\
&\rho_t + \big(\rho u\big)_x = 0 \\
&\big(\rho u\big)_t + \big(\rho u^2 + P\big)_x = 0 \\
&P = P(\rho, \Phi)
\end{aligned}$$

Φ est une fonction de présence (par exemple $\Phi = 1$ implique une zone d'air pur et $\Phi = 0$ d'eau pure). $\rho = \Phi\rho_g + (1 - \Phi)\rho_l$ est une densité de "mélange". Pour chaque zone pure, on retrouve bien la limite monophasique. Cependant pour ce modèle, la notion de mélange n'a aucun sens physique.

La pression peut être déterminée de la manière suivante : considérons que l'on modélise un liquide et un gaz. On prend par exemple pour ces fluides deux lois d'état barotropes linéarisées :

$$P_l - P^{ref} = c_l^2(\rho_l - \rho_l^{ref}) \qquad\qquad P_g - P^{ref} = c_g^2(\rho_g - \rho_g^{ref})$$

En se servant de l'expression de la masse volumique de "mélange", il est possible de trouver une loi de fermeture pour P en supposant par exemple $P = P_1 = P_2$.

Ce modèle, ou des modèles similaires sont utilisés par exemple dans Golay et al. [81], Saurel et Abgrall [194], Massoni et al. [152], Allaire et al. [6].

Ce modèle a été initialement utilisé dans cette thèse. Des cas tests du Lot 1 du projet TANDEM ont été effectués en se servant d'une variante dédiée aux écoulements incompressibles (*cf.* Golay et al. [81] pour plus de détails sur cette approche et Pons et al. [177] et Marcer et al. [146] pour quelques cas tests effectués).

Ce modèle est capable de simuler des problèmes à interfaces entre fluides compressibles. Il n'est cependant pas capable de modéliser les problèmes de mélange car la vitesse de mélange n'est pas correcte. Du point de vue numérique ce modèle n'est pas plus facile à résoudre que le modèle présenté en section 4.3.3 car il faut résoudre l'équation sur Φ sous forme non conservative pour éviter des oscillations de pression (*cf.* Abgrall [3] et Saurel et Abgrall [194] pour plus de détails sur ce point). Ceci complexifie légèrement les choses lors des montées en ordre en espaces des schémas. Pour ces raisons nous nous sommes finalement tournés vers le modèle présenté en section 4.3.3.

4.3.6 Suppléments sur la réduction isentropique et les lois d'états

Pression et lois d'état : D'une manière générale une loi d'état (noté EOS dans la suite) d'un fluide caractérise sa pression en fonction de sa masse volumique et de son énergie interne (ou température). Elle s'écrit $P = P(\rho, e)$ ou $P = P(\rho, T)$ et permet de clore le système d'équations. D'un point de vue physique,

lors de l'établissement des équations de conservation on considère des "particules fluides" (ou volume infinitésimal) afin de définir notamment des vitesses d'ensemble. Ces particules fluides contiennent plus précisément un ensemble de molécules avec des vitesses propres. Le processus de moyenne définissant la vitesse d'une particule fluide a pour conséquence de tuer un phénomène microscopique : les collisions de ces différentes molécules. Ce processus est retrouvé à l'échelle macroscopique par ce qui est nommé pression. Suivant le fluide considéré et les conditions dans lesquelles il évolue des lois plus ou moins complexes seront utilisées comme par exemple la loi des gaz parfaits, la loi de Noble-Abel, la loi de Van de Waals, la loi des gaz raides ou encore sans être exhaustif la loi de Mie Gruneisen.

Dans cette thèse deux types d'EOS ont été considérés. Des lois barotropes :

$$P_l - P^{ref} = c_l^2(\rho_l - \rho_l^{ref}) \qquad\qquad P_g - P^{ref} = c_g^2(\rho_g - \rho_g^{ref})$$

et parfois des lois plus élaborées comme une loi des gaz parfaits isentropique pour l'air :

$$P_g(\rho_g) = P_0\big(\frac{\rho_g}{\rho_g^{ref}}\big)^{\gamma_g} \tag{4.3.22}$$

γ_g, ρ_g^{ref} et P_0 correspondent respectivement au ratio de chaleur spécifique, à la masse volumique de référence et à la pression de référence. Pour l'eau liquide la loi isentropique approchée de Tait a aussi été utilisée (voir par exemple [25]) :

$$P_l(\rho_l) = (P_0 + P_0K)\big((\frac{\rho_l}{\rho_l^{ref}})^{\gamma_l} - 1\big) \tag{4.3.23}$$

$K = \dfrac{\rho_l^{ref}(c_l^{ref})^2}{\gamma_l P_0}$ correspond au module de compressibilité du liquide avec c_l^{ref} la vitesse du son de référence du liquide.

Pour des conditions normales de températures et de pression (*i.e.* $T \approx 300K$, $P \approx 10^5 Pa$) les paramètres des lois d'état choisis pour l'air et l'eau peuvent être pris à : $\rho_l^{ref} = 1000kg/m^3$, $\rho_g^{ref} = 1.28kg/m^3$, $P_0 = 10^5 Pa$, $c_g^{ref} = 340m/s$, $c_l^{ref} = 1500m/s$, $\gamma_g = 1.4$ et $\gamma_l = 7$.

En pratique le choix de lois barotropes permet de déterminer la fraction volumique d'équilibre de manière analytique ce qui permet un gain de temps conséquent face aux lois plus élaborées où une équation non linéaire doit être résolue. Hors quelques applications très violentes, nous n'avons pas vu de différences importantes entre ces deux types de lois d'états même pour des cas tests impliquant des détentes ou chocs modérés. Le lecteur est renvoyé au chapitre 9 pour plus de détails.

Un peu de thermodynamique :
Le premier principe de la thermodynamique est :

$$de = \delta Q + dW \tag{4.3.24}$$

où de représente la variation d'énergie interne, δQ l'échange de chaleur avec l'extérieur et dW le travail échangé. L'échange de chaleur correspond à $\delta Q = TdS$ où S désigne l'entropie. On a $dW = -PdV$ où V correspond au volume spécifique définit comme $V = \dfrac{1}{\rho}$. En supposant un milieu isentropique, le premier principe donne :

$$de = \frac{P}{\rho^2}d\rho \tag{4.3.25}$$

Précédemment on s'est donné $P = P(\rho, e)$ ce qui écrit autrement donne $e = e(\rho, P)$. En se servant de l'expression obtenue précédemment et du différentiel sur e on obtient :

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{\frac{P}{\rho^2} - \frac{\partial e}{\partial \rho})_P}{\frac{\partial e}{\partial \rho})_\rho} \tag{4.3.26}$$

On a de plus $\frac{dP}{d\rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho})_S$ et $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho})_S$ avec c^2 la vitesse acoustique dans le milieu. En combinant ces expressions on a finalement :

$$c^2 = \frac{\frac{P}{\rho^2} - \frac{\partial e}{\partial \rho})_P}{\frac{\partial e}{\partial \rho})_\rho} \tag{4.3.27}$$

Remarque 9. *Pour des lois d'état cubiques ou plus complexe on voit que c peut devenir d'un point de vue algébrique complexe. L'hyperbolicité du modèle est alors localement perdue ce qui complexifie drastiquement la résolution des équations. Il est souvent choisi de raccorder la loi de façon judicieuse pour s'affranchir de cette difficulté. Dans le cadre de cette thèse au vu des phénomènes physiques envisagés ce cas ne sera pas rencontré. Le lecteur est renvoyé par exemple à [62] pour plus de détails sur les implications de ce type de difficultés.*

Revenons sur la quantité fondamentale de la thermodynamique : l'entropie (noté S). En dynamique des gaz, l'entropie spécifique (*i.e.* rapport à une unité de masse) "s" est définie par (voir par exemple : Leveque [127]) :

$$s = c_v log(\frac{P}{\rho^\gamma}) + cste \tag{4.3.28}$$

En manipulant les équations d'Euler on a $s_t + us_x = 0$ ce qui montre que l'entropie est constante le long des trajectoires douces des particules. Le long de ces trajectoires on a donc $P = \kappa\rho^\gamma$ avec $\kappa = cste$. D'autre part lorsque l'entropie est supposée constante cela implique que l'on peut se passer de l'équation de conservation d'énergie comme cela a été fait pour passer du modèle de Kapila à celui isentropique décrit au paragraphe 4.3.3. Un question de fond avec l'utilisation de ce modèle isentropique est : aura-t-on des résultats cohérents en présence d'ondes de choc ? En effet en toute rigueur il est possible de montrer que l'entropie (physique) augmente à travers un choc. Le fait de tuer ce phénomène est donc discutable. Cependant on assume que pour les chocs de faibles intensités cette hypothèse est valable. En pratique nous avons comparé les résultats obtenus avec cette hypothèse sur un cas test impliquant une onde de choc d'intensité modérée avec ceux obtenus par un modèle ne faisant pas cette hypothèse et aucune différence notable n'a pu être mise en évidence. Ce choix semble donc valable bien que la prudence soit de mise. Le lecteur est renvoyé au Chapitre 9 où ce cas test est présenté.

4.4 Quelques remarques et limitations sur les modèles présentés

En dehors du modèle dit "minimum", les modèles présentés permettent de retrouver le comportement principal de beaucoup de mélanges. Ils peuvent cependant être mis à défaut pour des mélanges très dilués. En effet, lorsque une phase porte une autre phase dont la présence est extrêmement réduite (par exemple avec une fraction volumique de gaz de l'ordre de 99%, *i.e.* des particules denses dans un milieu léger), les collisions des particules de cette phase peuvent être considérées comme négligeables. Le meilleur moyen de décrire cette phase aux collisions réduites est alors d'utiliser un modèle sans pression (comme le modèle de Marble). On peut aussi souvent négliger la présence de la phase diluée dans la phase porteuse ce qui permet d'utiliser les équations d'Euler. Sans approximations de ce type, les deux groupes d'équations sont couplés par des termes sources traduisant l'action des particules diluées sur la phase porteuse et vice versa (*cf.* par exemple Hank et al. [93]). Pour cette approche globale les ondes acoustiques dans le mélange se déplacent donc à la vitesse du son de la phase porteuse. Ceci est en désaccord avec la modélisation précédente pour laquelle on retrouve dans un mélange la vitesse du son de Wood mais en meilleur accord avec la réalité. Il n'existe en fait pas de modèle à la fois valide pour des mélanges denses et pour des mélanges très dilués. Le lecteur peut se référer à Saurel et al. [195] qui va dans ce sens pour combler le manque. L'explication de ce défaut du modèle moyenné non valide pour des mélanges très dilués vient, semble-t-il, de l'hypothèse de continuité de toutes les phases lors de l'étape de moyenne dans la dérivation du modèle. Lorsqu'une phase est en présence vraiment réduite, elle ne peut en effet être considérée comme continue à l'échelle du mélange. Dans le cadre de cette thèse ce cas n'est *a priori* pas d'une importance capitale car lorsqu'une vague déferle

le “mélange” formé est loin d’être dilué.

En dehors de ces cas, les modèles présentés précédemment permettent de modéliser aussi bien des phases séparées que des phases dispersées homogènes (assimilables à un mélange), mais le lien entre les deux états demeure incomplet. Prenons par exemple une bulle d’air définie par une cellule de maillage entourée d’eau. Cette bulle dans la réalité peut être “atomisée” sous forte contrainte de cisaillement par exemple. Avec une grille plus fine, on pourrait voir ce phénomène sans difficulté mais la finesse de discrétisation a évidemment des limites bien au delà de l’échelle microscopique (hors cas extrêmement réduit). En imaginant pour simplifier dans un premier temps que cette “atomisation” donne lieu à un mélange relativement homogène entre la phase porteuse et la phase réduite, la question est donc la suivante : peut-on augmenter la fraction volumique dans les zones alentours (à déterminer) de la phases réduite ? Compte tenu des modèles précédents, la considération de vitesses propres (et pressions) semble obligatoire pour dans un premier lieu estimer le taux de dislocation de cette fameuse bulle. Une fois cela fait (ce qui n’est pas une mince affaire mais semble accessible grâce à des corrélations pour commencer), il restera à alimenter le milieu environnant de la bulle en mélange. A l’inverse, connaissant un mélange donné, il est évident qu’au repos ce mélange va tendre vers des phases séparées. Prenons par exemple un mélange air eau que l’on met au repos sous champ gravitaire. En temps long une stratification s’opérera par poussée d’Archimède et la phase légère se rassemblera en surface. Ce cas simple semble être un point important de départ à tenter de respecter lors de la construction d’un modèle “général”. Notons que ces cas sont à l’heure actuelle modélisés par un couplage entre des modèles à phases séparées eulériens et des modèles lagrangiens avec des particules aussi petites que nécessaires. Ils sont par conséquent *a minima* d’une grande complexité et sujets à la notion de couplage externe dont on a pu toucher quelques limites dans cette thèse pour des modèles différents (*cf.* chapitre 10). Comme décrit précédemment, une autre voie avec un modèle unique semble envisageable.

4.5 Bilan

Dans ce chapitre on a vu les différentes manières de modéliser des écoulements mettant en jeu plusieurs fluides. Pour sa relative simplicité et sa capacité à traiter la coalescence d’interfaces la méthode à interface diffuse a été retenue. Quelques modèles diphasiques ont été présentés jusqu’à arriver à des modèles adéquats pour modéliser les impacts de vagues aussi bien non déferlées que déferlées avec la possibilité de traiter ce dernier cas comme un mélange macroscopique. Ces modèles, modèles isentropique en équilibre mécanique ou à relaxation, sont retenus pour la suite et seront notamment testés au chapitre 9.

Chapitre 5

Méthodes numériques

Sommaire

5.1 Introduction **70**
5.2 Méthode des volumes finis **71**
5.3 Résolution du problème de Riemann **73**
5.3.1 Equation scalaire 73
5.3.2 Système linéaire 74
5.3.3 Systeme non linéaire 75
5.3.3.1 Cas général 75
5.3.3.2 Application au système de Saint-Venant 78
5.3.3.3 Traitement du vide 82
5.3.4 Solveurs approchés : Lax-Friedrichs, Rusanov, HLL et HLLC 84
5.4 Stabilité **85**
5.5 Intégration en temps et montée en ordre temporel **87**
5.5.1 Méthode explicite 87
5.5.2 Méthode implicite 88
5.5.3 Méthode semi-implicite 91
5.6 Intégration en espace d'ordre élevé **92**
5.7 Terme source **97**
5.8 Conditions aux limites **97**
5.9 Multi-dimensions **101**
5.10 Comparaison explicite implicite **102**
5.10.1 Cas test avec un méthode implicite à haute efficacité intrinsèque 103
5.10.2 Cas tests avec un méthode implicite libre de matrice Jacobienne 105
5.11 Bilan **108**

Ce chapitre a pour vocation de présenter quelques méthodes numériques de base permettant de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) et plus particulièrement des systèmes hyperboliques. L'intérêt principal de cette présentation est de rendre ce manuscrit, autant que possible, auto consistant pour la résolution des modèles utilisés. En dehors d'un appui quasi total sur des ouvrages de référence de méthodes numériques, comme par exemple celui de Toro [221] ou de Leveque [127], les principales "valeurs ajoutées" de ce chapitre concernent la proposition d'une formulation particulière d'un schéma implicite simple et adéquat dans le cadre de code volumes finis sur maillage non structuré et le détail du traitement de conditions aux limites pour un modèle diphasique. Également, une explication du lien entre les méthodes de montée en ordre spatial TVD de type limiteur de pente et celles basées sur le formaliste de Barth et Jespersen [17] est proposée. Pour finir, une étude numérique sommaire comparant des schémas explicites et implicites est présentée.

5.1 Introduction

Il existe principalement 3 types de méthodes numériques pour résoudre des EDP, l'approche "Différences Finies" (DF), "Éléments Finis" (EF) et "Volumes Finis" (VF). Sans entrer dans les détails, on peut donner quelques avantages / inconvénients de chacune de ces méthodes dans leur essence. L'approche DF est basée sur des approximations des dérivées à l'aide de développement de Taylor, elle est simple à mettre en œuvre sur des géométries simples mais s'avère difficile dans le cas contraire. Cette méthode n'est pas toujours conservative. L'approche EF est souvent qualifiée de "mathématique" du fait du travail assez technique à effectuer en amont de l'implémentation d'un schéma pour un système donné. Cette méthode s'adapte à des géométries quelconques mais présente des difficultés de résolution pour les termes non linéaires et est donc particulièrement utilisée en mécanique des solides. L'approche VF est souvent qualifiée de physique puisqu'elle requiert un bilan de flux sur chaque frontière des volumes de contrôle et qu'elle est conservative par construction (intégration sous forme conservative). Cette méthode s'adapte aux géométries quelconques et permet la prise en compte de termes non linéaires. Elle est très utilisée en mécanique des fluides, comme par exemple dans les codes commerciaux Fluent (Ansys) et Starccm+, ou codes libres comme Openfoam. Pour son concept facilement généralisable aux maillages non structurés, conservatif, et robuste pour traiter des ondes de choc la méthode des VF a été sélectionnée dans cette thèse. Elle est présentée succinctement dans le premier paragraphe de ce chapitre.

Pour appliquer cette méthode, un point clef est la résolution d'un problème de Riemann à chaque interface de maillage. Pour bien comprendre comment résoudre ce problème, on commencera par aborder la résolution du cas simple d'une équation linéaire suivi des systèmes linéaires, pour finir sur les systèmes non linéaires. L'intérêt de l'étude de cas simples est de bien comprendre les principales propriétés d'un système hyperbolique. Hélas, beaucoup de phénomènes physiques complexes induisent des modèles non linéaires. Les phénomènes étudiés dans cette thèse n'y échappent pas. Les systèmes non linéaires sont évidemment plus compliqués à résoudre mais conservent le socle du linéaire, ce qui justifie un passage par des cas plus simples. Le cadre non linéaire est traité en suivant la méthode de Godunov, qui est notamment capable de traiter les ondes de choc avec robustesse. Cette méthode remarquable se base sur la propagation des ondes caractéristiques dans le milieu pour faire évoluer la solution. Initialement basée sur la résolution exacte du problème de Riemann, elle a ensuite évolué vers des méthodes approchées (solveurs dit de type-Godunov) lorsque le cas exact est complexe ou coûteux. Le solveur de Godunov sera présenté dans le cas des équations de SV, suivi de quelques solveurs approchés utiles entres autres pour résoudre des équations plus compliquées. Cette approche, sous sa forme de base, se révèle être très robuste mais une montée en ordre est souvent nécessaire pour obtenir une résolution plus efficace. Ce point a donné lieu à beaucoup de recherche car dans ses premiers travaux Godunov avait donné un théorème, souvent dit théorème de la barrière de Godunov, réduisant tout espoir de faire monter en ordre un schéma simple (*i.e.* linéaire), tout en conservant de la robustesse (comme la propriété de préservation de monotonie). Ces difficultés furent passées grâce à Kolgan [116, 115] et indépendamment [1] par Van Leer [224], près de 20 ans après, en contournant ce fameux théorème grâce

1. D'un point de vue historique seul Van Leer a reçu une forte reconnaissance pour cette avancée car les travaux de Kolgan sont restés longtemps peu connus à l'échelle internationale. Un papier rendant compte de cette "injustice" a récemment été écrit par Van Leer [225].

à l'introduction de schémas/limiteurs non linéaires. L'approche dite MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) découlant de ces travaux est présentée. Un lien entre ce type de limitation basée sur la préservation de la monotonie lors de la reconstruction des variables (MUSCL) et une limitation basée sur la propriété TVD de Harten est proposé. Différentes méthodes d'intégration en temps sont également présentées.

La notion de stabilité (L_2 et L_∞) est ensuite évoquée afin d'appréhender le comportement spatio-temporel des schémas utilisés. Une fois la résolution de la partie homogène posée, le traitement des conditions aux limites, des termes sources, ainsi que la résolution dans un cadre multidimensionnel sont exposés.

Comme ce chapitre a pour vocation de présenter d'une manière assez générale, mais évidemment non exhaustive, quelques méthodes de résolutions applicables aux systèmes hyperboliques, la résolution de certains systèmes d'équations étudiés dans cette thèse comportant des particularités sera détaillée hors de ce chapitre au fil de l'eau.

Il n'aura pas échappé au lecteur que seuls des systèmes hyperboliques sont traités dans cette thèse. Ceci n'est en rien hasardeux. Premièrement la résolution de ce type de système est aujourd'hui assez bien maîtrisée et permet d'utiliser des méthodes efficaces, même en multi dimensions, comme présentées par exemple dans ce chapitre. D'autre part, d'un point de vue plus profond les connaissances actuelles de la physique reposent sur un certain nombre de principes. A l'échelle macroscopique [2] le principe de causalité est un des piliers de notre vision de la nature. Si ce principe est accepté, il va de soit que les modèles prévoyant l'évolution d'un système physique doivent le suivre. Parmi tous les types d'EDP, le cas hyperbolique, associé à une condition entropique, permet d'être assuré [3] de l'existence et de l'unicité des solutions (et de leurs stabilités) dans un cadre général. On parle souvent de problème bien posé au sens d'Hadamard. Évidemment, il existe aussi des résultats théoriques pour d'autres types d'équations mais ils se réduisent souvent à des cas plus particuliers. Le choix de modèles hyperboliques n'est donc évidemment pas l'unique choix possible mais il assure par essence la condition nécessaire du caractère bien posé d'un modèle.

Remarque 10. *Dans ce contexte, la citation d'un passage de Drew et Passman [60] est intéressante : " A model that is not properly formulated mathematically cannot describe physical phenomena correctly. While mathematical correctness does not imply physical validity, the latter cannot be obtained without the former. ".*

5.2 Méthode des volumes finis

Ce paragraphe présente la méthode des VF. Soit le système à résoudre suivant (avec U un vecteur de taille n) :

$$U_t + div\big(F(U)\big) = S \tag{5.2.1}$$

Cette forme de système n'a rien d'anodin. Il s'apparente en effet à des lois de conservations et a donc un sens physique. On appelle lois de conservation toute équation ou système d'équations qui peut s'écrire sous la forme :

$$U_t + div\big(F(U)\big) = 0 \tag{5.2.2}$$

Par exemple, les équations d'Euler compressibles forment un tel système qui est hyperbolique. Pour un même modèle on peut parfois trouver à première vue différentes lois de conservation au sens mathématique. Il faut cependant se méfier de cette "équivalence" (qui en fait n'en est pas une...). En effet, dans la nature seules certaines quantités sont conservées. Pour des solutions continues, le choix de l'équation de conservation résolue n'a pas d'incidence sur le résultat obtenu. Par contre, lorsqu'une solution devient discontinue, l'évolution de la solution dépend des relations de Rankine-Hugoniot (relations de saut des variables conservatives que

2. L'étude de systèmes beaucoup plus petits, comme les particules élémentaires, tend à l'inverse à faire proposer aux scientifiques des modèles qui défient cette intuition. Ces modèles, ou plutôt leurs descriptions, ont été initialement critiqués notamment par Einstein avec sa fameuse phrase : "Dieu ne joue pas aux dés". Cette description tend cependant à s'imposer aujourd'hui.

3. Il convient de préciser que la justification de l'existence et l'unicité des solutions d'un système hyperbolique est parfaitement prouvée pour le cas linéaire. Dans le cas non linéaire la génération de solutions faibles complique la tache car il faut ajouter une condition entropique pour assurer l'unicité. Pour plus de détails sur ce point le lecteur peut se référer par exemple à Benzoni [20].

nous verrons dans un paragraphe ultérieur). Dans ce cas il faut donc veiller à résoudre les bonnes lois de conservations pour obtenir un résultat physique (pour plus de détails le lecteur peut se référer par exemple à Toro [221]).

La méthode de volumes finis se prête naturellement à l'intégration de ce type de système en considérant des volumes de contrôle. Comme nous allons le voir dans sa formulation, la forme des cellules de contrôle entre d'une manière assez simple dans la partie, ce qui permet un emploi aisé de cette méthode sur des maillages non structurés. On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ découpé en volumes de contrôle, tel que $\Omega = \cup_k C_k$, $|C_k|$ étant la taille des cellules. Les inconnues sont évaluées au centre des cellules indicées k et approchées par leurs valeurs moyennes, soit :

$$U_k(t) \simeq \frac{1}{|C_k|} \int_{C_k} U(x, y, z, t) dV$$

Le système (5.2.2) est intégré sur chaque volume. En appliquant la formule de Green sur la divergence du flux on obtient :

$$|C_k| \frac{\partial U_k(t)}{\partial t} + \sum_a \int_{\partial C_{k,a}} F(U) \cdot n_{k/a} \; dS = 0$$

U correspond au vecteur de variables conservatives (pour les équations d'Euler 1D barotrope on a par exemple $U = (\rho, \rho u)$). $n_{k/a}$ est le vecteur normal unitaire sur la frontière $C_{k,a}$ entre la cellule k et sa voisine a comme illustré en figure 5.1.

Le flux est approché par :

$$\int_{\partial C_{k,a}} F(U) \cdot n_{k/a} \; dS \simeq |C_{k,a}| F(U_k(t), U_a(t), n_{k/a})$$

On obtient finalement la forme semi discrète :

$$\frac{\partial U_k(t)}{\partial t} + \frac{1}{|C_k|} \sum_a |C_{k,a}| F(U_k(t), U_a(t), n_{k/a}) = 0$$

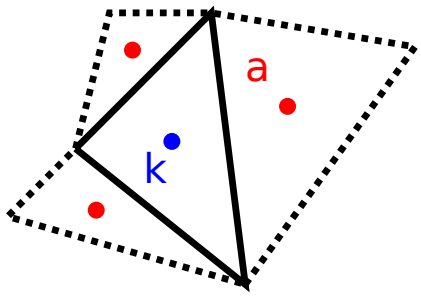


FIGURE 5.1 – Maillage non structuré 2D avec des cellules triangulaires.

Il faut ensuite calculer les flux aux interfaces. Dans un cadre général, ce type de problème se nomme problème de Riemann. Ce point joue un rôle fondamental dans la résolution de systèmes hyperboliques avec l'approche des VF, ce point est abordé dans le paragraphe 5.3. Il peut parfois être résolu par un solveur de Riemann exact ou sinon par un solveur approché. La résolution exacte associée au système de SV est par exemple exposée dans le paragraphe 5.3.3.2.

L'idée générale consistant à discrétiser un système de sorte à se ramener à un problème de Riemann à chaque interface est dû à Godunov [79]. Son idée est à la base de la plupart des méthodes de résolutions de systèmes hyperboliques non linéaires. Notons que l'explosion de la popularité de sa méthode a nécessité un autre pas important permettant de faire monter son schéma en ordre spatial (ce point est discuté dans le paragraphe 5.6).

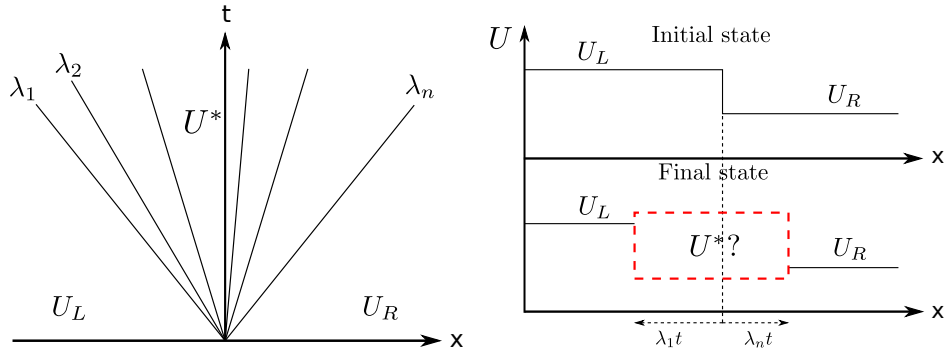
Précisons que pour certains systèmes, il est parfois impossible de résoudre le problème de Riemann associé. D'autre part, il arrive que la résolution exacte de ce problème à chaque interface soit très coûteuse en temps de calcul. Dans ces cas là, des solveurs approchés sont nécessaires. Le développement de ce type de solveurs ont également contribué à la démocratisation du schéma de Godunov. Des solveurs approchés, parfois appelés solveurs de type-Godunov, sont présentés dans le paragraphe 5.3.4.

Avant de passer au problème de Riemann, on peut préciser la forme du schéma une fois l'intégration en temps effectuée. Considérons la méthode d'Euler d'ordre 1 (le lecteur est renvoyé au paragraphe 5.5 pour plus de détails sur les méthodes d'intégration temporelle). Un des aspects importants est de supposer qu'il existe une variation de temps suffisamment petite, nommée pas de temps (noté $\triangle t$), pour que le flux puisse être considéré comme constant durant l'intégration. Ceci est justifié pour un système hyperbolique car les informations se propagent à vitesse finie. On obtient :

$$U_k^{n+1} = U_k^n - \frac{\triangle t}{|C_k|} \sum_a |C_{k,a}| F(U_k^n, U_a^n, n_{k/a})$$

5.3 Résolution du problème de Riemann

Un problème de Riemann est simplement un problème pour lequel on se donne une équation, ou un système d'équations, ainsi qu'une condition initiale constante par morceaux comprenant une discontinuité (*i.e.* deux morceaux). Ce problème joue un rôle central dans la compréhension des équations et notamment de leur structure. D'un côté plus pratique, la résolution d'un problème de Riemann est essentiel pour l'utilisation de la méthode des volumes finis qui est employée dans cette thèse. Cette section montre comment résoudre un tel problème du cas simple d'une équation hyperbolique linéaire, au cas plus technique d'un système non linéaire hyperbolique.



(a) Diagramme (x, t) illustrant les ondes caractéristiques.

(b) Problème de Riemann.

FIGURE 5.2 – Problème de Riemann et ondes caractéristiques.

5.3.1 Equation scalaire

Soit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

La variable u est définie comme $u = u(x, t)$ et a est une constante. En exprimant la différentielle totale de u on a :

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = 0 \tag{5.3.1}$$

Le long de la caractéristique $x_t = a$, u est une constante, d'où en posant $u(x,0) = u_0(x)$:

$$u(x,t) = u_0(x - at) \tag{5.3.2}$$

Considérons une condition initiale discontinue. Ce cas est nommé problème de Riemann :

$$u_t + au_x = 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_L & \text{si x<0} \\ u_R & \text{si x>0} \end{cases}$$

La solution de ce problème découle de (5.3.2) :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{si x - at <0} \\ u_R & \text{si x - at >0} \end{cases}$$

La solution de cette équation est simple et parfaitement déterminée. Toute solution initiale sera transportée à la vitesse a. On va voir que, dans le cas d'équations plus délicates, les caractéristiques peuvent se croiser et former des solutions plus complexes, telles que les ondes de choc ou de détente. Avant de passer à ces cas non linéaires, passons au cas des systèmes linéaires.

5.3.2 Système linéaire

Il existe de nombreux systèmes d'équations linéaires capables de modéliser des phénomènes physiques. Un des exemples le plus simple (*cf.* par exemple [157]) est l'équation des ondes (pouvant modéliser par exemple la vibration d'une corde) :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

En utilisant le changement de variables $w = -u_t$ et $v = cu_x$, cette équation est équivalente au système linéaire suivant :

$$v_t + cw_x = 0$$
$$w_t + cv_x = 0$$

En mécanique des fluides beaucoup de phénomènes sont généralement non linéaires mais évidemment, dans une certaine mesure, ils peuvent être modélisés par des systèmes d'équations linéaires comme par exemple les équations d'Euler linéaires.

Mais revenons à un cadre plus général, soit le système suivant :

$$U_t + AU_x = 0 \tag{5.3.3}$$

U est défini comme un vecteur de taille n et A comme une matrice constante de taille $n * n$. On suppose A diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec $D = Id(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $K_i = (K_{i,1}, K_{i,2}, ...; K_{i,n})$ le vecteur propre à droite associé à la valeur propre λ_i (*i.e.* $AK_{(i)} = \lambda_i K_{(i)}$), $P = (K_{\lambda_1}, K_{\lambda_2}, ...)$ la matrice de passage composée des vecteurs propres et P^{-1} son inverse. On suppose de plus que le système étudié est hyperbolique, ou autrement dit, que les valeur propres de A sont réelles (si elles sont de plus indépendante, on parle d'hyperbolicité stricte).

On remplace A par PDP^{-1}, on multiplie à gauche (5.3.3) par P^{-1} et on pose $W = P^{-1}U$ on obtient :

$$W_t + DW_x = 0 \tag{5.3.4}$$

La solution est similaire au cas scalaire : $w_i(x,t) = w_{i0}(x - \lambda_i t)$. Un retour au système initial est obtenu par transformation inverse ($U = PW$) d'où :

$$U_j(x,t) = \sum_{i=1}^{n} w_{i0}(x - \lambda_i t) K_{i,j} \tag{5.3.5}$$

Le problème de Riemann est donc résolu pour un système linéaire de taille quelconque.

Remarque 11. *Comme chaque λ_i est constant et indépendant, on peut écrire :*

$$w_{i0}(x-\lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i & si\ x-\lambda_i t < 0 \\ \beta_i & si\ x-\lambda_i t > 0 \end{cases}$$

Exemple pour un système de taille $n = 2$: soit un point P situé dans la zone "W^*". L'état en P a été obtenu par la propagation de U_L via l'onde λ_2 et U_R via l'onde λ_1. Soit :

$$U(P(x,t)) = \alpha_2 K_2 + \beta_1 K_1$$

Dans le cas général, il existe un unique I tel que $\lambda_I < P(\frac{x}{t}) < \lambda_{I+1}$ avec $\forall i \geq I$: $x - \lambda_i t > 0$ tel que :

$$U(x,t) = \sum_{i=I+1}^{n} \alpha_i K_i + \sum_{i=1}^{I} \beta_i K_i$$

5.3.3 Systeme non linéaire

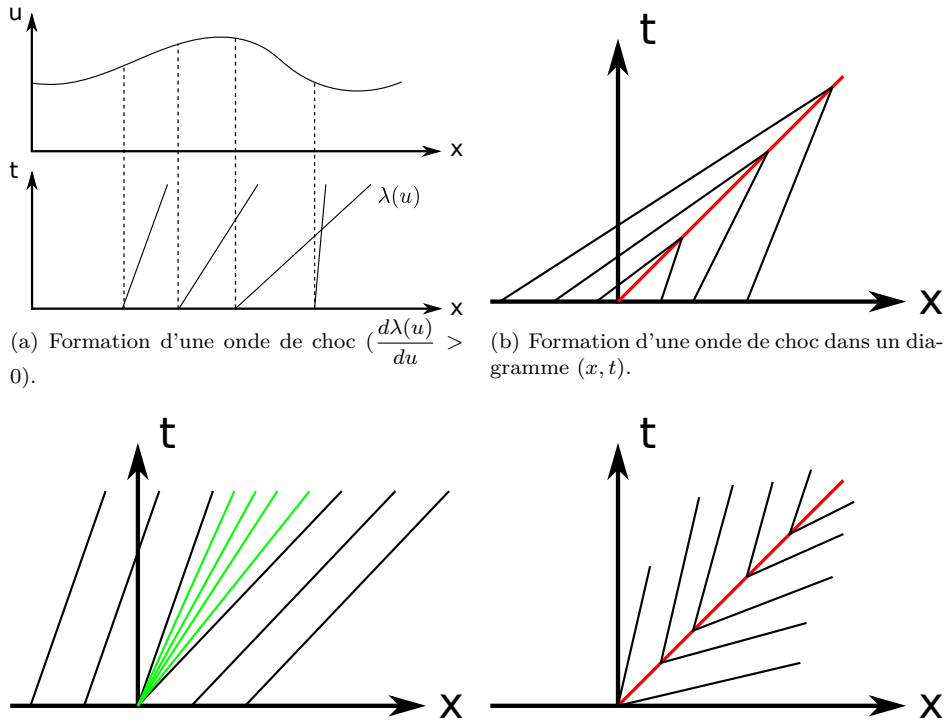
Les phénomènes physiques modélisables par des systèmes hyperboliques non linéaires sont très nombreux. Par exemple, les équations d'Euler compressibles modélisent de manière remarquable un fluide parfait, que ce soit en condition relativement lisse ou lorsque des ondes de choc sont générées.

5.3.3.1 Cas général

Dans ce paragraphe, quelques notions générales sont abordées et les difficultés associées au cas non linéaires sont exposées et illustrées. Soit le système suivant :

$$W_t + A(W)W_x = 0$$

Comme dans le cas linéaire, on peut déterminer les vitesses caractéristiques associées à ce système en déterminant les valeurs propres de A. La jacobienne dépend maintenant des variables de l'équation.



(a) Formation d'une onde de choc ($\frac{d\lambda(u)}{du} > 0$).

(b) Formation d'une onde de choc dans un diagramme (x, t).

(c) Formation d'une onde de détente dans un diagramme (x, t). La zone en vert correspond au faisceau de détente.

(d) Formation d'un choc de détente. Ce cas est physiquement non acceptable. Il viole la condition d'entropie ($\lambda_L < \lambda_R$). Les chocs physiques sont des chocs de compression. Dans ce type de configuraton des ondes, c'est un faisceau de détentes qui se forme comme illustré en figure 5.3(c).

FIGURE 5.3 – Solutions non linéaires.

Lorsqu'elle n'est compensée par aucun autre phénomène, une conséquence directe de la non linéarité est la formation d'ondes de choc et d'ondes de détente en temps fini. Pour illustrer cela, on suppose $\frac{d\lambda(u)}{du} > 0$. Pour une solution initiale relativement lisse comme illustrée en figure 5.3(a), la variation des vitesses caractéristiques fait que certaines caractéristiques vont rattraper leurs voisines. Lorsque les ondes se touchent, une onde de compression est formée comme illustrée en figure 5.3(b). Vu d'une autre manière, pour déterminer une solution en un point P, on remonte la courbe caractéristique qui a donné ce point. Mais un point siège de l'interaction de plusieurs ondes (par exemple simplement deux), rend à première vue impossible ce chemin car deux voies sont possibles. En fait la solution est une combinaison des deux voies qui est une onde de choc. Pour finir sur les ondes de choc, un autre cas est possible mathématiquement comme illustré en figure 5.3(d). Cependant ce cas est en fait physiquement inacceptable car il viole la condition d'entropie. Sans entrer dans les détails, les chocs qui ont un sens physique sont des chocs de compression et non de raréfaction. En plus de la condition entropique, les **relations de Rankine-Hugoniot** (RH) sont primordiales pour le calcul des sauts engendrés par la coalescence des ondes. En effet, à l'inverse du cas linéaire, comme les ondes intéragisssent entre elles, il faut des relations supplémentaires pour envisager la résolution du problème.

On a donc vu qu'il y a des zones de détente qui ne peuvent pas être définies par une coalescence. La transition est en fait plus douce. La solution dans cette zone se trouve grâce aux **invariants de Riemann** associés aux vitesses caractéristiques de "queue" et de "tête", comme illustré en figure 5.3(c). Il existe par conséquent une solution qui fait la transition entre les ondes limites délimitant le cone de détente. L'étude

de l'équation de Burgers (une équation non linéaire simple : $u_t + uu_x = 0$) est intéressante pour illustrer cela. Supposons une solution auto semblable $u = V(\frac{x}{t})$. On a alors :

$$u_t + uu_x = \frac{1}{t}(-\frac{x}{t} + V)V'$$

Les deux solutions possibles sont $V = cste$ ou $V = \frac{x}{t}$. Ce dernier type de solution permet de recoller un cone de raréfaction.

D'une manière générale, l'étude du type de champ caractéristique et de la condition d'entropie permet de déterminer quelle type de solution apparaîtra dans un problème de Riemann. Ajouter à cela les relations de passage de Rankine-Hugoniot dans le cas discontinu et les invariants de Riemann dans le cas continu, le problème de Riemann peut être résolu. Les relations de saut de Rankine-Hugoniot sont données par $\mathbf{F(U_R) - F(U_L) = \sigma(U_R - U_L)}$ tandis que les invariants de Riemann par $\frac{\mathbf{dw_1}}{\mathbf{k^1_i}} = \frac{\mathbf{dw_2}}{\mathbf{k^2_i}} = ... = \frac{\mathbf{dw_n}}{\mathbf{k^n_i}}$ avec U_L, U_R, $F(U)$, σ, w_j et k_i^j respectivement les variables conservatives à gauche et à droite d'une discontinuité, les flux, la vitesse de la discontinuité, les composantes des variables primitives et des vecteurs propres à droite. L'indice j correspond à la $j^{ème}$ composante d'un vecteur et i précise le numéro de la valeur propre associée.

Avant de récapituler les relations nécessaires à la résolution ainsi que les conditions donnant les trois types d'ondes possibles, on rappelle les propriétés des différents types de champs caractéristiques. Lorsque $\nabla\lambda_i(W).K_i(W) = 0$, le champ caractéristique associé à λ_i est Linéairement Dégénéré (noté par la suite LD), tandis que pour $\nabla\lambda_i(W).K_i(W) \neq 0$ le champs caractéristique est Vraiment Non Linéaire (VNL) ; avec $\nabla\lambda_i(W) = (\frac{\partial\lambda_1}{\partial u_1}, \frac{\partial\lambda_2}{\partial u_2}, ...)$.

<u>Onde de choc :</u>

- ⊗ Champ caractéristique VNL
- ⊗ Relations de Rankine-Hugoniot
- ⊗ Condition d'entropie ($\lambda_i(U_L) > \sigma_i > \lambda_i(U_R)$)

<u>Onde de détente :</u>

- ⊗ Champ caractéristique VNL
- ⊗ Invariants de Riemann
- ⊗ Divergence des vitesses caractéristiques ($\lambda_i(U_L) < \lambda_i(U_R)$)

<u>Onde de contact :</u>

- ⊗ Champ caractéristique LD
- ⊗ Relations de Rankine-Hugoniot
- ⊗ Invariants de Riemann
- ⊗ Condition d'entropie ($\lambda_i(U_L) = S_i = \lambda_i(U_R)$)

5.3.3.2 Application au système de Saint-Venant

Soit le système de Saint-Venant en 1D sur bathymétrie constante (*cf.* chapitre 2 pour la dérivation) :

$$U_t + \big(F(U)\big)_x = 0 \tag{5.3.6}$$

$$\text{avec } U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \text{ et } F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\dfrac{h^2}{2} \end{pmatrix} . \tag{5.3.7}$$

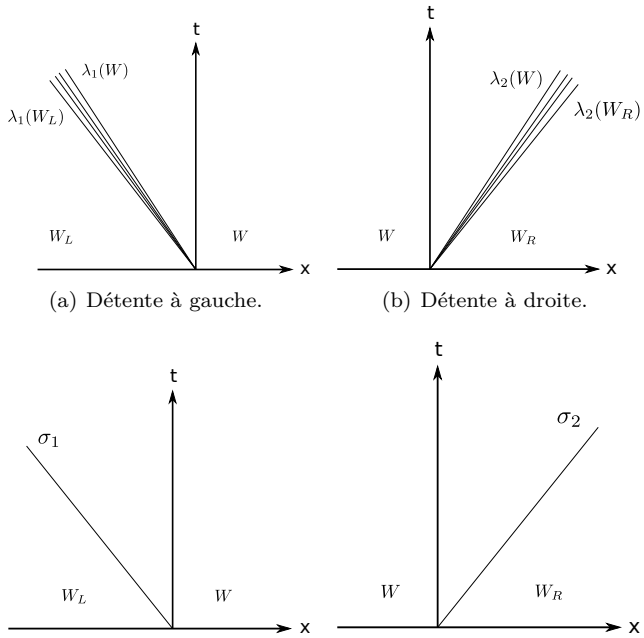
Pour attaquer la résolution d'un problème de Riemann, il faut disposer entre autres des relations de passage entre les ondes du système : les invariants de Riemann et les relations de saut de Rankine-Hugoniot. Dans le cas de solutions continues, une forme primitive des équations peut être adoptée sans perte de généralité. L'intérêt de ce changement de forme est de simplifier les calculs. Après manipulation de (5.3.6) la forme quasi linéaire est obtenue :

$$W_t + A(W)W_x = 0$$
$$\text{avec } W = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} \text{ et } A(W) = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = u - c$ et $\lambda_2 = u + c$ avec $c = \sqrt{gh}$ et $\lambda_1 < \lambda_2$ choisi par convention. Le calcul des vecteurs propres à droite donne $K_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}$ et $K_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{g} \end{pmatrix}$. Les invariants de Riemann pour le système de Saint-Venant sont finalement :

$$u + 2\sqrt{gh} = cste \text{ pour } \lambda_1 = u - c$$
$$u - 2\sqrt{gh} = cste \text{ pour } \lambda_2 = u + c$$

Les différentes sous configurations possibles sont illustrées en figure 5.4 :



(a) Détente à gauche. (b) Détente à droite.

(c) Choc à gauche. (d) Choc à droite.

FIGURE 5.4 – Sous problèmes de Riemann

Étude des détentes :

⊗ Détente à gauche

Ce cas est illustré sur la figure 5.4(a). Les invariants de Riemann sont conservés dans une détente :

$$\begin{aligned} & I_1(W_L) = I_1(W) \\ \Longleftrightarrow & u_L + 2\sqrt{gh_L} = u + 2\sqrt{gh} \\ \Longleftrightarrow & u = u_L - (h - h_L)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h}} \end{aligned}$$

D'autre part, la condition de divergence des caractéristiques est nécessaire :

$$\begin{aligned} & \lambda_1(W_L) < \lambda_1(W) \\ \Longleftrightarrow & u_L - \sqrt{gh_L} < u - \sqrt{gh} \\ \Longleftrightarrow & h < h_L \end{aligned}$$

La solution dans la détente est $\frac{x}{t} = u - c$. On remplace u pour trouver h et c pour trouver u d'où :

$$h = \frac{1}{9g}(u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \tag{5.3.8}$$

$$u = \frac{1}{3}(u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t}) \tag{5.3.9}$$

⊗ Détente à droite

Ce cas est illustré sur la figure 5.4(b). De la même manière que pour la détente à gauche, on obtient $u = u_R - (h - h_R)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h}}$ et $h < h_R$ et par conséquent :

$$h = \frac{1}{9g}(u_R + 2\sqrt{gh_R} - \frac{x}{t})^2 \tag{5.3.10}$$

$$u = \frac{1}{3}(u_R + 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t}) \tag{5.3.11}$$

Étude des chocs :

⊗ Choc à gauche

Ce cas est illustré sur la figure 5.4(c). Le saut au niveau du choc vérifie les relations de Rankine-Hugoniot ($F(U_L) - F(U) = \sigma_i(U_L - U)$) :

$$h_L u_L - hu = \sigma_1(h_L - h) \tag{5.3.12}$$

$$h_L {u_L}^2 + \frac{g}{2}{h_L}^2 - hu^2 + \frac{g}{2}h^2 = \sigma_1(h_L u_L - hu) \tag{5.3.13}$$

La condition d'entropie $\lambda_1(W_L) > \sigma_1 > \lambda_1(W)$ donne :

$$u_L - \sigma_1 > \sqrt{gh_L} \tag{5.3.14}$$

$$u - \sigma_1 < \sqrt{gh} \tag{5.3.15}$$

On pose $j = h(u - \sigma_1)$ et on applique les conditions (5.3.14) et (5.3.15). Après calcul, on montre que $j > 0$, $h > h_L$ et $u < u_L$. *In fine*, on veut $u = u_L + f(h)$. On manipule (5.3.12) et (5.3.13) d'où :

$$\sigma_1 = \frac{h_L u_L - hu}{h_L - h} \tag{5.3.16}$$

$$\sigma_1 = \frac{h_L {u_L}^2 + \frac{g}{2}{h_L}^2 - hu^2 + \frac{g}{2}h^2}{h_L u_L - hu} \tag{5.3.17}$$

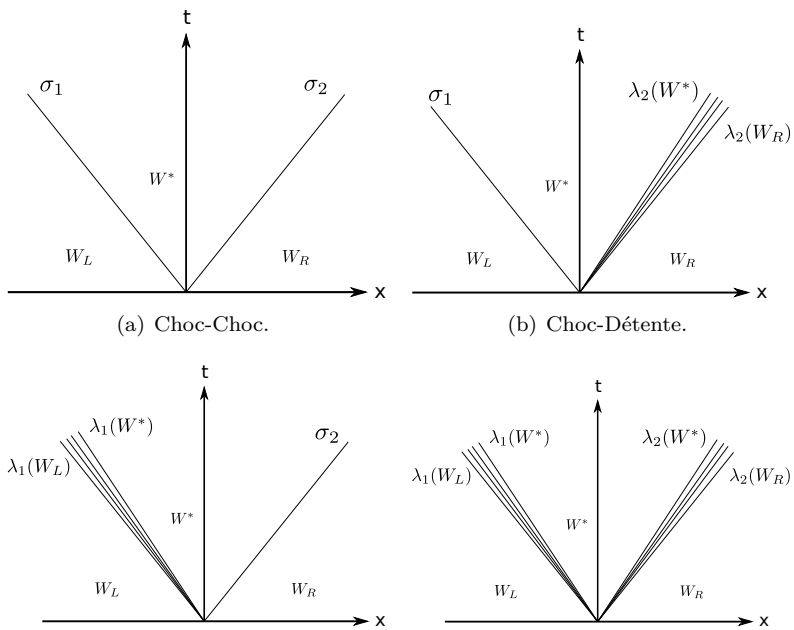
En égalant (5.3.16) et (5.3.17), on obtient après calcul $u = u_L \pm (h_L - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h+h_L}{hh_L}}$. Les conditions de validité trouvées précédemment $u < u_L$ et $h > h_L$ permettent de sélectionner la solution positive d'où :

$$u = u_L + (h_L - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h+h_L}{hh_L}} \tag{5.3.18}$$

⊗ Choc à droite
Ce cas est illustré sur la figure 5.4(d). De la même manière que pour le choc à gauche, on obtient les conditions $j < 0$, $h_R < h$, $u > u_R$ et les solutions $u = u_R \pm (h_R - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h+h_R}{hh_R}}$. La solution valide est donc :

$$u = u_R - (h_R - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h+h_R}{hh_R}} \tag{5.3.19}$$

Cas général :
La solution globale du problème de Riemann est une combinaison des cas particuliers précédents. Quatre configurations sont possibles comme détaillées ci-dessous et illustrées en figure 5.5.



(a) Choc-Choc. (b) Choc-Détente.

(c) Détente-Choc. (d) Détente-Détente.

FIGURE 5.5 – Problèmes de Riemann

⊗ Configuration Choc-Choc :
Ce cas est illustré sur la figure 5.5(a).
Compte tenu des relations de passage déterminées précédemment pour un choc à gauche et pour un choc à droite : si $h^* > h_L$ et $h^* > h_R$ alors (h^*, u^*) sont solutions de :

$$u^* = u_L + (h_L - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h+h_L}{hh_L}} \text{ (choc à gauche)}$$

$$u^* = u_R - (h_R - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h+h_R}{hh_R}} \text{ (choc à droite)}$$

La solution globale est :

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < \lambda_1 t \\ W_* & \text{si } \lambda_1 t < x < \lambda_2 t \\ W_R & \text{si } x > \lambda_2 t \end{cases}$$

⊗ Configuration Choc-Détente :
Ce cas est illustré sur la figure 5.5(b).
Compte tenu des relations de passage déterminées précédemment pour un choc à gauche et pour une détente à droite : si $h^* > h_L$ et $h^* < h_R$ alors (h^*, u^*) sont solutions de :

$$u^* = u_L + (h_L - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h + h_L}{hh_L}} \text{ (choc à gauche)}$$
$$u^* = u_R - (h - h_R)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h}} \text{ (détente à droite)}$$

La solution globale est :

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < \lambda_1 t \\ W_* & \text{si } \lambda_1 t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t \\ W_{2-det} & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < \lambda_2 t \\ W_R & \text{si } x > \lambda_2 t \end{cases}$$

⊗ Configuration Détente-Choc :
Ce cas est illustré sur la figure 5.5(c).
Compte tenu des relations de passage déterminées précédemment pour une détente à gauche et pour un choc à droite : si $h^* < h_L$ et $h^* > h_R$ alors (h^*, u^*) sont solutions de :

$$u^* = u_L - (h - h_L)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h}} \text{ (détente à gauche)}$$
$$u^* = u_R - (h_R - h)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{h + h_R}{hh_R}} \text{ (choc à droite)}$$

La solution globale est :

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L & \text{if } x < \lambda_1 t \\ W_{2-det} & \text{if } \lambda_1 t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t \\ W_* & \text{if } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < \lambda_2 t \\ W_R & \text{if } x > \lambda_2 t \end{cases}$$

⊗ Configuration Détente-Détente :
Ce cas est illustré sur la figure 5.5(d).
Compte tenu des relations de passage déterminées précédemment pour une détente à gauche et pour une détente à droite : si $h^* < h_L$ et $h^* > h_R$ alors (h^*, u^*) sont solutions de :

$$u^* = u_L - (h - h_L)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h}} \text{ (détente à gauche)}$$
$$u^* = u_R - (h - h_R)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h}} \text{ (détente à droite)}$$

La solution globale est :

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < \lambda_1 t \\ W_{1-det} & \text{si } \lambda_1 t < x < (u^* - \sqrt{gh^*})t \\ W_* & \text{si } (u^* - \sqrt{gh^*})t < x < (u^* + \sqrt{gh^*})t \\ W_{2-det} & \text{si } (u^* + \sqrt{gh^*})t < x < \lambda_2 t \\ W_R & \text{si } x > \lambda_2 t \end{cases}$$

⊗ Traitement général :

Dans tous les cas, pour trouver dans quelle configuration se placer, il faut résoudre la condition de compatibilité sur u^* :

$$u_R + (h^* - h_R)Z(h^*, h_R) = u_L - (h^* - h_L)Z(h^*, h_L) \tag{5.3.20}$$

$$\text{avec } Z(h,\Psi) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h} + \sqrt{\Psi}} & \text{si } h \leqslant \Psi \\ \sqrt{\dfrac{g}{2}\dfrac{h+\Psi}{h\Psi}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.3.21}$$

Cette équation non-linéaire peut-être résolue, par exemple, par la méthode de Newton (voir l'algorithme 1). On pose $f(h)$ la fonction définie par (5.3.20) telle que $f(h^*) = 0$. Le développement de Taylor au premier ordre de cette fonction donne $f(h) \approx f(h_0) + (h - h_0)\dfrac{df(h_0)}{dh}$. Pour $f(h) \approx 0$ on peut estimer h^* et en itérant on approche rapidement la solution.

Algorithme 1 Recherche de la solution du problème de Riemann

initialisation : $h^* = \dfrac{h_L + h_R}{2}$ and $h^*_{old} = \epsilon$
while $(h^* - h^*_{old}) > \epsilon$ **do**
  $h^*_{old} = h^*$
  compute $\dfrac{df(h^*_{old})}{dh}$
  compute $h^* = h^*_{old} - \dfrac{f(h^*_{old})}{\frac{df(h^*_{old})}{dh}}$
end while
compute u^* avec la formule adéquate suivant le cas.

5.3.3.3 Traitement du vide

Suivant les modèles résolus, la notion de "vide" peut intervenir dans la résolution du problème de Riemann. En restant dans le cas du modèle de SV, cela se traduit par une cellule avec du fluide, voisine d'une cellule sans fluide (*i.e.* de hauteur d'eau nulle). Une méthode utilisée pour évaluer les flux sur une telle interface est d'introduire une hauteur négligeable dans toute les zones physiquement sèches. Ce traitement peut cependant entraîner des difficultés dans des conditions raides, notamment en ce qui concerne le maintien d'une hauteur d'eau positive. Un certain nombre de valeurs seuils sont alors introduites pour éviter ce type de problème, mais doivent être bien calibrées, notamment en fonction de la finesse du maillage. D'autre part ce type d'approximation altère la solution trouvée en changeant le problème. La solution trouvée est une combinaison entre un très faible choc et une détente au lieu d'une détente pure. Bien calibrée, cette méthode approchée peut cependant donner de bon résultats. Le lecteur peut se référer à Toro [220] pour plus de détails sur ce point.

Lorsque le problème de Riemann est résolu de manière exacte, on peut traiter ce cas avec rigueur comme détaillé ci-dessous. Dans le cas des équations d'Euler, le lecteur peut se reporter à Toro [221]. En restant au cas du modèle de SV, considérons le cas d'un vide à droite.

Mais que peut-il se passer entre une zone humide et une zone sèche ? En supposant qu'une onde de choc sépare ces deux états, notés par commodité (h_L, u_L) et (h_R, u_R), les relations de RH donnent :

$$\begin{aligned}
&h_L u_L - h_R u_R = \lambda_1 (h_L - h_R) \\
&h_L {u_L}^2 + \frac{g}{2} {h_L}^2 - h_R {u_R}^2 + \frac{g}{2} {h_R}^2 = \lambda_1 (h_L u_L - h_R u_R)
\end{aligned}$$

Comme $h_R = 0$, la première équation donne $\sigma = u_L$. En injectant cette vitesse de choc dans la seconde équation, on obtient $h_L = 0$. Ce résultat absurde permet d'exclure une onde de choc à gauche.

En supposant une détente, les IR donnent :

$$\begin{aligned}
&u_L + 2\sqrt{gh_L} = u_R + 2\sqrt{gh_R} \\
\Longleftrightarrow &u_R = u_L + 2\sqrt{gh_L}
\end{aligned}$$

Ceci correspond à la vitesse de l'interface entre une zone humide (qui correspond dans le problème complet à la zone W^*) et une zone sèche. Ceci est assimilable à une onde de contact. Il reste à relier l'état W^* à l'état W_L. Les invariants de Riemann entre l'onde $\lambda_1(W_L)$ et l'onde de contact ferme le problème. La solution obtenue est :

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < \lambda_1 t \\ W_{1-det} & \text{si } \lambda_1 t < x < (u_L + 2\sqrt{gh_L})t \\ W_R = (0,0) & \text{si } x > (u_L + 2\sqrt{gh_L})t \end{cases}$$

Il est intéressant de noter qu'aucune onde du type $u + c$ n'est présente dans la solution. Ce résultat est plein de sens car cette famille d'onde ne peut s'appuyer sur aucun support matériel [4] et ne peut donc pas exister. Notons aussi que la vitesse d'interface sec/mouillé trouvée est plus élevée que les valeurs propres du système. En toute rigueur, il faut considérer cela dans la condition CFL.

Remarque 12. *Les autres cas possibles sont : du vide à gauche ou la génération de vide au centre (i.e. condition initiale sans vide générant du vide). Le cas de vide à gauche est identique au cas traité précédemment en inversant les deux états. Pour le cas de vide au centre il faut combiner le cas de vide à droite avec le cas de vide à gauche. Une condition sur cette double détente entraînant l'apparition du vide est alors trouvée. Le cas de vide à gauche donne :*

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L = (0,0) & si\ x < (u_R - 2\sqrt{gh_R})t \\ W_{1-det} & si\ (u_R - 2\sqrt{gh_R})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t \\ W_R & si\ x > (u_R + \sqrt{gh_R})t \end{cases}$$

Le cas de vide au centre existe si $u_R - u_L > 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R})$ *et donne :*

$$W(x,t) = \begin{cases} W_L & si\ x < (u_L - \sqrt{gh_L})t \\ W_{1-det} & si\ (u_L - \sqrt{gh_L})t < x < (u_L + 2\sqrt{gh_L})t \\ (0,0) & si\ (u_L + 2\sqrt{gh_L})t < x < (u_R - 2\sqrt{gh_R})t \\ W_{2-det} & si\ (u_R - 2\sqrt{gh_R})t < x < (u_R + \sqrt{gh_R})t \\ W_R & si\ x > (u_R + \sqrt{gh_R})t \end{cases}$$

Remarque 13. *Pour revenir un instant sur les méthodes approchées, une méthode a été proposée par Fraccarollo et Toro [70] pour le solveur approché HLL. Connaissant les vitesses d'ondes à gauche* S_L *et à droite* S_R*, ce solveur donne l'expression de l'état* W^* *(cf. le détail en Section 5.3.4). L'idée est de remplacer l'estimation classique des vitesses d'ondes par l'expression exacte trouvée précédemment côté vide, ce qui donne par exemple pour un état sec à droite :*

$$S_R = \begin{cases} u_L + 2c_L & si\ h_R = 0 \\ estimation\ classique & si\ h_R > 0 \end{cases}$$

4. Si on étudiait des ondes électromagnétiques, ce raisonnement ne tiendrait pas car la nature onde-corpuscule de ces phénomènes fait qu'aucun support n'est nécessaire à la propagation.

5.3.4 Solveurs approchés : Lax-Friedrichs, Rusanov, HLL et HLLC

Comme évoqué dans la Section VF, la résolution exacte du problème de Riemann est parfois très compliquée et coûteuse. Dans ce cas, on a recours à des solveurs approchés plus ou moins élaborés suivant les besoins.

Un des solveurs approchés les plus simples, mais aussi particulièrement diffusif, est celui de Lax-Friedrichs :

$$F(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - \frac{\triangle x}{2\triangle t}(U_D - U_G) \tag{5.3.22}$$

Un schéma légèrement moins diffusif, et quasiment aussi simple, est celui de Rusanov. Soit S_D et S_G les vitesses caractéristiques à droite et à gauche. La partie diffusive est contrôlée plus localement avec $\lambda = max(|S_G|, |S_D|)$ que le schéma de Lax-Friedrichs :

$$F(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - \frac{\lambda(U_G, U_D)}{2}(U_D - U_G) \tag{5.3.23}$$

Un solveur plus élaboré est celui de Harten, Lax et Van Leer (appelé HLL) :

$$F(U_G, U_D) = \frac{S_D F_G - S_G F_D + S_G S_D (U_D - U_G)}{S_D - S_G} \tag{5.3.24}$$

Dans tous ces cas évidemment :

$$F^*(U_G, U_D) = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_G \\ F(U_G, U_D) & \text{si } S_G \leq 0 \leq S_D \\ F_R & \text{si } S_D \geq 0 \end{cases} \tag{5.3.25}$$

Tous ces solveurs ne considèrent pas d'onde de contact. Cela induit une forte diffusion au niveau de ces ondes pouvant être préjudiciable dans le cas d'écoulement diphasique par exemple où une interface trop diffusée pourra induire une perte de précision importante. Toro et al. [222] ont amélioré le schéma HLL en prenant en compte ces ondes. Ce solveur se nomme HLLC et s'écrit dans le cas des équations d'Euler isentropique (les variables conservatives sont $U = (\rho, \rho u)$), $K = \{G, D\}$:

$$F_K^* = F_K + S_K(U_K^* - U_K) \text{ avec } U_K^* = \rho_K \frac{S_K - u_K}{S_K - S^*} \begin{pmatrix} 1 \\ S^* \end{pmatrix} \tag{5.3.26}$$

$$F^*(U_G, U_D) = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_G \\ F_G^* & \text{si } S_G \leq 0 \leq S^* \\ F_D^* & \text{si } S^* \leq 0 \leq S_D \\ F_R & \text{si } S_D \geq 0 \end{cases} \tag{5.3.27}$$

Les vitesses d'ondes sont estimées en suivant Davis [50] :

$$S_G = min(\lambda_{1-G}, \lambda_{1-D}) \tag{5.3.28}$$

$$S_D = max(\lambda_{2-G}, \lambda_{2-D}) \tag{5.3.29}$$

Soit pour les équations d'Euler : $S_G = min(u_G - c_G, u_D - c_D)$ et $S_D = max(u_G + c_G, u_D + c_D)$. Une estimation de l'onde de contact est évidemment nécessaire. Cette onde se déplace à la vitesse du fluide (la pression et la vitesse sont constantes à travers cette onde, en 1D $S^* = u^*$) et est estimée par :

$$S^* = \frac{P_D - P_G + \rho_G u_G (S_G - u_G) - \rho_D u_D (S_D - u_D)}{\rho_G (S_G - u_G) - \rho_D (S_D - u_D)} \tag{5.3.30}$$

5.4 Stabilité

La stabilité d'une méthode numérique dépend de l'évolution de la solution discrète. Une méthode est stable si la solution qu'elle implique d'un pas à un autre ne s'emballe pas. Pour être plus précis, il faut que l'erreur numérique, caractérisée par une certaine norme de la différence entre la solution discrète et la solution discrète exacte, reste bornée pour tout temps. Cette propriété est essentielle car elle est nécessaire à la convergence [5] d'une méthode numérique. L'approche de référence pour montrer qu'une méthode est stable au sens L_2 est celle de Von Neumann. Pour plus de détails sur les études de stabilité le lecteur est renvoyé à Hirsh [96]. L'idée est d'injecter des solutions perturbées et d'évaluer l'amplification de ces perturbations. En pratique, on emploie souvent cette méthode sur une équation plus simple que celle que l'on souhaite réellement résoudre, comme par exemple une simple équation d'advection. Ce cas simple donne déjà une bonne indication du comportement du schéma. Il est parfois possible d'aller plus loin comme illustré ci-dessous dans le cas d'un système : le modèle de SV. Le cas non linéaire mène hélas, comme souvent avec des raisonnements analytiques, à une impasse. On cherche donc une condition nécessaire et non suffisante à la stabilité d'un schéma pour la résolution du système de SV. Soient les équations de SV linéarisées :

$$h_t + u_0 h_x + h_0 u_x = 0 \tag{5.4.1}$$
$$u_t + u_0 u_x + g h_x = 0 \tag{5.4.2}$$

L'intégration en temps est effectuée avec la méthode d'Euler du 1er ordre. Pour simplifier les calculs, le schéma associé au calcul des flux est celui de Lax-Friedrichs : $F_{i+1/2} = \dfrac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \dfrac{\triangle x}{2\triangle t}(U_{i+1} - U_i)$. En appliquant cette discrétisation aux équations de SV on a :

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\big(h_0(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + u_0(h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) - \frac{\triangle x}{\triangle t}(h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n)\big) \tag{5.4.3}$$
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\big(u_0(h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) + g(h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) - \frac{\triangle x}{\triangle t}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\big) \tag{5.4.4}$$

Soit $I^2 = -1$, on pose :

$$h_i^n = h^n e^{iI\theta} \tag{5.4.5}$$
$$u_i^n = u^n e^{iI\theta} \tag{5.4.6}$$

D'où :

$$\begin{aligned} h^{n+1}e^{iI\theta} =& h^n e^{iI\theta} - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\big(h_0 u^n(e^{(i+1)I\theta} - e^{(i-1)I\theta}) + u_0 h^n(e^{(i+1)I\theta} - e^{(i-1)I\theta}) \\ &- \frac{\triangle x}{\triangle t} h^n(e^{(i+1)I\theta} - 2e^{iI\theta} + e^{(i-1)I\theta})\big) \end{aligned} \tag{5.4.7}$$
$$\begin{aligned} u^{n+1}e^{iI\theta} =& u^n e^{iI\theta} - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\big(u_0 h^n(e^{(i+1)I\theta} - e^{(i-1)I\theta}) + g h^n(e^{(i+1)I\theta} - e^{(i-1)I\theta}) \\ &- \frac{\triangle x}{\triangle t} u^n(e^{(i+1)I\theta} - 2e^{iI\theta} + e^{(i-1)I\theta})\big) \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Les "formules trigonométriques" d'Euler donne :

$$e^{(i+1)I\theta} - e^{(i-1)I\theta} = e^{iI\theta}(e^{I\theta} - e^{-I\theta}) = e^{iI\theta} 2I sin(\theta) \tag{5.4.9}$$
$$e^{(i+1)I\theta} - 2e^{iI\theta} + e^{(i-1)I\theta} = e^{iI\theta}(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2) = e^{iI\theta} 2(cos(\theta) - 1) \tag{5.4.10}$$

5. Une méthode est convergente lorsque la solution numérique tend vers la solution exacte, si la discrétisation en temps et en espace tend vers 0. Le théorème d'équivalence de Lax (voir par exemple [96]) dit qu'une méthode stable et consistante (*i.e.* lorsque les équations discrètes tendent vers les équations continues lorsque la discrétisation tend vers 0) est convergente.

En injectant cela dans le système précédent, on a sous forme matricielle :

$$W^{n+1} = AW^n$$
$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} cos(\theta) - u_0 I sin(\theta)\dfrac{\triangle t}{\triangle x} & -\dfrac{\triangle t}{\triangle x} h_0 I sin(\theta) \\ -\dfrac{\triangle t}{\triangle x} g I sin(\theta) & cos(\theta) - u_0 I sin(\theta)\dfrac{\triangle t}{\triangle x} \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} .$$

Il reste à prouver que la (ou plutôt une) norme de la matrice A reste inférieure à 1 (*i.e.* les modulations ne s'amplifient pas). On note $R(M)$ le rayon spectral d'une matrice M et M^* la matrice adjointe de M, respectivement définis par $R(M) = max_i|\lambda_i|$ et $M^* = \bar{M}^t$ (*i.e.* transposée de la conjuguée). La norme L_2 d'une matrice est caractérisée par (*cf.* par exemple Leveque [129]) :

$$||M||_2 = \sqrt{R(MM^*)} \tag{5.4.11}$$

Un peu d'algèbre donne pour M diagonalisable (*cf.* par exemple Hirsch [96] ou Leveque [129]) :

$$||M||_2 \geq \sqrt{R(M)} \tag{5.4.12}$$

Le calcul des valeurs propres de A sont $\lambda_{\substack{+\\-}} = cos(\theta) - I sin(\theta)\dfrac{\triangle t}{\triangle x}(u_0 \substack{+\\-} \sqrt{gh_0})$. Une condition nécessaire pour que la méthode soit stable est donc :

$$\text{avec } R(A) = \sqrt{cos^2(\theta) + sin^2(\theta)(\frac{\triangle t}{\triangle x})^2(u_0 + \sqrt{gh_0})^2} \tag{5.4.13}$$

$$R(A) \leq 1 \Longleftrightarrow \boxed{\triangle t \leq \frac{\triangle x}{u_0 + \sqrt{gh_0}}} \tag{5.4.14}$$

En pratique, on définit une condition CFL (Courant, Friedrichs, et Lewy) satisfaisant l'inégalité précédente. Soit dans le cas présent, $\triangle t = CFL\dfrac{\triangle x}{u_0 + \sqrt{gh_0}}$ avec $CFL \leq 1$. En conclusion, la condition CFL précédente est nécessaire pour obtenir une résolution stable du système de SV linéaire avec le solveur de Lax-Friedrichs et un schéma du 1er ordre en temps. On pourrait montrer, de la même manière, que l'emploi d'une version implicite tend vers une stabilité inconditionnelle.

Remarque 14. *En se ramenant initialement à un système diagonal, on aurait pu arriver à ce résultat et même obtenir une condition suffisante.*

Remarque 15. *Ce résultat peut apparaître à première vue trop permissif. On a vu en effet précédemment qu'un des points importants de la méthode des volumes finis est de supposer qu'au cours d'un pas de temps $\triangle t$ les flux sont constants. Cela correspond physiquement au fait qu'aucune onde partant d'une interface (i.e. bord de maille) ne doit toucher une interface voisine en un pas de temps. En fait, si les ondes qui partent d'interfaces voisines n'interagissent pas (ou plutôt pas suffisamment pour changer fortement la vitesse de ces ondes résultantes), il est clair que la condition CFL précédemment déterminée est pleine de sens. Mais a priori rien ne l'assure. Une manière d'éviter ce problème est de diviser la condition CFL précédente par deux. On parle parfois de condition CFL 1/2 (le lecteur est renvoyé par exemple à Bouchut [30] pour plus de détails sur ce point). Notons cependant qu'en pratique les choses se passent souvent bien, ce qui permet de conserver la condition de stabilité précédente 5.4.14, qui est moins restrictive.*

On rappelle que la stabilité L_2 d'une méthode ne garantit en rien qu'il n'y aura pas d'oscillations (numériques) dans la solution, mais simplement, qu'en raffinant la discrétisation les éventuelles oscillations diminueront. Une méthode qui ne crée pas d'oscillations numériques est dite monotone (*i.e.* pas de production de nouveaux extremums et pas d'amplification des extremums existants, *cf.* Harten [94]). On parle alors de stabilité L_∞. On peut montrer, pour une équation d'advection, qu'un schéma up-wind du 1er ordre est

monotone. Cependant, il est souvent compliqué de formuler cette propriété dans un cadre plus général. On fait donc généralement appel à une sous condition de la monotonie, nommée propriété TVD (Total Variation Diminishing). Il est possible de démontrer que (voir par exemple Leveque [126]) :

$$\text{monotone} \Longrightarrow \text{TVD} \Longrightarrow \text{préservation de monotonie}$$

On définit un schéma TVD : soit une fonction discrète par morceaux $\{..., u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, ...\}$ au temps t^n notée u^n. La variation totale est :

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \tag{5.4.15}$$

Le schéma est TVD si :

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \tag{5.4.16}$$

Jusque là les choses restent encore difficiles à parfaitement formuler mais Harten a démontré un théorème d'une grande utilité (à la base de la plupart des montées en ordre en espace, *cf.* paragraphe 5.6) :

Théorème 1. *Harten (1983) [94] :*

Soit le schéma $u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) + D(u_{i+1}^n - u_i^n)$
Avec $C = C(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$ *et* $D = D(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n)$
Si pour tout i *:* $C \geq 0, D \geq 0$ *et* $C + D \leq 1$ *alors le schéma est TVD.*

On peut illustrer que le schéma de Lax-Friedrichs appliqué à l'équation d'advection $u_t + au_x = 0$, $a \in \mathbb{R}_*^+$, est TVD sous condition CFL. L'application de ce schéma donne :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\big((a - \frac{\triangle x}{\triangle t})(u_{i+1}^n - u_i^n) - (-a - \frac{\triangle x}{\triangle t})(u_i^n - u_{i-1}^n)\big) \tag{5.4.17}$$

Par identification $C = \frac{\triangle t}{2\triangle x}(a + \frac{\triangle x}{\triangle t}) = a\frac{\triangle t}{2\triangle x} + \frac{1}{2}$ et $D = \frac{\triangle t}{2\triangle x}(-a + \frac{\triangle x}{\triangle t}) = -a\frac{\triangle t}{2\triangle x} + \frac{1}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned} &C + D = 1 \\ &C \geq 0 \Longleftrightarrow \triangle t \geq \frac{-\triangle x}{a} \\ &D \geq 0 \Longleftrightarrow \triangle t \leq \frac{\triangle x}{a} \end{aligned}$$

Le schéma est donc TVD si $\triangle t = CFL\frac{\triangle x}{a}$, $-1 \leq CFL \leq 1$ (il va de soit que $CFL > 0$ pour avancer dans le temps).

La propriété TVD joue un rôle essentiel dans la montée en ordre des schémas comme nous le verrons dans les paragraphes 5.5.1 et 5.6.

5.5 Intégration en temps et montée en ordre temporel

5.5.1 Méthode explicite

On présente la méthode d'Euler (forward Euler method) (voir par exemple Toro [221]) pour l'EDO (équation aux dérivées ordinaires) $U_t = S$. Cette méthode explicite s'écrit :

$$U^{n+1} = U^n + \triangle t S(U^n) \tag{5.5.1}$$

Dans le cas d'EDP résolues par la méthode des volumes finis, rien ne change comme on l'a vu précédemment. En effet S correspond dans ce cas à une différence de flux aux interfaces de la cellule discrétisée. Ces flux sont assumés constants lors de l'évolution en temps de la solution. Cette méthode est d'ordre 1 en temps et TVD.

Pour augmenter la précision en temps, la méthode de Runge–Kutta d'ordre 2 (voir par exemple [127]) s'écrit :

$$\tilde{U}^{n+\frac{1}{2}} = U^n + \frac{\triangle t}{2} S(U^n) \tag{5.5.2}$$

$$U^{n+1} = U^n + \triangle t S(\tilde{U}^{n+\frac{1}{2}}) \tag{5.5.3}$$

Comme le précise Leveque [127], il est difficile de prouver qu'une telle méthode est TVD. Par contre en assumant que la méthode d'ordre 1 est TVD, puis en appliquant la même méthode (TVD) à la première solution, la méthode résultante sera TVD. On préfère donc la méthode d'ordre 2 suivante (parfois nommée Runge-Kutta SSP pour strong stability-preserving) :

$$U^* = U^n + \triangle t S(U^n) \tag{5.5.4}$$

$$U^{**} = U^* + \triangle t S(U^*) \tag{5.5.5}$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}(U^n + U^{**}) \tag{5.5.6}$$

Remarque 16. *Notons que cette dernière méthode demande de stocker une valeur intermédiaire, tandis que la méthode "classique" peut être codée sans stockage par un jeu de soustraction et est donc moins coûteuse. Comme nous n'avons pas rencontré d'oscillations particulières avec la première méthode, cette dernière est considérée dans le code de calcul utilisé dans cette thèse. Une étude plus approfondie, numérique à défaut d'être théorique, de ce point serait intéressante pour conforter ce choix.*

5.5.2 Méthode implicite

Dans le cas implicite, le terme S est considéré à l'instant final soit :

$$U^{n+1} = U^n + \triangle t S(U^{n+1}) \tag{5.5.7}$$

Le détail des avantages et inconvénients d'une telle approche comparée à une méthode explicite est donnée dans un paragraphe dédié (5.10) avec notamment une comparaison numérique des deux approches pour la résolution de systèmes non linéaires. Notons simplement que les méthodes implicites sont inconditionnellement stables, à la différence des méthodes explicites. Cela permet d'outrepasser la condition CFL restrictive des schémas explicites basées sur les vitesses d'ondes (*cf.* le paragraphe 5.4 sur la stabilité des schéma). Cette forte stabilité a cependant un prix. Ces schémas impliquent des systèmes d'équations algébriques coûteux à résoudre à chaque pas de temps. Pour la montée en ordre des méthodes implicites, le lecteur est renvoyé par exemple à Harten [95].

Évidemment, la question du choix d'un schéma implicite se pose dans ce travail, notamment pour la partie traitant d'écoulements compressibles extrêmement contraints en temps d'intégration à faible Mach. Une discussion approfondie sur le choix de la "meilleure" approche est donnée au paragraphe 5.10. Dans la suite, un schéma d'intégration implicite en temps d'ordre 1 appliqué à un système non linéaire est présenté.

Du cas direct vers une méthode à faible coût mémoire :

Notons que ce paragraphe n'a pas pour vocation d'être exhaustif sur toutes les méthodes implicites (parfois très évoluées et complexes notamment pour des applications sur maillages non structurés), mais simplement de présenter les deux grandes lignes possibles. Soit le système suivant :

$$U_t + \big(F(U)\big)_x = 0 \tag{5.5.8}$$

Ce système est discrétisé par un schéma implicite d'ordre 1 :

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\triangle t}+\frac{F(U_{i+1/2}^{n+1})-F(U_{i-1/2}^{n+1})}{\triangle x}=0 \tag{5.5.9}$$

Les termes de flux sont linéarisés (on note $\triangle^n f_i = f_i^{n+1} - f_i^n$) :

$$\begin{aligned}
F(U_{i+1/2}^{n+1}) &= F(U_i^{n+1},U_{i+1}^{n+1}) \approx F(U_{i+1/2}^n)+\frac{\partial F(U_{i+1/2}^n)}{\partial U_i^n}\triangle^n U_i+\frac{\partial F(U_{i+1/2}^n)}{\partial U_{i+1}^n}\triangle^n U_{i+1}\\
F(U_{i-1/2}^{n+1}) &= F(U_i^{n+1},U_{i-1}^{n+1}) \approx F(U_{i-1/2}^n)+\frac{\partial F(U_{i-1/2}^n)}{\partial U_i^n}\triangle^n U_i+\frac{\partial F(U_{i-1/2}^n)}{\partial U_{i-1}^n}\triangle^n U_{i-1}
\end{aligned}$$

On obtient le système linéaire tridiagonal par bloc suivant :

$$\begin{aligned}
\Big(Id+\frac{\triangle t}{\triangle x}\frac{\partial F(U_{i+1/2}^n)}{\partial U_i^n}-\frac{\triangle t}{\triangle x}\frac{\partial F(U_{i-1/2}^n)}{\partial U_i^n}\Big)\triangle^n U_i = \frac{-\triangle t}{\triangle x}\Big(&F(U_{i+1/2}^n)-F(U_{i+1/2}^n)+\\
&\frac{\partial F(U_{i+1/2}^n)}{\partial U_{i+1}^n}\triangle^n U_{i+1}-\frac{\partial F(U_{i-1/2}^n)}{\partial U_{i-1}^n}\triangle^n U_{i-1}\Big)
\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

Les matrices jacobiennes ($\partial F/\partial U$) induisent un système particulièrement difficile à résoudre. Sans autres simplifications on parle de méthode de résolution "directe". Cette approche induit un coût mémoire très important, le lecteur est renvoyé par exemple à Klockzo [113] pour plus de détails.

Pour réduire la complexité d'une telle résolution, il faut simplifier les jacobiennes. On présente dans la suite une simplification poussée (en suivant Luo et al. [138]), qui permet d'inverser le système aisément par des méthodes itératives simples. Le coût mémoire est alors fortement réduit ce qui peut devenir un avantage très important pour des maillages imposants, bien que ces simplifications réduisent la vitesse de convergence du schéma initial (il faudra plus itérer mais chaque itération sera moins coûteuse). On parle de méthode à forte efficacité intrinsèque (à ne pas confondre avec l'efficacité globale de la méthode). Le lecteur est encore renvoyé à Klockzo [113] qui compare en détail les "deux" approches. Un autre avantage de cette simplification poussée est que la parallélisation de la méthode devient plus aisée et plus performante. Le solveur de Riemann approché de Rusanov est considéré : $F_{i+1/2}=\dfrac{F(U_i)+F(U_{i+1})}{2}-\dfrac{\lambda^+}{2}(U_{i+1}-U_i)$. Les jacobiennes deviennent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(U_{i+1/2}^n)}{\partial U_{i+1}^n} &= \frac{\partial}{\partial U_{i+1}^n}\Big(\frac{1}{2}\big(F(U_i^n)+F(U_{i+1}^n)\big)-\frac{\lambda^+}{2}(U_{i+1}^n-U_i^n)\Big)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(U_{i+1}^n)}{\partial U_{i+1}^n}-\frac{\lambda^+}{2}\\
\frac{\partial F(U_{i-1/2}^n)}{\partial U_{i-1}^n} &= \frac{\partial}{\partial U_{i-1}^n}\Big(\frac{1}{2}\big(F(U_i^n)+F(U_{i-1}^n)\big)-\frac{\lambda^-}{2}(U_i^n-U_{i-1}^n)\Big)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(U_{i-1}^n)}{\partial U_{i-1}^n}+\frac{\lambda^-}{2}\\
\frac{\partial F(U_{i+1/2}^n)}{\partial U_i^n} &= \frac{\partial}{\partial U_i^n}\Big(\frac{1}{2}\big(F(U_i^n)+F(U_{i+1}^n)\big)-\frac{\lambda^+}{2}(U_{i+1}^n-U_i^n)\Big)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(U_i^n)}{\partial U_i^n}+\frac{\lambda^+}{2}\\
\frac{\partial F(U_{i-1/2}^n)}{\partial U_i^n} &= \frac{\partial}{\partial U_i^n}\Big(\frac{1}{2}\big(F(U_i^n)+F(U_{i-1}^n)\big)-\frac{\lambda^-}{2}(U_i^n-U_{i-1}^n)\Big)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(U_i^n)}{\partial U_i^n}-\frac{\lambda^-}{2}
\end{aligned}$$

Il reste à approcher les termes jacobiens $\dfrac{\partial F(U)}{\partial U}\triangle^n U$. Une méthode simple et indépendante de paramètres est :

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U}\triangle^n U \approx \triangle^n F \tag{5.5.11}$$

Remarque 17. *D'autres méthodes plus sophistiquées sont possibles, comme par exemple (avec ϵ un petit paramètre) :*

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U}\triangle^n U \approx \frac{F(U+\epsilon\triangle^n U)-F(U)}{\epsilon} \tag{5.5.12}$$

Le lecteur est renvoyé à Knoll et Keyes [114] pour plus de détails sur ce type d'approche plus élaborée.

On a finalement le système suivant :

$$D\triangle^n U_i = \frac{-\triangle t}{\triangle x}\Big(F(U^n_{i+1/2})-F(U^n_{i+1/2})+\triangle^n F(U_{i+1})-\triangle^n F(U_{i-1})-\frac{\lambda^+}{2}\triangle^n U_{i+1}+\frac{\lambda^-}{2}\triangle^n U_{i-1}\Big) \tag{5.5.13}$$

avec $D = Id + \frac{\triangle t}{2\triangle x}(\lambda^+ + \lambda^-)$. On peut noter que D est une matrice diagonale ce qui permet de construire une méthode itérative sans difficulté (aucune inversion de matrice n'est nécessaire). D'après Luo et al. [139] il est possible de considérer des flux non consistants entre la partie explicite (les deux premiers termes du membre de droite) et les autres membres (bien qu'ils aient été déterminés pour une expression de flux bien particulière, en l'occurrence ici par le solveur de Rusanov). Ceci permet d'utiliser un solveur plus précis sur la partie explicite qui détermine la précision de la solution.

A partir de là, une méthode particulièrement adaptée aux maillages non structurés et simple à paralléliser est celle du point fixe de Jacobi. L'idée est de relaxer tous les termes du membre de droite (hors flux explicites évidemment) :

$$D\triangle^{l+1} U_i = \frac{-\triangle t}{\triangle x}\Big(F(U^n_{i+1/2})-F(U^n_{i+1/2})+\triangle^l F(U_{i+1})-\triangle^l F(U_{i-1})-\frac{\lambda^+}{2}\triangle^l U_{i+1}+\frac{\lambda^-}{2}\triangle^l U_{i-1}\Big) \tag{5.5.14}$$

Algorithme 2 Méthode du point fixe de Jacobi

$l = 0$ and $\triangle^0 U = 0$
while *residu* > *accuracy* **do**
  compute $\triangle^{l+1} U_i = \frac{-\triangle t}{D\triangle x}\Big(F(U^n_{i+1/2})-F(U^n_{i+1/2})+\triangle^l F(U_{i+1})-\triangle^l F(U_{i-1})-\frac{\lambda^+}{2}\triangle^l U_{i+1}+\frac{\lambda^-}{2}\triangle^l U_{i-1}\Big)$
  $l = l + 1$
end while
$U_i^{n+1} = U_i^n + \triangle^{l+1} U_i$

Proposition d'une formulation à très faible coût pour maillage non structuré :
Que l'on pousse la simplification relativement loin ou non comme précédemment, on obtient *in fine* un système soit tridiagonal soit diagonal. Pour simplifier le raisonnement, si on regarde le système (5.5.13), la "difficulté" algorithmique est que pour mettre à jour une cellule i, il faut évaluer certains flux sur des cellules voisines (en 1D $i+1$ et $i-1$). Même si cela est évidemment faisable (c'est ce que font tous les codes VF avec schéma implicite sur maillages quelconques), ces évaluations demandent des boucles particulières. En effet, dans sa structure un code VF (avec schéma explicite) fonctionne *grosso modo* de la manière suivante :

Algorithme 3 Principe d'un code VF avec schéma explicite

On se donne U sur Ω
On calcule pour toutes les faces du maillages les flux associés F^*
On met à jour les cellules $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}(F(U^n_{i+1/2}) - F(U^n_{i+1/2})$

Il est clair que dans le cœur du code il suffit de deux boucles : une pour calculer les flux sur les faces et une pour mettre à jour les cellules. Pour un maillage non structuré il est très simple de raisonner sur les

faces du maillage car il n'est pas nécessaire de connaître la structure du maillage mais simplement les valeurs des variables à gauche et à droite de chaque face. A l'inverse, pour une cellule donnée, connaître toutes les variables des cellules voisines demande un stockage beaucoup plus important. D'autre part, cela demande des routines spécialement dédiées à ce type d'évaluation non communes aux codes à schéma explicite. Il semble donc intéressant dans le cas de schémas implicites de retrouver un formalisme qui colle à celui des schémas explicites.

Pour simplifier on se place dans le cas où le flux est basé sur le schéma de Rusanov global (*i.e.* $\lambda_i^+ = \lambda_i^- = \lambda^{max}$). Remarquons que :

$$F(U_{i+1/2}) - F(U_{i-1/2}) = \frac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \frac{\lambda^{max}}{2}(U_{i+1} - U_i) - \frac{F(U_i) + F(U_{i-1})}{2} + \frac{\lambda^{max}}{2}(U_i - U_{i-1}) \tag{5.5.15}$$

$$= \frac{F(U_{i-1}) + F(U_{i+1})}{2} - \frac{\lambda^{max}}{2}(U_{i+1} - U_{i-1}) + \lambda^{max} U_i \tag{5.5.16}$$

Par identification avec le système (5.5.13), on a (avec $D_1 = Id + \frac{\triangle t}{\triangle x}\lambda^{max}$) :

$$D_1 \triangle^n U_i = \frac{-\triangle t}{\triangle x}\Big(F(U^n_{i+1/2}) - F(U^n_{i+1/2}) + \triangle^n\big(F(U_{i+1/2}) - F(U_{i+1/2})\big) - \lambda^{max}\triangle^n U_i\Big) \tag{5.5.17}$$

Notons qu'en faisant passer le dernier terme du membre de droite dans la matrice D_1 et en appliquant la définition de $\triangle^n$, on retrouve un schéma explicite. Ceci veut dire qu'on aurait pu faire beaucoup plus simple pour arriver à ce système... Cela étant dit, on a donc finalement le résultat escompté : seules des valeurs au centre de la cellule à mettre à jour et les flux aux faces adjacentes sont nécessaires à ce schéma implicite. Il peut évidemment se résoudre aussi avec la méthode de Jacobi, en appliquant la relaxation suivante :

$$D_1 \triangle^{l+1} U_i = \frac{-\triangle t}{\triangle x}\Big(F(U^n_{i+1/2}) - F(U^n_{i+1/2}) + \triangle^l\big(F(U_{i+1/2}) - F(U_{i+1/2})\big) - \lambda^{max}\triangle^l U_i\Big) \tag{5.5.18}$$

Ce schéma est testé sur le système de SV dans le paragraphe 5.10.2. Pour les cas tests présentés, il donne de bons résultats et permet une augmentation significative de la CFL comparée au cas explicite. Nous avons cependant rencontré des difficultés de convergence sur des cas tests de type tube à choc raide. Hélas, la littérature concernant l'utilisation de ce type de schéma à faible coût dans des cas raides est à notre connaissance quasi nulle. Une des pistes qui nous semble intéressante à étudier pour comprendre ces difficultés, est celle de l'étude de fortes détentes sujettes au phénomène numérique nommé "entropy glitch" pour le schéma utilisé. Ce saut numérique pourrait jouer un rôle dans les difficultés rencontrées. Une fois cela plus clair, il faudrait étudier l'impact de l'approximation des termes jacobiens (assez extrême dans la formulation précédente). La littérature semble plus fournie à ce sujet, avec notamment l'article de Knoll et al. [114]. Notons que nous avons passé des cas tests similaires à ceux présentés dans le paragraphe 5.10.2 avec les équations d'Euler barotrope avec cette formulation. En l'état nous avons cependant rejeté ce schéma pour des applications générales à cause de ces problèmes de robustesse. Si une étude plus poussée de cette approche tend à montrer qu'elle n'est utilisable que dans des cas "simples", une idée pour persévérer avec cette simplicité est d'augmenter la dissipation de la partie implicite en augmentant λ^{max} (ou λ^+ et λ^-) de manière adéquat. Des tests numériques dans ce sens semblent confirmer cette piste, il faudrait cependant lui donner un minimum de cadre théorique pour une utilisation pratique.

5.5.3 Méthode semi-implicite

Une approche nommée semi-implicite, ou semi explicite, mixant un schéma explicite et implicite est aussi possible. L'idée est de résoudre en deux séquences temporelles le système initial par une méthode dite de "splitting" (semblable à une montée en ordre de Runge-Kutta présentée en paragraphe 5.5.1). Un des intérêts principaux de ce type d'approche est de simplifier la phase implicite en l'appliquant à un système plus simple. Un exemple traitant implicitement les phénomènes acoustiques (contraignant pour un schéma explicite en

régime bas Mach) et explicitement les phénomènes d'advection pour un modèle diphasique est par exemple présenté dans [99]. Il faut cependant rester prudent quant à la manière dont le système initial est découpé pour ne pas perdre des propriétés importantes, comme par exemple une forme conservative lorsque des chocs sont attendus.

5.6 Intégration en espace d'ordre élevé

Le schéma de Godunov sous sa forme initiale est un schéma d'ordre 1. La montée en ordre de ce schéma, qui est nécessaire pour envisager des applications pratiques avec un bonne efficacité, a posé de nombreux problèmes aux scientifiques. Le point de départ est appelé la barrière de Godunov qui a montré le théorème suivant :

Théorème 2. *Godunov (1959) [79] : "Monotone behavior of a numerical solution cannot be assured for linear finite-difference methods with more than first-order accuracy".*

Ce point a fait que le schéma redoutable de Godunov n'a initialement pas connu une grande reconnaissance. La plupart des tentatives de montée en ordre menaient à des oscillations des solutions numériques inacceptables. Ceci a changé avec les travaux de Van Leer [224], près de 20 ans plus tard, qui a proposé d'utiliser un schéma "non linéaire" pour passer cette difficulté. En pratique, l'idée est de considérer non pas des valeurs constantes par cellules à chaque pas de temps pour évaluer les flux aux interfaces mais de se servir des gradients entre cellules pour estimer plus précisément les valeurs des variables aux interfaces de cellules, seulement dans certaines conditions. Cela permet d'obtenir, dans les zones bien choisies, un schéma d'ordre supérieur non oscillant. De nombreux travaux ont suivi. Au lieu d'augmenter l'ordre d'une méthode avec une reconstruction plus précise des variables aux interfaces, il est possible de combiner un schéma d'ordre 1 avec un schéma d'ordre plus élevé, le tout judicieusement en limitant l'utilisation du schéma d'ordre élevé encore une fois aux zones adéquates. Un cadre intéressant pour obtenir un schéma d'ordre élevé impliquant des solutions sans oscillations numériques est la propriété TVD présentée précédemment dans le paragraphe 5.4. Le théorème très utile de Harten sur les propriétés TVD d'un schéma a permis à Sweby [211] de formuler de manière générale différents limiteurs de flux rassemblant beaucoup de travaux antérieurs.

On propose d'illustrer comment construire proprement un schéma d'ordre élevé en suivant principalement Sweby [211], Leveque [126] et Spekreijse [206]. Comme souvent, on se restreint pour commencer à une équation d'advection. Cela nous donnera donc une condition nécessaire pour les cas plus complexes contenant ce type de solution. Pour des cas plus généraux, le lecteur peut se référer aux références précédentes mais dans ces cas plus délicats la rigueur de la démonstration ci dessous ne peut être totalement conservée en dehors du cadre linéaire (voir par exemple Leveque [126] pour les systèmes linéaires). Néanmoins, en pratique l'extension de ce cas simple aux cas des systèmes non linéaires est faite de manière empirique en appliquant la méthode le plus souvent au vecteur de variables non conservatives ; ce qui fonctionne assez bien comme le souligne par exemple Toro [221]. Ce point est cependant à garder en mémoire lors de l'utilisation de cette méthode pour la résolution de tels systèmes pour ne pas être surpris en cas de générations d'oscillations pour certains cas particulièrement "raides". Pour être plus complet, notons cependant que l'extension de la méthode au cas non linéaire est en fait possible avec un solveur approprié comme celui de Roe, comme présenté par Leveque [126]. Comme cela reste un cas particulier, cette approche est très peu utilisée en pratique à notre connaissance.

Limiteurs de pentes : Le principe de cette montée en ordre est de considérer des solutions discrètes non constantes par cellules. En supposant les profils des solutions discrètes dans les cellules, on peut reconstruire les valeurs à gauche et à droite de chaque interface. Comme nous allons le voir par la suite, la projection doit parfois être limitée pour éliminer ou réduire des futures oscillations engendrées par cette montée en ordre. On se restreint ici aux fonctions de reconstruction linéaires [6].

6. L'utilisation d'une fonction linéaire ou quadratique pour reconstruire une variable mène respectivement à un schéma d'ordre 2 et 3 pour des situations lisses. On peut montrer cela en analysant l'erreur de troncature du schéma qui est respectivement en $O(\triangle x^2)$ et $O(\triangle x^3)$. Cela s'intuite bien en remarquant qu'une approximation linéaire permet d'approcher exactement une solution linéaire, l'erreur est donc commise sur le terme de forme supérieur (*i.e.* d'ordre 2) et ainsi de suite.

Pour pouvoir effectuer ces projections, il faut connaître le gradient dans les cellules. Il peut être évalué de différentes manières : centré, décentré amont ou décentré aval. Comme le raisonnement qui suit est indépendant de ce choix, il sera précisé plus tard. On note simplement la pente dans la cellule i : $grad(u_i)$. Pour simplifier, on va étudier cette méthode dans le cas d'une équation scalaire. La généralisation sera évoquée à la fin de ce paragraphe. Soit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

La variable u est définie comme $u = u(x,t)$ et $a \in \mathbb{R}_*^+$. Dans ce cas, le schéma de Godunov donne :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\triangle t}{\triangle x}(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

On introduit maintenant les variables reconstruites dans les flux du schéma précédent. On a u_i correspondant à la valeur associée à gauche de la face droite de la cellule i, soit u_i^R, et u_{i-1} correspondant à la valeur associée à gauche de la face gauche de la cellule i, soit u_{i-1}^L :

$$\begin{aligned} u_i^R &= u_i + grad(u_i)\frac{\triangle x}{2} \\ u_{i-1}^R &= u_{i-1} + grad(u_{i-1})\frac{\triangle x}{2} \end{aligned}$$

Une fonction est introduite pour potentiellement limiteur les gradients : $grad(u_i) = grad(u_i)\phi_i$. On obtient finalement le schéma suivant :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\triangle t}{\triangle x}(u_i^n + \phi_i grad(u_i)\frac{\triangle x}{2} - u_{i-1} - \phi_{i-1}grad(u_{i-1})grad(u_{i-1})\frac{\triangle x}{2}) \tag{5.6.1}$$

En utilisant ce schéma avec $\phi = 1$, c'est à dire en ne limitant pas les pentes, on obtient des oscillations numériques pour des conditions initiales non régulières. Un cadre très intéressant pour éviter cela est la condition TVD (le lecteur est renvoyé au paragraphe 5.4 où cette propriété a été détaillée). Le théorème d'Harten [94] permet de formuler de manière générale les coefficients d'un schéma pour qu'il soit TVD et est donc très utile. Le lecteur peut se référer à Sweby [211] qui présente et rassemble beaucoup de limiteurs de flux grâce à ce théorème. Pour l'utiliser il faut mettre le schéma sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n) + C_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) \tag{5.6.2}$$

En manipulant l'équation (5.6.1) on obtient :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - (u_i^n - u_{i-1}^n)a\frac{\triangle t}{\triangle x}\big(1 + \frac{\triangle x}{2}(\frac{\phi_i grad(u_i) - \phi_{i-1}grad(u_{i-1})}{u_i^n - u_{i-1}^n})\big) \tag{5.6.3}$$

Par identification avec le théorème de Harten, $C_{i-1/2} = a\frac{\triangle t}{\triangle x}\big(1 + \frac{\triangle x}{2}(\frac{\phi_i grad(u_i) - \phi_{i-1}grad(u_{i-1})}{u_i^n - u_{i-1}^n})$ et $C_{i-1/2} = 0$. Il y a pour l'instant trop d'inconnues pour avancer. En ayant en tête que, suivant la condition initiale à laquelle on applique le schéma non limité la solution solution oscille, il est cohérent d'introduire la notion de régularité. Pour réduire le nombre d'inconnues on s'astreint aussi à faire disparaître le dénominateur du terme de droite. Soit :

$$\begin{aligned} r_i^+ &= \frac{u_{i+1} - u_i}{grad(u_i)\triangle x} \\ r_i^- &= \frac{u_i - u_{i-1}}{grad(u_i)\triangle x} \end{aligned}$$

Ce qui donne aussi :

$$r_{i-1}^{+} = \frac{u_i - u_{i-1}}{grad(u_{i-1})\triangle x}$$
$$r_{i-1}^{-} = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{grad(u_{i-1})\triangle x}$$

On pose $CFL = a\dfrac{\triangle t}{\triangle x}$ et on introduit les variables "de régularité" présentées précédemment dans le schéma. Pour que le schéma soit TVD (voir Harten [94] ou le paragraphe 5.4) il faut que $0 \leqslant C_{i-1/2} \leqslant 1$, soit :

$$0 \leqslant CFL\big(1 + \frac{1}{2}(\frac{\phi_i}{r_i^-} - \frac{\phi_{i-1}}{r_{i-1}^+})\big) \leqslant 1 \tag{5.6.4}$$

En prenant les bornes de CFL les plus restrictives pour l'inégalité, on obtient que le limiteur doit être nul. En fait, comme on a choisi un schéma d'ordre 1 en temps, pour pouvoir monter en ordre en espace il faut restreindre la condition de stabilité avec par exemple $CFL \leqslant 0.5$. Avec cette pénalisation et en considérant les cas les plus restrictifs pour l'inégalité 5.6, on obtient :

$$-2 \leqslant \frac{\phi_i}{r_i^-} - \frac{\phi_{i-1}}{r_{i-1}^+} \leqslant 2 \tag{5.6.5}$$

Pour rester général, on suppose que ϕ_i et ϕ_{i-1} sont potentiellement indépendants. La seule solution possible est alors :

$$0 \leqslant \phi_{i-1} \leqslant 2r_{i-1}^+ \tag{5.6.6}$$
$$\text{et } 0 \leqslant \phi_i \leqslant 2r_i^- \tag{5.6.7}$$

Comme ceci est valable pour tout i, en décalant les indices on a :

$$0 \leqslant \phi_i \leqslant 2r_i^+ \tag{5.6.8}$$
$$\text{et } 0 \leqslant \phi_i \leqslant 2r_i^- \tag{5.6.9}$$

D'où en posant :

$$r = min(r_i^-, r_i^+) \tag{5.6.10}$$
$$\boxed{0 \leqslant \phi(r) \leqslant 2r} \tag{5.6.11}$$

Notons que comme on a utilisé une formulation différente de Sweby [211], on obtient un résultat légèrement différent (pour nos choix d'indicateurs de régularité il n'y a pas la contrainte $0 \leqslant \phi_i \leqslant 2$). Cette contrainte donne un schéma TVD mais pas nécessairement d'ordre 2. La zone donnée par le limiteur le plus large précédent, dans un diagramme de Sweby, implique une zone compressive mais d'ordre 1. Comme noté par Sweby dans son cas, il "faut" restreindre ce limiteur aux schémas d'ordre 2. En notant que les cas avec un schéma sans limiteur (*i.e.* $\phi = 1$) et les schémas de Lax Wendroff ou Beam Warming (*i.e.* $\phi = r$) sont d'ordre 2, on peut restreindre le limiteur aux schémas d'ordre 2 TVD.

Le cas le moins limitant est celui nommé "Superbee". Il en existe en fait une multitude qui sont plus ou moins performants suivant les cas. Dans le formalisme présenté, on en donne quelques un :

$$\phi_{superbee} = max(0, min(1, 2r), r) \tag{5.6.12}$$
$$\phi_{minmod} = max(0, min(r, 1)) \tag{5.6.13}$$
$$\phi_{max} = max(0, 2r) \text{ (ce limiteur réduit souvent la précision au premier ordre)} \tag{5.6.14}$$

Notons que le limiteur ϕ_{max} est potentiellement d'une grande utilité pour les problèmes où il est nécessaire d'avoir des interfaces peu diffusées car il est très compressif par nature, bien qu'il réduise souvent l'ordre de la méthode. Le limiteur "Superbee" a aussi tendance à raidir les interfaces mais de manière moins prononcée. Un choix très robuste est le limiteur "Minmod", qui n'a pas ce genre de comportement (parfois problématique).

Remarque 18. *Il semble intéressant de noter que pour arriver à ce résultat, nous avons dû baisser la CFL "classique" à la différence de la plupart des références trouvées sur le sujet. Comme dit précédemment, cela est dû au fait que nous avons utilisé un schéma de base d'ordre 1 en temps ; les autres auteurs arriveraient en fait à la même conclusion s'ils utilisaient dans leurs démonstrations, la CFL augmentée associée au schéma d'ordre 2 en temps (au lieu de la condition classique $CFL \leqslant 1$). Ce point peut paraître anodin mais cela prouve en fait que baisser une condition de stabilité peut ouvrir la porte à de nouveaux schémas. En effet sans baisser la CFL avec la formulation utilisée on trouve que le limiteur doit être nul pour que le schéma soit TVD (i.e. le schéma doit rester purement up-wind). La question est maintenant : y a t-il un intérêt à cela ? Car évidemment baisser la CFL induit plus de diffusion dans la résolution (voir par exemple l'erreur de troncature associée à une équation d'advection pour un schéma up-wind). La réponse nous semble être oui car la diffusion engendrée par un schéma numérique n'est pas cantonnée au facteur CFL. Par exemple on verra dans le chapitre 6, que proche de certaines limites (par exemple le bas Mach pour les équations d'Euler compressible), les schémas standards induisent une dissipation inacceptable et ce indépendamment du choix de la CFL. Dans ce type de cas, nommés "asymptotic non preserving", il semble tout à fait acceptable de sacrifier un peu la CFL pour retrouver des propriétés de "convergence forte" avec un "nouveau" schéma, même si ce n'est pas intuitif au premier abord.*

Pour revenir à la pratique, on choisit dans la suite de travailler avec des gradients centrés car ils sont facilement généralisables aux maillages non structurés, grâce par exemple à la formule de Green. En 1D on a donc :

$$grad(u_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\triangle x} \tag{5.6.15}$$

Notons que la construction initiale des limiteurs de pentes (travaux de Van Leer) était basée sur la préservation de monotonie de la reconstruction (la valeur projetée sur une interface ne doit pas dépasser les valeurs centrales voisines) et pas à proprement parler sur le principe TVD. Il y a en fait un lien fort entre les deux, qui est semble-t-il connu, même si nous n'avons pas trouvé de références à ce sujet. On propose à la fin de cette section d'établir ce fameux lien.

En pratique dans cette thèse, on a suivi la méthode MUSCL avec le cadre donné par Barth et Jespersen [17] adéquat pour les maillages non structurés, avec principalement les limiteurs Minmod et Superbee suivant les cas. Le lien avec la présentation précédente est établi à la fin de cette section. En dehors des articles/livres références cités précédemment, le lecteur peut se référer par exemple à Chiapolino et al. [41], où la méthode utilisée et les différents limiteurs sont récapitulés et une méthode permettant d'augmenter la compression localement sur une variable est proposée (grâce à une sorte de limiteur ϕ_{max} évoqué précédemment). Pour finir il convient de préciser que les gradients des variables sur maillage non structuré sont évalués grâce à la formule de Green pour sa simplicité d'implémentation (pour une discussion à ce sujet le lecteur peut se référer à [17]).

Remarque 19. *Nous avons parlé uniquement de méthodes TVD d'ordre 2 dans cette section mais il est en fait possible d'augmenter encore plus la précision des schémas. Suivant les modèles que l'on résout, on peut en effet s'autoriser des oscillations numériques contrôlées. L'idée est de relaxer la contrainte TVD vers une contrainte dite TVB (Total Variation Bounded). Notons que ce type d'approches est très utilisé en pratique mais qu'il faut rester prudent lors de leur utilisation lorsque certaines bornes non physiques peuvent être atteintes par les solutions. Par souci de robustesse mais aussi de coût, car le calcul de polynômes d'ordre élevé interpolant nécessaire aux fortes montées en ordre est a priori assez chronophage, ces approches n'ont pas été investiguées dans cette thèse. Le lecteur intéressé par ce type de méthodes peut se référer par exemple à Diot et al. [58] où une revue intéressante des approches principales utilisées dite ENO ou WENO (pour Weighted Essentially Non-Oscillatory) ainsi qu'une méthode originale de limiteur a posteriori est proposée. Cette dernière méthode dite MOOD, pour Multidimensional Optimal Order Detection, semble aussi intéressante et est assez simple à mettre en œuvre car elle est basée sur l'évolution d'une solution avec un schéma d'ordre élevé non limité, puis à un retour à un schéma plus robuste (dit parachute), lorsque cela est nécessaire. Cependant, après quelques investigations, il nous semble qu'il n'est pas évident de trouver un critère simple et peu coûteux d'évaluation de solution "erronée" et que de nombreuses boucles pour obtenir une solution*

"viable" in fine sont parfois nécessaires. Évidemment les montées en ordres élevés étant en pratique d'une grande utilité, il convient de bien pondérer ces remarques. Une question de fond derrière cela est "quelle erreur dans une solution numérique est acceptable ?".

Lien avec la méthode basée sur la "préservation de la monotonie de la reconstruction" :
On a présenté précédemment comment construire un schéma TVD d'ordre 2 en espace. L'extension de cette approche au cas d'un maillage non structuré est à première vue non directe. Barth et Jespersen [17] suivent le formalisme de Van Leer, car ils proposent un limiteur de pente (sur maillage non structuré) qui assure que les valeurs projetées ne dépassent pas les valeurs centrales. Comme évoqué précédemment, nous n'avons pas trouvé de référence explicitant le lien entre ces deux approches (maillage structuré ou non), bien que cela semble connu. On propose dans le suite de l'établir en se plaçant initialement dans le cadre général non structuré de Barth et Jespersen. L'approche de Barth et Jespersen pour des schémas raisonnants en centre de cellule est la suivante : on considère une cellule indicée i entourée d'un nombre quelconque de voisines indicées j. On note $\overrightarrow{r_{ij}}$ le vecteur entre le centre de la cellule i et le centre de la face entre i et j. La reconstruction limitée, par θ, de la valeur au centre i sur la face frontière avec la cellule j, s'exprime :

$$W_{ij} = W_i + \theta \overrightarrow{r_{ij}} \nabla_i W_i \tag{5.6.16}$$

On note W_{ij}^{nlim} la reconstruction non limitée, $W^{max} = max_j(W_i, W_j)$ et $W^{min} = min_j(W_i, W_j)$. Pour évaluer la "monotonie de reconstruction" on prend :

$$R_{ij} = \begin{cases} \dfrac{W^{max} - W_i}{2(W_{ij}^{nlim} - W_i)} & \text{si } (W_{ij}^{nlim} - W_i) > 0 \\ \dfrac{W^{min} - W_i}{2(W_{ij}^{nlim} - W_i)} & \text{si } (W_{ij}^{nlim} - W_i) < 0 \\ 1 & \text{si } (W_{ij}^{nlim} - W_i) = 0 \end{cases} \tag{5.6.17}$$

Le limiteur θ_i est défini par :

$$\theta_i = min_j(\psi(R_{ij})) \tag{5.6.18}$$

ψ est dépendant du type de limiteur. Par exemple Barth et Jespersen utilisent $\psi(R_{ij}) = min(R_{ij}, 1)$. Pour commencer il faut remarquer que $\theta_i = \psi(min_j(R_{ij}))$ (*i.e.* les fonctions sont commutatives). On note $r' = min_j(R_{ij})$ pour se retrouver dans le formalisme précédent ($\theta = \theta(r)$). Il faut donc prouver $r' = r$ avec r défini précédemment par $r = min(r_i^-, r_i^+)$ (*cf.* équation (5.6.10)).

Pour effectuer cette démonstration on doit se restreindre au cas $1D$ (dans les notations qui suivent j_R et j_L correspondent respectivement aux voisins de droite et de gauche de la cellule i). Remarquons que :

$$W_{ij_R}^{nlim} = W_i + \nabla_i \frac{\triangle x}{2} \Longleftrightarrow 2(W_{ij_R}^{nlim} - W_i) = \nabla_i \triangle x$$
$$W_{ij_L}^{nlim} = W_i - \nabla_i \frac{\triangle x}{2} \Longleftrightarrow 2(W_{ij_L}^{nlim} - W_i) = -\nabla_i \triangle x$$

On définissant la fonction suivante :

$$\xi_j = \begin{cases} W^{max} & \text{si } (W_{ij}^{nlim} - W_i) > 0 \\ W^{min} & \text{si } (W_{ij}^{nlim} - W_i) < 0 \end{cases} \tag{5.6.19}$$

On obtient ainsi r' en remplaçant ξ dans (5.6.17) :

$$r' = min(\frac{\xi_{j_R} - W_i}{\nabla_i \triangle x}, \frac{W_i - \xi_{j_L}}{\nabla_i \triangle x}) \tag{5.6.20}$$

On voit que r' commence à ressembler à r. Il "faut" maintenant étudier les différents cas possibles. Supposons $\nabla_i < 0$, on obtient alors :

$$r' = min(\frac{W^{min} - W_i}{\nabla_i \triangle x}, \frac{W_i - W^{max}}{\nabla_i \triangle x}) \tag{5.6.21}$$

Le premier sous cas concerne un extremum local. Si $W_i = W^{min}$ alors $r' < 0$, ce qui implique pour n'importe quel limiteur (correct) $\psi = 0$. Il en de même si on considère l'autre approche : on a aussi $r < 0$ qui implique $\phi = 0$. Le cas $W_i = W^{max}$ donne le même résultat.

Le second sous-cas concerne les solutions monotones. Comme par hypothèse $\nabla_i < 0$, on a $W_{i-1} > W_i > W_{i+1}$ soit $W_{i-1} - W_i > 0 > W_{i+1} - W_i$. On a donc :

$$r' = min(\frac{W_{i+1} - W_i}{\nabla_i \triangle x}, \frac{W_i - W_{i-1}}{\nabla_i \triangle x}) \tag{5.6.22}$$

Encore une fois, en considérant l'autre approche (*i.e.* $\phi(r)$) dans ce même cas, on obtient exactement le même résultat.

Le cas $\nabla_i > 0$ est analogue. La démonstration est donc terminée, on a prouvé qu'en 1D : $\boxed{r' = r}$ pour $(r', r) > (0, 0)$ et $r' < 0 \Longleftrightarrow r < 0$ d'où $\boxed{\phi(r) = \psi(r')}$.

Les limiteurs trouvés précédemment (eqs. (5.6.12), (5.6.13) et (5.6.14)) sont donc applicables dans le formalisme de Barth et Jespersen. Si on raisonne direction par direction en multi-D, la preuve tient alors aussi dans ce cas.

5.7 Terme source

On souhaite résoudre le système 5.2.1 qui comporte un terme source S. Supposons le cas scalaire pour simplifier les notations. Suivant la raideur de ce terme (parfois les termes sources ont un temps de relaxation bien supérieur au pas de temps employé par le schéma numérique), il faut employer des méthodes plus ou moins complexes. La plus simple et directe est la **méthode sans "splitting"** . On suppose $S = cste$ au cours d'un "$\triangle t$" et sur une cellule donnée. Cette approche est utilisée dans cette thèse pour traiter le terme gravitaire dans le modèle diphasique considéré au chapitre 9. Pour le détail de cette méthode, le lecteur pourra se référer à Leveque [127]. Pour des méthodes plus avancées, le lecteur peut se référer encore à cette dernière référence et à Toro [221]. Une des plus utilisées est la **méthode avec "splitting"** qui consiste à résoudre dans un premier temps le système homogène puis dans un second temps le système $U_t = S$ avec une condition initiale donnée par le premier pas. Formellement on a en 1D :

$$\tilde{U}_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\triangle t}{\triangle x}\big(F_{i+\frac{1}{2}}(U_i^n) - F_{i-\frac{1}{2}}(U_i^n)\big) \quad \text{premier pas} \tag{5.7.1}$$

$$U^{n+1} = \tilde{U}^{n+1} + \frac{\triangle t}{\triangle x} S(\tilde{U}^{n+1}) \quad \text{second pas} \tag{5.7.2}$$

Cette approche, parfois appelée Godunov Splitting, est d'ordre 1.

Une montée en ordre appliquée à la méthode de Godunov Splitting s'appelle la méthode de Strang Splitting et s'écrit formellement :

$$\tilde{U}_i^{n+\frac{1}{2}} = U_i^n + \frac{\triangle t}{2\triangle x}\big(F_{i+\frac{1}{2}}(U_i^n) - F_{i-\frac{1}{2}}(U_i^n)\big) \quad \text{premier demi pas du système homogène} \tag{5.7.3}$$

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \tilde{U}_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\triangle t}{\triangle x} S(\tilde{U}^{n+\frac{1}{2}}) \quad \text{pas entier du terme source avec solution du demi pas homogène} \tag{5.7.4}$$

$$U_i^{n+1} = \tilde{U}_i^{n+1} + \frac{\triangle t}{2\triangle x}\big(F_{i+\frac{1}{2}}(\tilde{U}_i^{n+1}) - F_{i-\frac{1}{2}}(\tilde{U}_i^{n+1})\big) \quad \text{second demi pas du système homogène} \tag{5.7.5}$$

5.8 Conditions aux limites

Ce paragraphe présente comment traiter plus ou moins rigoureusement des conditions aux limites. En pratique, le traitement de conditions au limites est souvent considéré de manière assez simpliste mais en toute rigueur n'est pas du tout évident. La raison principale des difficultés rencontrées est que certaines limites évoluent en fonction de ce qui se passe en dehors du domaine, mais aussi dans le domaine. Aussi, en

dehors du domaine de calcul l'écoulement évolue potentiellement dans une dimension différente de celle du domaine de calcul.

Un domaine $[0, L]$, divisé en N cellules de taille $\triangle x$, est considéré. Les points discrets sont indicés par i avec $i = \{1 - 1/2, ..., N + 1/2\}$, les valeurs entières correspondant aux centres de cellules. Rigoureusement, il faut imposer les flux aux limites $x = 0$ et $x = L$, soit $F^*(x = 0) = F^*_{-1/2}$ et $F^*(x = L) = F^*_{N+1/2}$. Pour les systèmes hyperboliques il existe principalement deux méthodes pour traiter des conditions aux limites. La plus rigoureuse consiste à considérer en quelque sorte un demi problème de Riemann (certaines valeurs étant inconnues car en dehors du domaine considéré). Cette méthode se nomme souvent méthode des caractéristiques. Une autre approche, plus simple, est d'utiliser des cellules fictives adjacentes aux limites du domaine pour reproduire un problème de Riemann complet en tout point. On peut alors traiter les conditions aux limites (CL) de manière routinière, exactement au même titre que les cellules internes, ce qui facilite l'algorithme de résolution. Notons que dans le cas de systèmes elliptiques (comme par exemple les équations de SGN), on ne sait pas traiter rigoureusement des CL ce qui, encore une fois, encourage à chercher autant que possible des systèmes hyperboliques pour construire des modèles. Dans ce cas, on a recours à des "astuces" (rien de péjoratif derrière ce mot) pour faire au mieux. Pour traiter des CL de type sortie libre, le lecteur est par exemple renvoyé à Kazolea [105] qui détaille une méthode d'"amortissement" souvent utilisée pour des modèles de type-Boussinesq. Revenons maintenant au cas des systèmes hyperboliques, avec en premier lieu, le traitement par cellules fictives dans un cadre 1D (*cf.* par exemple Toro [221]).

Pour des CL de type **mur** (ou réflexion), cette approche simple n'est pas moins rigoureuse que le traitement d'un demi problème de Riemann. Cette condition demande simplement qu'aucun flux ne passe à travers la limite, ce qui se traduit pour les équation d'Euler isentropique par $\rho_G = \rho_D$ et $u_G = -u_D$.

Pour des CL de type **sortie libre**, le traitement par cellules fictives ne peut pas être rigoureux dans tous la cas. Cependant, dans la plupart d'entre eux une simple recopie des cellules internes vers les cellules fictives est suffisant ($\rho_G = \rho_D$ et $u_G = u_D$).

Pour des CL de type **vitesse imposée** (ou pression), c'est un peu comme le cas de sortie libre. On peut choisir d'imposer dans la cellule fictive extérieure au domaine la vitesse voulue en CL, mais évidemment cela donnera en limite une valeur potentiellement différente de celle voulue.

Globalement, nous avons utilisé dans cette thèse cette approche à cellules fictives hors quelques cas particuliers où divers types d'ondes pouvaient potentiellement sortir (ou entrer) du domaine. On propose de détailler plus rigoureusement le traitement à adopter dans les cas où l'approche "traditionnelle" échoue. Le lecteur peut par exemple se référer partiellement à Bristeau et al. [33] pour le cas des équations de SV même si on tente ci-dessous de donner plus de détails. Pour un cadre plus général, le lecteur est renvoyé à Godlewski et Raviart [78]. Après avoir présenté le cas du modèle de SV, on propose dans la suite "d'étendre" cette approche pour traiter le cas d'un modèle diphasique, moyennant quelques hypothèses nécessaires compte tenu de la complexité du modèle.

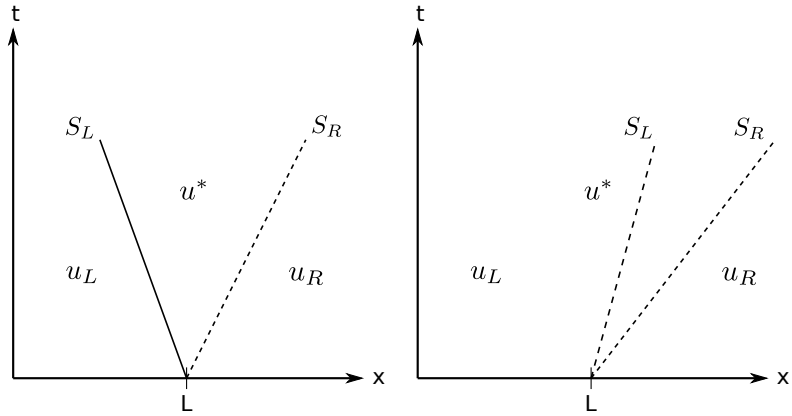
Condition pour le modèle de SV :
Pour tous les types de conditions présentés ci-dessous, il y a deux cas qu'il convient de différencier : l'écoulement est subsonique en limite ou supersonique. Pour faire la différence entre ces deux possibilités, il faut évaluer le rapport entre la vitesse d'advection et la vitesse des ondes acoustiques sur la limite considérée. En l'occurrence, ceci correspond au nombre de Froude pour le modèle de SV avec :

$$Fr < 1 \Longleftrightarrow \frac{|u|}{\sqrt{gh}} < 1 : \text{L'écoulement est subsonique (ou fluvial)}$$

Comme c'est précisément ces valeurs que l'on souhaite déterminer pour imposer la condition aux limites, on doit raisonner *a posteriori* : on suppose par exemple que la sortie est subsonique, on détermine les variables sur la limite, puis on vérifie si l'écoulement est bien subsonique. Si ce point se vérifie le problème est résolu. Dans le cas contraire on applique la méthode adaptée au cas supersonique.

Condition de sortie :
Les différentes configurations d'ondes possibles sont illustrées en figure 5.6. Une condition de sortie parfaite

est une condition qui laisse s'échapper n'importe quel phénomène sans le perturber. Comme en pratique on travaille sur des domaines finis, cela revient à ce que la sortie se passe sans induire de perturbation dans le domaine considéré.



(a) Sortie subsonique (ou fluvial). (b) Sortie supersonique (ou torrentiel).

FIGURE 5.6 – Condition de sortie pour le modèle de SV

Considérons pour commencer le cas subsonique. En dehors du domaine (*i.e.* $x > L$) rien n'est connu. En conséquence, seules les relations à travers l'onde S_L sont exploitables. Comme nous l'avons vu précédemment dans les demi-problèmes de Riemann, deux phénomènes sont possibles : une onde de choc, à vitesse σ_1, ou une onde de détente, à vitesse λ_1. Considérons dans un premier temps une onde de détente. L'invariant de Riemann à travers cette onde (voir paragraphe 5.3.3.2) donne :

$$\begin{aligned} & I_1(W_L) = I_1(W) \\ \Longleftrightarrow & u_L + 2\sqrt{gh_L} = u + 2\sqrt{gh} \\ \Longleftrightarrow & u = u_L - (h - h_L)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h}} \end{aligned}$$

Il faut se donner, soit h, soit u, pour fermer le problème. Par exemple, si on choisit de fixer $h = h_L$, on obtient $u = u_L$ et donc le flux à imposer sur cette limite est $F(x = L) = F(h_L, u_L)$. Ce choix assure que le cône de raréfaction se réduit à un ensemble nul (il n'y a pas de saut à travers l'onde) et donc qu'aucune perturbation extérieure ne pénétrera le domaine. La condition de type sortie est donc bien définie. Dans le cas d'un choc, les relations de Rankine-Hugoniot s'appliquent. Comme on veut que le choc entrant (à vitesse σ_1) soit nul (*i.e.* pas de perturbation dans le domaine), la seule solution est $h = h_L$ et $u = u_L$.

Dans le cas supersonique, toutes les ondes sortent du domaine. On a donc directement $h = h_L$ et $u = u_L$ soit $F(x = L) = F(h_L, u_L)$.

Condition d'entrée pour le modèle de SV :
Ce cas est relativement similaire au cas des conditions de sorties. Considérons que L est en fait la limite à gauche du domaine (*i.e.* $\Omega = [L, L']$). Dans ce cas, on ne connaît rien de l'état W_L et on souhaite imposer l'état W^*. Dans le cas subsonique (avec détente à droite), on se sert de l'invariant de Riemann à travers l'onde $\lambda_2 = u + c$ (ie $I_2 = u - 2\sqrt{gh}$). Si on veut imposer une hauteur d'eau en limite (*i.e.* $h = h_{imposée}$) alors u est nécessairement :

$$u = u_R - (h_{imposée} - h_R)\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_{imposée}}} \text{ (et vice versa)}$$

Dans le cas d'entrée supersonique rien ne peut sortir du domaine, la valeur imposée est directement applicable au flux de l'interface : $F(x = L) = F(h_{imposée}, u_{imposée})$.

Condition aux limites pour des systèmes plus complexes :
On présente maintenant "l'extension" de cette méthode à un système plus complexe permettant de modéliser certains phénomènes diphasiques. Ce modèle est utilisé dans les derniers chapitres de cette thèse pour modéliser notamment les impacts de vagues. Sa dérivation et son étude mathématique sont détaillées dans le chapitre 4 ; les différents ingrédients utilisés ici sont donc supposés connus. Le modèle est le suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{P_1 - P_2}{\mu} \\
&\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 u}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 u}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

Avec α_k la fraction volumique, ρ_k la masse volumique, u la vitesse, et P_k la pression de la phase k. Le coefficient μ est infiniment petit de sorte que la relaxation des pressions donne $P = P_1 = P_2$. Ce système admet 3 vitesses caractéristiques $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3 = u + c$. Ce système est hyperbolique et peut évidemment être sous la forme $W_t + AW_x = S$. Hormis pour certaines lois d'état, il est difficile de déterminer les invariants de Riemann. Pour rester dans un cadre général une solution est de chercher différemment des relations utiles. Il faut pour cela remarquer que pour un vecteur propre à gauche défini par $L_i A = \lambda_i L_i$, on a (en considérant la partie homogène du système) :

$$\begin{aligned}
&L_i(W_t + AW_x) = 0 \\
\Longleftrightarrow &L_i W_t + \lambda_i L_i W_x = 0 \\
\Longleftrightarrow &L_i(W_t + \lambda_i W_x) = 0 \\
\text{Soit en notant } d|_{\lambda_i}. = \partial_t. + \lambda_i \partial_x. \Longleftrightarrow &L_i d|_{\lambda_i} W = 0
\end{aligned}$$

On a donc des relations (EDO) entre les variables le long des ondes élémentaires. Pour cette raison, on parle parfois de "méthode des caractéristiques" ou plutôt dans le contexte de ce paragraphe de "relations caractéristiques". Pour illustrer l'utilité de ces relations, on présente dans le suite le traitement d'une condition en limite de type sortie libre. Notons que dans un cas général, ces relations peuvent être très compliquées et donc difficilement exploitables.

Condition de sortie pour le modèle diphasique à relaxation :
Rappelons qu'à la différence du modèle de SV, ici trois ondes élémentaires coexistent. La condition de sortie subsonique est illustrée en figure 5.7.

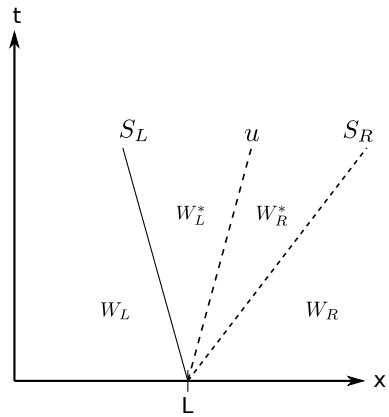


FIGURE 5.7 – Condition de sortie pour le modèle diphasique

En condition de sortie, seule l'information de l'onde $u - c$ est exploitable. Pour ce modèle on a :

$$L_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{p_1 - p_2}{\rho c} \\ -\dfrac{\alpha_1 c_1^2}{\rho c} \\ -\dfrac{\alpha_2 c_2^2}{\rho c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$(p_1 - p_2) d|_{u-c} \alpha + \alpha_1 c_1^2 d|_{u-c} \rho_1 + \alpha_1 c_2^2 d|_{u-c} \rho_2 - \rho c d|_{u-c} u = 0 \tag{5.8.1}$$

Sans autre information ou hypothèse, il est clair que nous sommes bloqués. En se servant de l'invariant de Riemann (*cf.* annexe A) on peut montrer qu'à travers cette onde $\alpha = cste$. Pour avancer il faut faire l'hypothèse que l'impédance acoustique de mélange (ρc), ainsi que les vitesses du son des différentes phases, sont constantes. Ces hypothèses sont valables tant qu'il n'y a pas de forts chocs dans l'écoulement. On obtient :

$$\alpha_1 c_1^2 \rho_1 + \alpha_1 c_2^2 \rho_2 - \rho c u = cste \text{ (suivant } u - c) \tag{5.8.2}$$

L'état $W*$ peut donc être relié à l'état interne. Il faut se donner la pression et déterminer la vitesse ou inversement.

Les autres types de conditions aux limites peuvent être déterminés de la même manière en exploitant les autres relations caractéristiques, invariants de Riemann déterminables et relations de Rankine-Hugoniot suivant les cas. Il est même possible d'obtenir un solveur de Riemann approché en liant tous les états possibles. Ce type de solveur n'est cependant pas valable pour des écoulements fortement non linéaires pour lesquels d'autres solveurs approchés sont préférables (solveur HLL, HLLC, etc.).

5.9 Multi-dimensions

On utilise la méthode la plus simple possible car dans les applications que l'on vise, les boucles de calcul des flux sont la partie du code la plus coûteuse. La méthode "unsplit" permet de traiter toutes les faces d'un maillage non structuré en une seule boucle. Cela donne :

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\triangle t}{V_{C_i}} \sum_a \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{i/a}) S_{C_{i/a}} \cdot \boldsymbol{n}_{i/a}$$

En dehors des notations standards définies dans les paragraphes précédents, $S_{C_{i/a}}$ représente la surface sur laquelle est calculé le flux et V_{C_i} le volume total de la cellule mise à jour. D'après Toro [221], la contrainte CFL est cependant légèrement pénalisée : $CFL \leq \frac{1}{3}$; précisons cependant que nous n'avons, dans nos cas tests, pas rencontré la nécessité de cette sur-contrainte. Le lecteur est renvoyé à cette dernière référence pour plus de détails sur les autres méthodes. Notons simplement que la méthode dite "split" est analogue à celle présentée en paragraphe 5.7 pour traiter des termes sources : on met à jour les variables direction par direction, en reprenant à chaque fois l'état évolué pour calculer une autre direction.

5.10 Comparaison explicite implicite

Globalement les solveurs implicites sont à privilégier pour obtenir des solutions stationnaires. En effet, dans ce cas l'évolution de la solution dans le temps n'est pas d'intérêt et de grands pas de temps sont largement préférables. Dans un cas totalement opposé, lorsqu'on étudie des phénomènes hautement transitoires, augmenter le pas de temps au delà de la célérité des phénomènes d'intérêts (à ne pas confondre avec les vitesses particulaires qui correspondent à un cas particulier) générera vraisemblablement des pertes d'informations préjudiciables pour la qualité des résultats. Un cas plus ambigu est lorsque les phénomènes que l'on étudie sont relativement lents devant les vitesses caractéristiques du système. La restriction de stabilité des schémas explicites est alors *a priori* trop contraignante vis à vis de la précision de résolution nécessaire. Il ne faut cependant pas conclure trop vite car la résolution d'un système linéaire (dans les meilleurs des cas) est coûteuse.

Se pose alors la question de l'efficacité globale de la méthode numérique. En effet, un solveur implicite a dans ce cas un fort potentiel mais peut être extrêmement coûteux en mémoire (inversion du système). Pour de gros maillages ceci peut alors devenir préjudiciable. D'autre part, la linéarisation en temps de ces solveurs peut induire une perte de précision. A l'inverse, un solveur explicite en évolution "lente" nécessite d'effectuer beaucoup de pas de temps non nécessaires du point de vue de l'évolution du phénomène. Ces pas de temps sont cependant très peu coûteux en temps CPU et en espace mémoire.

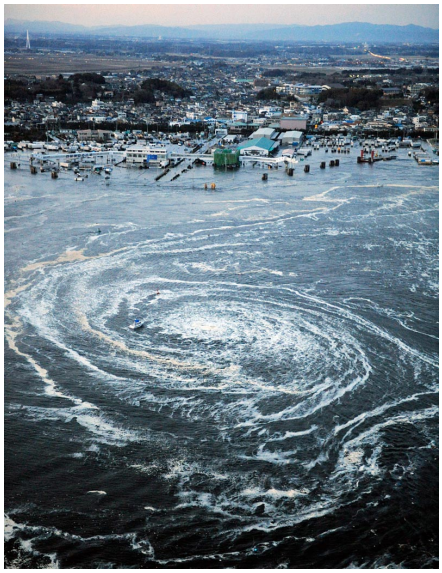
La notion de nombre de Mach pour les équations d'Euler ou par exemple de nombre de Froude pour les équations de Saint-Venant est parfois utilisé pour choisir un solveur temporel. Il faut cependant rester très prudent sur ce type d'argument naïf. Si on considère par exemple la propagation de tsunamis avec le modèle de SV, on se trouve souvent en régime "subsonique" (*i.e.* $Fr << 1$) ce qui pourrait conduire à considérer un schéma implicite. Mais le phénomène que l'on étudie dans ce cas se propage à la vitesse des ondes du système ($c_{SV} = \sqrt{gh}$), même si les vitesses particulaires sont faibles. Ce cas est très analogue à l'étude d'ondes acoustiques avec le modèle d'Euler. Il n'est donc pas très intéressant, en fin de compte, d'utiliser un schéma implicite pour ce type de cas, sous peine de devoir utiliser un petit pas de temps pour être précis et donc de résoudre un système linéaire pour le "plaisir". Ce cas est illustré en figure 5.8(b). A l'inverse, lorsqu'on souhaite capter un phénomène d'advection tel qu'un vortex comme illustré en figure 5.8(a), l'utilisation d'une méthode implicite est *a priori* préférable puisqu'un pas de temps basé sur la vitesse des particules est suffisant.

En conclusion, c'est la physique du phénomène que l'on souhaite capter qui est à mettre en avant pour le choix d'un schéma. Encore une fois certains cas sont ambigus et nécessitent *a priori* des essais numériques pour se faire une idée précise de la méthode à préférer en terme rapport qualité/prix.

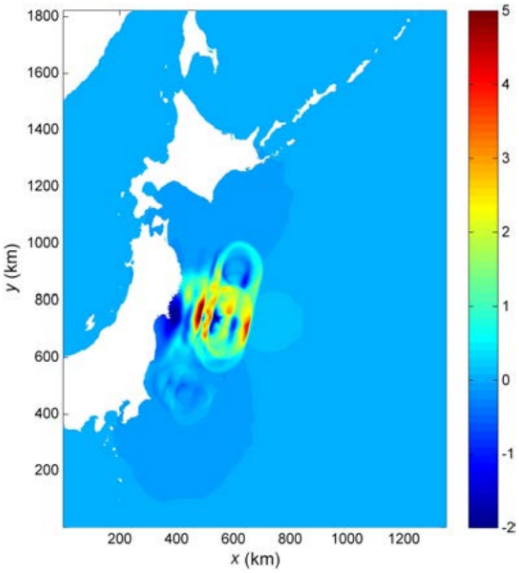
Dans le cadre de cette thèse, la partie propagation des ondes longues amène à considérer un schéma explicite. Certaines conséquences de la propagation, telles que la formation de ressaut sur les digues de protection ou de vortex quasi-stationnaires, pourraient faire tendre à revoir ce choix. Cependant en considérant le phénomène de propagation du large vers la côte dans son ensemble, un schéma explicite semble tout de même préférable. L'autre partie de cette thèse consacrée aux impacts sur des structures soulève beaucoup plus de questions quant au choix du schéma d'intégration en temps. Les détails du choix d'un modèle diphasique compressible dédié à ces phénomènes sont donnés au chapitre 4. Notons cependant qu'au vu de la discussion précédente et des cas tests ci-dessous, une bonne efficacité pour capter des ondes de choc ou des effets transsoniques voire supersoniques (attendus dans certains cas critiques d'impacts) tend à faire choisir une approche explicite. A l'inverse d'autres cas, sans doute plus probables, ne sollicitant pas ou peu la com-

pressibilité des fluides tendent à faire choisir un schéma implicite. On peut noter pour finir que si les effets compressibles ne sont pas sollicités, une méthode explicite pourrait être conservée en utilisant une approche dite quasi compressible consistant à modifier artificiellement la célérité des ondes acoustiques pour relaxer le pas de temps. Ces méthodes, bien qu'à manipuler avec précautions, peuvent *a priori* être une alternative intéressante à la résolution de modèles incompressibles bi-fluides (gouverné par un système elliptique), ou à la résolution de modèles compressibles avec un schéma implicite. La question du choix de schéma demeure cependant entière si l'on souhaite capter des phénomènes compressibles (plus ou moins importants) avec une approche unique comme dans cette thèse. Il semble alors préférable d'utiliser un schéma implicite en "sacrifiant" la précision de résolution d'onde de choc au détriment d'une bonne efficacité quant à la résolution des phénomènes faiblement compressibles compte tenu de la littérature à ce jour.

Les contraintes d'efficacité comparant des schémas implicites avec différentes CFL face à un schéma explicite pour différents cas tests sont illustrées dans les paragraphes qui suivent .



(a) Vortex généré dans le port Oarai, Prefecture d'Ibaraki lors du tsunami de 2011 au Japon (source : REUTERS/Kyodo, *cf.* [111] pour plus de détails).



(b) Propagation du tsunami de 2011 au Japon, image extraite de [131]. L'échelle de couleur indique le niveau de suface libre en mètres.

FIGURE 5.8 – Phénomène advectif et phénomène ondulatoire.

5.10.1 Cas test avec un méthode implicite à haute efficacité intrinsèque

Ce paragraphe vise à se faire une idée de l'efficacité globale d'un solveur implicite complexe face à un solveur explicite pour un cas test instationnaire de type tube à choc.

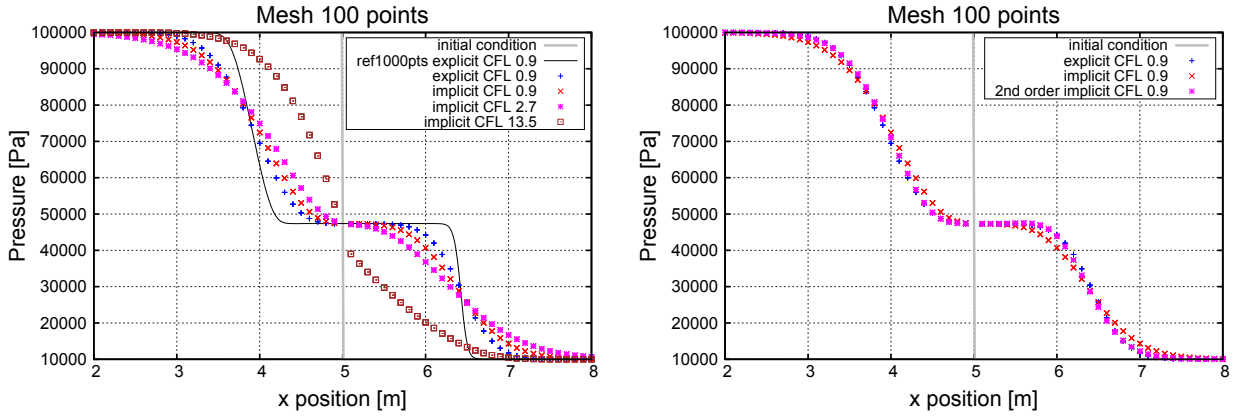
Le code commercial Fluent version 18.2 est utilisé. Le code Fluent suit le début de la méthode présentée précédemment (*i.e.* linéarisation des termes implicites) mais calcule explicitement la matrice Jacobienne. Le système matriciel linéaire à inverser est donc tridiagonal. Fluent contient également des solveurs linéaires plus évolués que celui basé sur la méthode de Jacobi. La méthode "Incomplete Lower Upper factorization" (ILU) est considérée dans ce paragraphe. Le solveur de Riemann utilisé est celui proposé par Roe [188]. Les deux méthodes d'intégration en temps (implicite et explicite) vont être testées pour la résolution des équations d'Euler (compressibles).

Le cas test considéré permet de les évaluer en condition de choc-détente (et onde de contact, mais qui n'est pas montrée pour des raisons de concision). Le fluide considéré est de l'air régi par la loi d'état des

gaz parfait. Les conditions initiales choisies sont $T = 300K$, $u = 0m/s$, avec à gauche du centre du tube $P = 100000Pa$ et à droite $Pa = 10000Pa$. Le tube mesure $10m$ et la simulation est effectuée sur $0.0036s$. La figure 5.9(a) présente le champ de pression obtenu avec le solveur explicite et le solveur implicite à différentes CFL. Il est clair que la qualité de la solution implicite se détériore avec l'augmentation de la CFL jusqu'à ne plus observer la bonne forme de l'écoulement. D'un autre côté, la méthode converge quoi qu'il en soit. La figure 5.9(b) montre l'effet de la montée en ordre du schéma implicite sur la solution obtenue. A même CFL, le schéma implicite au 2nd ordre donne des résultats similaires au schéma explicite. L'effet du raffinement de maillage est illustré en figure 5.10. L'écart de qualité entre la solution explicite et implicite à même CFL demeure au premier ordre et un déphasage est observé. Il est *a priori* nécessaire d'augmenter le nombre d'itérations par pas de temps pour y remédier. Pour finir, les temps de calcul associés ainsi que des commentaires qualitatifs sont donnés dans le tableau 5.1.

Le schéma explicite avec peu de points de calculs se dégage clairement. Pour ce cas test raide, l'utilisation d'un schéma implicite induira un surcoût de temps de calcul important à précision fixée face à un schéma explicite.

Remarque 20. *Les paramètres par défaut de Fluent ont été conservés. Le nombre d'itérations par pas de temps est de* 20*. Dans la majorité des cas présentés, les résidus obtenus sont inférieurs à* 10^{-2}*. Globalement, on peut observer que plus les CFL sont basses, plus les résidus chutent rapidement. A l'inverse, le calcul sur grille fine* ($dx = 0.01m$) *montre une moins bonne décroissance des résidus que son vis à vis sur grille large et nécessiterait sans doute plus d'itérations. Ceci explique a priori le déphasage obtenu face à la solution de référence. Une augmentation du nombre d'itérations augmenterait cependant le temps de calcul.*



(a) Effet de la CFL sur le schéma implicite.

(b) Effet le la montée en ordre sur le schéma implicite

FIGURE 5.9 – Différence entre solution explicite et implicite avec différentes CFL et ordres d'intégration en temps.

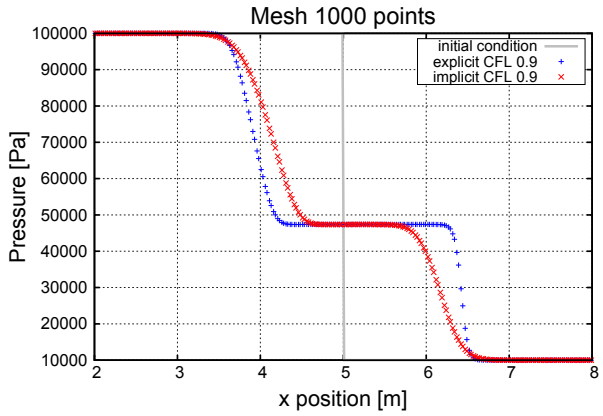


FIGURE 5.10 – Effet du raffinement de mailage sur le schéma explicite et implicite.

Schéma en temps	CFL	Temps CPU [s]	Qualité face à la référence	Efficacité (rapport qualité/prix)
explicite (1000 points)	0.9	0.63	référence	non applicable
explicite (100 points)	0.9	0.05	bonne	excellente
implicite (100 points)	0.9	0.82	assez bonne	mauvaise
implicite (100 points)	2.7	0.17	acceptable	correcte
implicite (100 points)	13.5	0.04	mauvaise	mauvaise
implicite 2nd ordre (100 points)	0.9	0.72	bonne	mauvaise
implicite (1000 points)	0.9	0.93	bonne (mais mauvaise phase)	acceptable

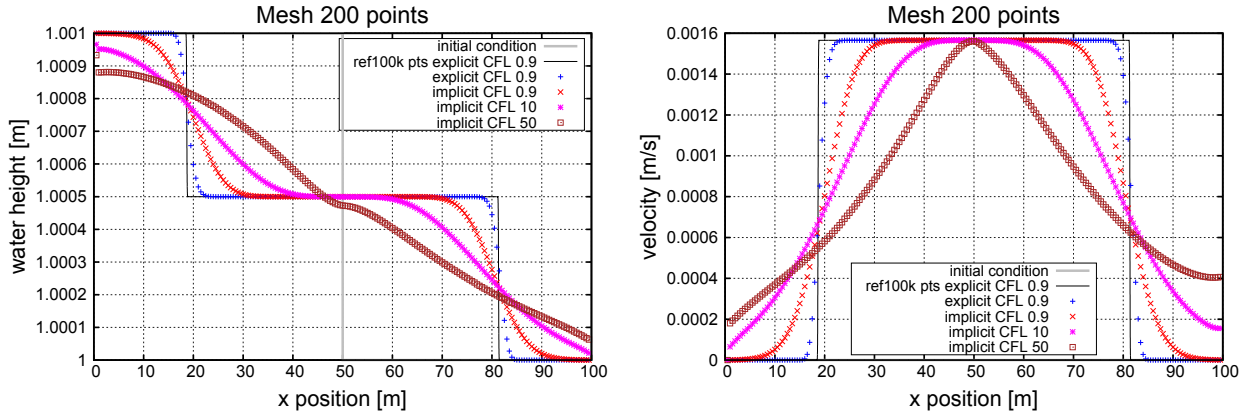
TABLE 5.1 – Récapitulatif des temps CPU pour les différentes intégrations en temps. Les commentaires donnés dans ce tableau sont purement qualitatifs et nécessiteraient, en toute rigueur, une batterie de calculs beaucoup plus poussée. On peut cependant noter sans ambiguité l'efficacité redoutable du schéma explicite avec peu de points de calcul face aux autres.

5.10.2 Cas tests avec un méthode implicite libre de matrice Jacobienne

Ce paragraphe, vise à se faire une idée de l'efficacité globale d'un solveur implicite à faible coût mémoire face à un solveur explicite, pour un cas test instationnaire de type tube à choc et un cas test stationnaire raide. A la différence du paragraphe précédent, un modèle plus simple est considéré : celui de SV. Un code 1D résolvant ces équations sur bathymétrie variable a été construit pour cela. La méthode de résolution implicite a été présentée dans la sous-section 5.5.2. Pour rappel, à l'inverse du paragraphe précédent, le système linéaire à inverser comporte uniquement des matrices diagonales, d'où un coût réduit de chaque sous-itération pour son inversion. L'inversion est effectuée par la méthode de Jacobi. Le solveur de Riemann, utilisé pour les termes implicites du schéma, est celui de Rusanov. Pour les termes "explicites" de ce schéma implicite, et évidemment du schéma totalement explicite, le solveur de Godunov a été considéré pour le cas test avec bathymétrie variable et celui de Rusanov pour l'autre cas.

Le premier cas test présenté est de type tube à choc et est analogue au cas effectué avec Fluent (hormis que le système de SV, plus simple, n'admet pas d'onde de contact). Les conditions initiales choisies sont une hauteur d'eau à gauche $h_G = 1.001m$ et à droite $h_D = 1m$, ainsi qu'une vitesse nulle partout. Le tube mesure $100m$ et la simulation est effectuée sur $10s$. La figure 5.11 montre le champ de hauteur d'eau et de vitesse obtenu pour le schéma explicite et implicite pour différentes CFL. La solution de référence est un

calcul explicite sur grille très fine ($100000 points$). Le comportement de la méthode implicite "sans matrice" est très similaire à la méthode plus complexe de Fluent présentée au paragraphe précédent. L'augmentation de la CFL induit une perte de précision. Le tableau 5.2 présente les temps de calcul associés, ainsi que des commentaires qualitatifs sur ce cas test.



(a) Effet de la CFL sur le schéma implicite. Champs de hauteur d'eau.

(b) Effet de la CFL sur le schéma implicite. Champs de vitesse.

FIGURE 5.11 – Différence entre solution explicite et implicite avec différentes CFL.

Schéma en temps	CFL	Temps CPU [s]	Qualité face à la référence	Efficacité (rapport qualité/prix)
explicite (100k points)	0.9	355	référence	non applicable
explicite (200 points)	0.9	0.004	bonne	excellente
implicite (200 points)	0.9	0.02	assez bonne	mauvaise
implicite (200 points)	10	0.008	acceptable	correcte
implicite (200 points)	50	0.004	mauvaise	mauvaise

TABLE 5.2 – Récapitulatif des temps CPU pour les différentes intégrations en temps. Les commentaires donnés dans ce tableau sont purement qualitatifs et nécessiteraient, en toute rigueur, une batterie de calculs beaucoup plus poussée. On peut cependant noter sans ambiguité l'efficacité redoutable du schéma explicite avec peu de points de calcul face aux autres. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus avec le code Fluent du paragraphe précédent.

Le second cas test présenté est un cas stationnaire de ressaut hydraulique supercritique. On note x la position horizontale, b la bathymétrie et h la hauteur d'eau. La bathymétrie est donnée par $b = 0.2 - 0.05 * (x-10)^2\ m$ pour $x = [8-12]m$ et $b = 0m$ sinon. La hauteur d'eau est $h = 0.33 - b$ (*i.e.* surface libre au repos) et une vitesse nulle partout dans le domaine. Aux limites, la hauteur d'eau est imposée à droite à $h_D = 0.33m$ tandis que la quantité de mouvement est imposée à gauche $(hu)_G = 0.18m^2/s$. Le tube mesure $30m$ et la simulation est effectuée sur $200s$ (temps approximatif nécessaire pour obtenir une solution convergée). La figure 5.12 montre à l'inverse des cas précédent une bonne qualité de résultat du schéma implicite, même à CFL élevé. Pour une CFL de 0.9, les résultats sont quasi identiques au schéma explicite et pour une CFL de 20, les résultats restent de qualité pour un coût de calcul réduit. Le tableau 5.3 présente les temps de calcul associés ainsi que des commentaires qualitatifs sur ce cas test. Il est clair pour ce cas test que l'utilisation d'un schéma implicite permet d'outrepasser les performances du schéma explicite.

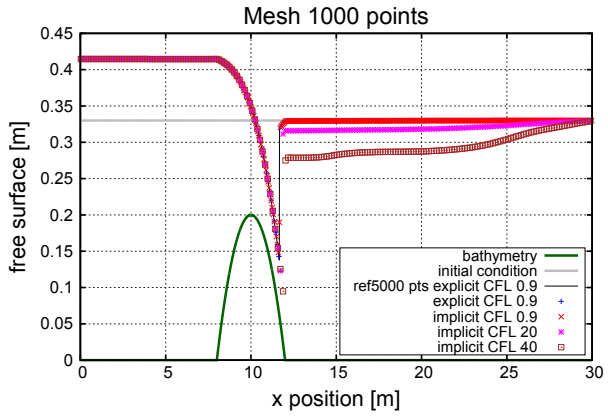


FIGURE 5.12 – Différence entre solution explicite et implicite avec différentes CFL.

Schéma en temps	CFL	Temps CPU [s]	Qualité face à la référence	Efficacité (rapport qualité/prix)
explicite (5000 points)	0.9	638.4	référence	non applicable
explicite (1000 points)	0.9	26.7	très bonne	acceptable
implicite (1000 points)	0.9	58.9	très bonne	mauvaise
implicite (1000 points)	20	4.9	correct	très bonne
implicite (1000 points)	40	1.6	acceptable	acceptable

TABLE 5.3 – Récapitulatif des temps CPU pour les différentes intégrations en temps. Les commentaires donnés dans ce tableau sont purement qualitatifs et nécessiteraient en toute rigueur une batterie de calculs beaucoup plus poussée. A l'inverse des cas précédents, on peut cependant noter la très bonne efficacité du schéma implicite à CFL modérée ($CFL = 20$). Ces résultats montrent que, pour ce cas stationnaire, un schéma implicite est à priviligier.

Remarque 21. *Le nombre maximal d'itérations par pas de temps considéré pour la méthode de Jacobi est de* 500*. Les résidus maximaux acceptés sont fixés à* 10^{-4}*, hors cas exhibant des difficultés de convergence. Il est très rare d'observer que* 500 *itérations soient nécessaires pour obtenir ce niveau de résidus, on observe en moyenne une trentaine d'itérations par pas de temps pour les cas tests présentés. Il est intéressant de noter, à la différence de Fluent, qu'un doublement de la CFL n'implique pas nécessairement une réduction par deux du temps CPU. Cela est dû au fait qu'ici nous avons fixé la précision et non le nombre d'itérations par pas de temps. Le taux de décroissance des résidus semble être fortement lié avec la force de la CFL employée. Des méthodes de CFL variables ont d'ailleurs été proposées et permettent dans certains cas une accélération non négligeable (cf. Bucker [34] par exemple).*

Une étude beaucoup plus poussée de Kloczko [113] montre que ce type de méthode implicite à faible coût mémoire est à privilégier lorsque de gros maillages sont considérés. En effet, la méthode d'inversion de système linéaire présentée dans le paragraphe précédent (méthode ILU du code Fluent) présente un coût mémoire non négligeable. Pour des grilles de calcul importantes cela peut vite devenir prohibitif, bien que l'efficacité intrinsèque (*i.e.* nombre d'itérations nécessaires pour inverser le système) de ce type d'approche soit supérieure. Reste alors la question du bon compromis à trouver entre efficacité intrinsèque et coût mémoire pour obtenir des performances optimales. Une étude comparative approfondie des solveurs implicites les plus réputés serait de ce point de vue intéressante. Il y a cependant fort à penser que les conclusions seront dépendantes des cas tests (influence de la raideur de la solution sur la convergence des algorithmes), dépendantes des modèles (nombre d'équations couplées), sans parler du rapport CPU/mémoire de l'unité de calcul considérée.

5.11 Bilan

Ce chapitre nous a permis de présenter quelques méthodes de base permettant de résoudre un système hyperbolique, dont certaines sont utilisées dans cette thèse. A défaut d'être les plus précises, les approches présentées ont fait leurs preuves et assurent une grande robustesse de résolution même en présence de phénomènes fortement non linéaires. Les "valeurs ajoutées" concernent la proposition d'une formulation particulière d'un schéma implicite simple et adéquat dans le cadre d'un code volumes finis sur maillage non structuré ainsi que la présentation d'une étude numérique sommaire comparant des schémas explicites et implicites. Également, le détail du traitement de condition aux limites pour un modèle diphasique a été présenté. Pour finir une explication du lien entre les méthodes de montée en ordre spatial TVD de type limiteur de pente et celles basées sur le formaliste de Barth et Jespersen [17] a été proposée. Concernant les tests numériques effectués comparant un schéma explicite et le schéma implicite libre de matrice, on note que ce dernier est prometteur pour les cas où l'advection est le phénomène dominant, et évidemment les cas stationnaires. Cependant, en dehors des cas tests relativement doux présentés, des difficultés de convergence ont été observées. Des études plus poussées demeurent donc nécessaire pour envisager son utilisation dans le contexte des impacts compressibles. Pour ces raisons, les discrétisations temporelles utilisées dans cette thèse se basent sur des schémas explicites.

Chapitre 6

Le problème “Bas Mach”

Sommaire

6.1 Introduction **110**
6.2 Difficultés à bas Mach **111**
6.3 Une estimation de l’erreur de troncature à bas Mach **112**
6.3.1 Cas 1D 113
6.3.2 Cas 2D 115
6.4 Quelques corrections **118**
6.4.1 Revue 118
6.4.2 Tests numériques 120
6.4.2.1 Tube à choc bas Mach 121
6.4.2.2 Tube à choc à Mach modéré 122
6.4.2.3 Vortex stationnaire 123
6.4.3 Bilan 126
6.5 Vers un schéma Tous Mach TVD **126**
6.5.1 Construction 126
6.5.2 Tests numériques 132
6.5.2.1 Tube à choc bas Mach 132
6.5.2.2 Vortex stationnaire 133
6.5.3 Bilan 136
6.6 Vers un schéma Tous Mach à oscillations réduites **136**
6.6.1 Construction 136
6.6.2 Tests numériques 137
6.6.2.1 Tube à choc bas Mach 138
6.6.2.2 Vortex stationnaire 139
6.6.3 Bilan 142
6.7 Conclusion **142**

Ce chapitre se focalise sur le problème numérique dit "Bas Mach" rencontré avec les schémas de type Godunov. Quelques résultats pionniers sur le sujet sont évoqués, et une analyse de l'erreur de troncature d'un schéma est proposée pour observer cette difficulté. Après quelques essais numériques de corrections de la littérature, des méthodes sont proposées pour éliminer ou réduire les oscillations parasites associées à ces préconditionnements. Des préconditionnements TVD et TVB en 1D sont obtenus et confrontés aux corrections de la littérature.

6.1 Introduction

Dans un grand nombre de situations le nombre de Mach d'un écoulement peut-être très varié. Les écoulements diphasiques sont particulièrement sujets à cette variabilité car les mélanges de phases induisent des vitesses acoustiques très faibles devant celles des phases pures (*cf.* chapitre 4). A vitesse donnée, le nombre de Mach varie donc fortement des zones pures aux zones mélangées. Dans le cadre de cette thèse, la vie d'un tsunami du large à la côte illustre bien cette variation du nombre de Mach. Lors de la phase de propagation d'onde, la vitesse des particules d'eau au large est de l'ordre de $1m/s$ ce qui donne $M << 1$. Ensuite, si les vagues déferlent, le régime de l'écoulement est de l'ordre de $M < 1$ (le nombre de Froude de l'écoulement est de l'ordre de $Fr \approx 1$ soit une vitesse particulaire de l'ordre de $10m/s$ pour une profondeur de $10m$ pour une onde longue). S'en suit la génération d'un mélange air-eau dont la vitesse du son est faible devant celles des phases pures et donc, $M \approx 1$. D'autre part, même sans génération de mélange, l'impact d'une vague qui va déferler sur une structure peut induire des vitesses très élevées et potentiellement des nombres de Mach non négligeables.

Pour modéliser tous ces régimes il faut considérer un modèle compressible. Un schéma numérique bien adapté à la résolution des modèles compressibles en régime transsonique ou supersonique est le schéma de Godunov [79] ou ses variantes approchées (*cf.* par exemple Toro [221] pour une vue d'ensemble de ces solveurs).

Hélas, lorsque $M \to 0$, les schémas de type Godunov deviennent inadaptés [223, 90, 88, 166, 53, 54]. C'est le cas aussi d'autres schémas colocalisés [227]. Lorsque l'écoulement peut être considéré comme incompressible, la convergence de ce type de schéma est très lente et demande en pratique des discrétisations inaccessibles en multi-D ($\triangle(x, y, z) \approx O(M)$) [54]. Aussi, on peut observer de faibles oscillations de pression non physiques. Dans le cas général, le symptôme majeur est une dissipation numérique excessive du schéma.

Ce problème est important dans une partie des travaux de cette thèse. En effet, pour traiter des impacts ou des déferlements, nous sommes confrontés à cette variété de régime d'écoulement et donc, comme nous travaillons avec des solveurs de type Godunov, à ce problème numérique.

Nous n'avons jusque là parlé que de problème "bas Mach", mais évidemment cette difficulté numérique concerne *a minima* la résolution de tous les systèmes hyperboliques avec des solveurs similaires, dès lors que certaines échelles deviennent disparates. On peut par exemple penser au cas "bas Froude" pour les modèles du type de Saint-Venant dans certaines conditions. Ce problème dépasse donc de loin le cadre "bas Mach". D'une manière générale, on parle de schéma qui ne respecte pas l'asymptotique d'un système.

Dans les paragraphes qui suivent, une revue expliquant plus précisément ces difficultés et donnant des corrections possibles est donnée en suivant en grande partie quelques articles fondateurs précédemment cités. Aussi une méthode est proposée pour mettre en évidence ce problème. Ensuite, en suivant quelques corrections de la littérature, des essais numériques sont présentés. L'intérêt pratique de ces corrections est illustré mais on verra aussi que des oscillations numériques apparaissent dans certaines conditions. Une analyse théorique de ce "problème" est proposée. Cette étude conduit à proposer des corrections des préconditionnements actuels pour éviter (ou à défaut réduire) ces oscillations parasites. Ces corrections sont, pour finir, testées pour évaluer leurs efficacités.

Remarque 22. *Notons qu'il existe une autre approche pour espérer traiter tous les régimes d'écoulement. Au lieu de considérer des méthodes numériques adaptées aux régimes transsoniques et supersoniques et de les étendre aux cas bas Mach, il est possible faire l'inverse. On considère des méthodes initialement conçues pour les régimes quasi incompressibles et on tente de les étendre aux cas à haut Mach. On rencontre alors*

des difficultés dans ces hauts régimes. Compte tenu de la relative simplicité des schémas de type Godunov et de leur robustesse à haut Mach, nous avons privilégié la première voie.

6.2 Difficultés à bas Mach

Dans ce paragraphe, on s'inspire des travaux de Guillard et Viozat [90] et Dellacherie [53] pour donner un aperçu des difficultés rencontrées à bas Mach.

Soit les équations d'Euler :

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{6.2.1}$$
$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x = 0 \tag{6.2.2}$$
$$(\rho E)_t + \big((\rho E + P)u\big)_x = 0 \tag{6.2.3}$$

Avec $E = \dfrac{u^2}{2} + \epsilon(\rho, P)$ et respectivement ρ, u, P, E et ϵ, la densité, la vitesse, la pression, l'énergie totale massique et l'énergie interne massique. Ce système est fermé dès lors qu'une équation d'état est connue ($\epsilon(\rho, P)$ ou $P(\rho, \epsilon)$). Pour des solutions régulières, ce système peut être mis sous la forme non conservative suivante (sans perte de généralité) :

$$\rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0 \tag{6.2.4}$$
$$\rho(u_t + uu_x) + P_x = 0 \tag{6.2.5}$$
$$P_t + uP_x + \rho c^2 u_x = 0 \tag{6.2.6}$$

Avec c la vitesse du son (la loi d'état est supposée convexe, $c^2 > 0$ pour $(\rho, \epsilon) \in (\mathbb{R}_*^+\mathbb{R}_*^+)$).

Remarque 23. *Notons que dans le cas barotrope principalement considéré dans cette thèse pour la modélisation diphasique, l'équation 6.2.4 est équivalente (pour une solution régulière) à 6.2.6. On reste cependant dans un cadre plus général ici car cela n'ajoute pas beaucoup de difficultés.*

En adimensionnant ce système avec $\rho = \rho_{ref}\tilde{\rho}$, $u = u_{ref}\tilde{u}$, $P = P_{ref}\tilde{P}$, $x = L_{ref}\tilde{x}$, $t = T_{ref}\tilde{t}$, en supposant de plus que l'échelle espace-temps est caractérisée par $\dfrac{L_{ref}}{T_{ref}} = u_{ref}$ et que la pression de référence est $P_{ref} = c^2\rho_{ref}$ (d'autres choix de pression donnent une mauvaise vitesse de propagation des ondes), on a :

$$\tilde{\rho}_{\tilde{t}} + \tilde{\rho}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}\tilde{\rho}_{\tilde{x}} = 0 \tag{6.2.7}$$
$$\tilde{\rho}(\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}}) + \frac{1}{M^2}\tilde{P}_{\tilde{x}} = 0 \tag{6.2.8}$$
$$\tilde{P}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{P}_{\tilde{x}} + \tilde{\rho}\tilde{c}^2\tilde{u}_{\tilde{x}} = 0 \tag{6.2.9}$$

Les " ˜ " sont ignorés dans la suite pour alléger les notations. On effectue maintenant un développement asymptotique sur toutes les variables (du type $f = f_0 + Mf_1 + M^2 f_2$ ...). En multipliant (6.2.8) par M^2, on trouve formellement que $(P_0)_x = O(M^2)$ puis que $(P_1)_x = O(M)$, puis que $(P_2)_x = O(1)$, d'où $\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = O(M^2)$. On a donc $P(x,t) = P_0(t) + M^2 P_2(x,t) + O(M^3)$. On obtient finalement à l'ordre dominant :

$$(\rho_0)_t + \rho_0(u_0)_x + u_0(\rho_0)_x = 0 \tag{6.2.10}$$
$$(u_0)_t + u_0(u_0)_x + \frac{1}{\rho_0}(P_2)_x = 0 \tag{6.2.11}$$
$$(u_0)_x = \frac{\frac{d}{dt}P_0}{\rho_0(c_0)^2} \tag{6.2.12}$$

L'intégrale du terme $(u_0)_x$ de l'équation (6.2.12) sur un domaine borné, en supposant des conditions aux limites periodiques, donne $\int (u_0)_x d\Omega = 0$. En supposant ce type de conditions aux limites et en intégrant l'équation (6.2.12) sur Ω, on trouve donc $\frac{d}{dt}P_0(t) = 0$. En reprenant (6.2.12) on a donc $(u_0)_x = 0$. Le système d'Euler compressible tend donc formellement vers le système d'Euler incompressible lorsque $M \to 0$ (sous réserve de conditions initiales et aux limites respectant les contraintes précédentes). Aussi, $\frac{d}{dt}P_0(t) = 0$ permet d'affiner la forme de la pression (adimensionnée) : $P(x,t) = P_0 + M^2 P_2(x,t) + O(M^3)$ avec P_0 une constante.

Le comportement du point de vue continu est maintenant plus clair. Pour qu'un schéma numérique soit bon dans un tel régime, il faut que la solution discrète se comporte de la même manière. Hélas, Guillard et Viozat ont montré formellement dans [90] que le schéma bien connu de Roe se comportait différemment avec $P(x_i, t^n) = P_0(t) + MP_1(x_i, t^n) + O(M^2)$. C'est le cas de la plupart des schémas colocalisés (*cf.* par exemple Dellacherie [53]).

Remarque 24. *Notons que dans le cas barotrope pour une loi d'état simple telle que* $P = P_{ref} + c_{ref}^2(\rho - \rho_{ref})$ *on a* $\rho(x,t) = \rho_0 + M^2\rho_2(x,t) + O(M^3)$ *avec* ρ_0 *une constante.*

Remarque 25. *Il est parfois argumenté que les maillages triangulaires ne sont pas sujets aux difficultés à bas Mach des schémas colocalisés. Il faut cependant rester prudent sur ce point car les articles démontrant ce "miracle" ([87, 55]) sont basés sur des conditions aux limites particulières. Le Martelot et al. [125] montrent sur une expérience numérique de type convergent 2D, sur un maillage triangulaire, qu'un préconditionnement demeure nécessaire. Il est aussi parfois argumenté que les cas 1D sont aussi exempt de ce problème. Encore une fois, la référence [53] démontrant cela est valide pour des conditions aux limites spécifiques. Le Martelot et al. présentent d'ailleurs des résultats 1D (formulation des équations d'Euler dans une conduite à section variable) souffrant du symptôme bas Mach. D'une manière générale il faut rester prudent sur les extensions de ces résultats intéressants à un cadre général.*

6.3 Une estimation de l'erreur de troncature à bas Mach

On a vu dans le paragraphe précédent, que les difficultés de convergence d'un schéma à bas Mach pouvaient se comprendre en regardant la consistance entre les fluctuations de pressions induites par le schéma utilisé, vis à vis de celles associées au système continue (travaux de Guillard et Viozat [90]). On propose ici de regarder le problème du point de vue de la dissipation numérique du schéma. On cherche donc également à évaluer la consistance du schéma mais de manière moins "locale". Évidemment il y a un lien direct entre ces deux points de vue. Un des intérêts de cette approche est d'obtenir *in fine* potentiellement plus de libertés pour envisager la correction du problème, au détriment d'une certaine "finesse" de l'approche précédente qui a largement fait ses preuves. Rieper [187], qui a suivi les travaux de Guillard et Viozat pour proposer un préconditionnement original et assez simple, estime la viscosité numérique engendrée par le terme problématique dans le cas particulier d'une pression constante au premier ordre. Notons d'ailleurs que c'est aussi le cas de Guillard et Viozat pour leur analyse de consistance de pression. L'analyse que l'on présente ne nécessite pas cette hypothèse.

Pour situer plus globalement ce travail par rapport à la littérature, il existe *grosso modo* trois approches pour caractériser le problème bas Mach. Une approche "expérimentale" avec des tests numériques, une approche formelle et une approche disons plus rigoureuse ou pointue. Le lecteur intéressé par des résultats "forts" de convergence peut par exemple se référer à Gallouët et al. [72]. Dans un cadre toujours théorique, mais plus explicatif, les travaux de Guillard et Viozat [90], Dellacherie [53] et Rieper [187] sont très intéressants. L'analyse proposée ci-après se place dans cette lignée mais est moins rigoureuse que celle de Dellacherie [53] car nous allons utiliser, entres autres, des développements de Taylor. Cet inconvénient est tout de même à pondérer par la relative simplicité (hors calcul un peu fastidieux) de la méthode et au final par le résultat principal permettant de "comprendre" ce problème (ou au moins une partie) et d'envisager une correction.

Pour éviter une déception du lecteur à la fin de ce paragraphe, précisons que le raisonnement présenté est un raisonnement par l'absurde. A la fin de ce paragraphe, on conclut en fait qu'il n'y a pas de problème bas Mach pour les équations d'Euler barotropes en 1D. La méthode proposée est, dans le paragraphe d'après, appliquée au cas 2D et permet de prouver que, dans ce cas, il y a un problème bas Mach dû à une diffusion excessive du schéma spatial.

6.3.1 Cas 1D

Les équations d'Euler compressibles barotropes sont considérées afin de simplifier les calculs. La loi d'état choisie est $P = c^2\rho$. On part d'une forme non conservative, peu restrictive pour une analyse à bas Mach. Ce système est adimensionné de la même manière que dans le paragraphe précédent ($f = f_{ref}\tilde{f}$), ce qui donne :

$$\tilde{\rho}_{\tilde{t}} + \tilde{\rho}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}\tilde{\rho}_{\tilde{x}} = 0 \tag{6.3.1}$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \frac{\tilde{c^2}}{\tilde{\rho}M^2}\tilde{\rho}_{\tilde{x}} = 0 \tag{6.3.2}$$

Soit sous forme matricielle (les " ˜ " sont ignorés dans la suite pour alléger les notations) :

$$W_t + A(W)W_x = 0$$
$$\text{avec } W = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \text{ et } A(W) = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \dfrac{c^2}{\rho M^2} & u \end{pmatrix}.$$

On se place maintenant sous l'approximation linéaire. Il suffit pour cela de supposer de faibles fluctuations des variables autour d'une valeur de référence, $f(x,t) = f_0 + \epsilon f_1(x,t)$ avec $\epsilon << 1$, seuls les termes dominants sont alors retenus. La jacobienne devient ($u_0 \in \mathbb{R}$ et $(\rho_0, c_0) \in \mathbb{R}^2_{+,*}$) :

$$A_0 = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 \\ \dfrac{c_0^2}{\rho_0 M^2} & u_0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 26. *Notons que les valeurs de référence f_{ref}, utilisées pour adimentionner le système, sont différentes de celles utilisées pour obtenir l'approximation linéaire f_0 si on les dimensionnait. Cela veut dire que l'on peut choisir de travailler autour d'un état socle à vitesse nulle $u_0 = 0$, sans pour autant avoir $M = u_{ref}/c_{ref}$ nul. Dans [54], Dellacherie travaille avec cette approximation "acoustique".*

Le schéma de Lax-Friedrichs est considéré pour sa simplicité, pour lequel on rappelle le calcul du flux : $F_{i+1/2} = \dfrac{F(U_i) + F(U_{i+1})}{2} - \dfrac{\triangle x}{2\triangle t}(U_{i+1} - U_i)$. Pour éviter de complexifier le raisonnement, on suppose $u_0 \geqslant 0$. L'application de la méthode des volumes finis avec ce schéma donne :

$$\rho_t = \frac{-1}{2\triangle x}\big(\rho_0(u^n_{i+1} - u^n_{i-1}) + u_0(\rho^n_{i+1} - \rho^n_{i-1}) - \frac{\triangle x}{\triangle t}(\rho^n_{i+1} - 2\rho^n_i + \rho^n_{i-1})\big) \tag{6.3.3}$$

$$u_t = \frac{-1}{2\triangle x}\big(u_0(u^n_{i+1} - u^n_{i-1}) + \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2}(\rho^n_{i+1} - \rho^n_{i-1}) - \frac{\triangle x}{\triangle t}(u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1})\big) \tag{6.3.4}$$

On effectue un développement de Taylor des différentes variables que l'on injecte dans le système (le lecteur est renvoyé à l'Annexe C pour plus de détails sur ces développements) :

$$\rho_t = \frac{-1}{2\triangle x}\Big(\rho_0 2\triangle x(u^n_i)_x + u_0 2\triangle x(\rho^n_i)_x + O\big((\triangle x)^3\big) - \frac{\triangle x}{\triangle t}\Big((\triangle x)^2(\rho^n_i)_{xx} + O\big((\triangle x)^4\big)\Big)\Big) \tag{6.3.5}$$

$$u_t = \frac{-1}{2\triangle x}\Big(u_0 2\triangle x(u^n_i)_x + \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2}2\triangle x(\rho^n_i)_x + O\big((\triangle x)^3\big) - \frac{\triangle x}{\triangle t}\Big((\triangle x)^2(u^n_i)_{xx} + O\big((\triangle x)^4\big)\Big)\Big) \tag{6.3.6}$$

Soit en arrangeant les termes :

$$\rho_t + \rho_0(u_i^n)_x + u_0(\rho_i^n)_x + (\rho_i^n)_{xx}\big(-\frac{(\triangle x)^2}{2\triangle t}\big) = O\big((\triangle x)^2\big) \tag{6.3.7}$$

$$u_t + u_0(u_i^n)_x + \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2}(\rho_i^n)_x + (u_i^n)_{xx}\big(-\frac{(\triangle x)^2}{2\triangle t}\big) = O\big((\triangle x)^2\big) \tag{6.3.8}$$

Soit sous forme matricielle :

$$W_t + A_0 W_x + D_0 W_{xx} = O\big((\triangle x)^2\big)$$
$$\text{avec } D_0 = \begin{pmatrix} -\frac{(\triangle x)^2}{2\triangle t} & 0 \\ 0 & -\frac{(\triangle x)^2}{2\triangle t} \end{pmatrix}.$$

On appelle parfois ce système, le “système modifié”. On reconnaît le système de départ dans les deux premiers termes de gauche. L'erreur de troncature, noté E, est définie par l'écart entre le système exact et le système réellement résolu par le schéma employé (*i.e.* le système modifié). On a donc :

$$E = D_0 W_{xx} + O\big((\triangle x)^2\big) \tag{6.3.9}$$

On appelle dans la suite D_0 la matrice de diffusion. Une analyse de stabilité de Von Neumann permet de montrer qu'un choix de pas de temps nécessaire à la stabilité (au sens L_2) est :

$$\triangle t = CFL\frac{\triangle x}{u_0 + c_0/M} \tag{6.3.10}$$

avec $CFL \leq 1$. La démonstration d'un résultat analogue est donnée au chapitre 5. Il faut maintenant caractériser plus finement l'erreur de troncature. Pour alléger les notations, on note la matrice D_0 :

$$D_0(W) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{6.3.11}$$

Pour voir quel terme pose éventuellement problème et dans quelle équation, on décompose le vecteur E en développant les termes précédents sur l'équation de conservation de masse et de quantité de mouvement, soit :

$$E_{masse} = \alpha\rho_{xx} + O\big((\triangle x)^2\big) \tag{6.3.12}$$
$$E_{qdm} = \alpha u_{xx} + O\big((\triangle x)^2\big) \tag{6.3.13}$$

Comme c'est le comportement à bas Mach qui nous intéresse, estimons les différents termes dans ce cas. En injectant l'équation (6.3.10) dans α on a :

$$\alpha = -\frac{\triangle x}{2}\frac{u_0 + c_0/M}{CFL} \tag{6.3.14}$$

$$\text{soit pour } M \longrightarrow 0 : \alpha = O(\frac{\triangle x}{M}) \tag{6.3.15}$$

Il faut maintenant évaluer les termes de W_{xx}. La clef est d'effectuer un développement asymptotique sur toutes les variables (du type $f = f_{o0} + Mf_{o1} + M^2 f_{o2}$ ...) et de les injecter dans le système modifié. Ce type de raisonnement a par exemple été effectué par Delacherie [53] sur le système d'Euler exact. Ici on utilise cette approche formelle sur le système modifié. Comme on cherche simplement l'ordre de grandeur de W_{xx} en terme de Mach, les termes linéarisés (u_0, ρ_0, c_0), qui sont indépendants de M, sont “ignorés” pour alléger les

notations (*i.e.* $(u_0, \rho_0, c_0) = O(1)$) sans perte de généralité. Pour la même raison on a ici $O(\frac{\triangle x}{M}) = O(\frac{1}{M})$, et on ignore le termes d'ordre inférieur. Le système modifié est :

$$\rho_t + u_x + \rho_x + O(\frac{1}{M})\rho_{xx} = 0 \tag{6.3.16}$$

$$u_t + u_x + O(\frac{1}{M^2})\rho_x + O(\frac{1}{M})u_{xx} = 0 \tag{6.3.17}$$

Après injection des variables développées, l'équation (6.3.16) donne au premier ordre $(\rho_{o0})_{xx} = O(M)$. En multipliant l'équation de quantité de mouvement (6.3.17) par M^2, on trouve au premier ordre $(\rho_{o0})_x = O(M)$ et $(u_{o0})_{xx} = O(1)$. On a donc estimé W_{xx} à bas Mach :

$$W_{xx} = \begin{pmatrix} O(M) \\ O(1) \end{pmatrix} . \tag{6.3.18}$$

On a finalement (grâce aux estimations (6.3.15) et (6.3.18)) les erreurs de troncatures à bas Mach suivantes :

$$\boxed{E_{masse} = O\Big(\triangle x\Big)} \tag{6.3.19}$$

$$\boxed{E_{qdm} = O\Big(\frac{\triangle x}{M}\Big)} \tag{6.3.20}$$

On pourrait *a priori* conclure que l'asymptotique n'est pas préservée à bas Mach pour la résolution de ce modèle avec le schéma de Lax-Friedrichs. En fait ce n'est pas le cas. Une des hypothèses initiales de cette analyse était qu'il existe une échelle donnant : $\frac{L_{ref}}{T_{ref}} = u_{ref}$. Or ces équations admettent des ondes caractéristiques qui se déplacent aux vitesses $u + c$ et $u - c$ mais aucune onde de vitesse u. L'échelle d'adimensionnement choisie est donc incorrecte. En prenant une vrai échelle caractéristique du système, comme $\frac{L_{ref}}{T_{ref}} = c_{ref}$, le nombre de Mach n'apparaît plus dans le raisonnement et le problème disparaît. En conclusion, la résolution des équations d'Euler barotrope 1D à bas Mach par le solveur de Lax-Friedrichs ne pose aucun problème.

Le cas 2D est traité dans le paragraphe qui suit.

6.3.2 Cas 2D

On part des équations d'Euler 2D, avec $\overrightarrow{u} = (u, v)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\big(\rho \overrightarrow{u}\big) = 0 \tag{6.3.21}$$

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{u}}{\partial t} + div\big(\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u} + P\overline{\overline{I}}\big) = 0 \tag{6.3.22}$$

Ce système est mis sous forme non conservative, adimensionné et linéarisé comme dans le cas $1D$:

$$W_t + A_0 W_x + B_0 W_y = 0$$

$$\text{avec } W = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} , \; A_0 = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2} & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \text{ et } B_0 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \rho_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2} & 0 & v_0 \end{pmatrix} .$$

L'application du schéma de Lax-Friedrichs, avec $\{u_0, v_0\} \geqslant 0$ pour simplifier, donne sur une grille cartésienne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} =& \frac{-1}{2\triangle x}\big(\rho_0(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + u_0(\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) - \frac{\triangle x}{\triangle t}(\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n)\big) \\
& \frac{-1}{2\triangle y}\big(\rho_0(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + v_0(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) - \frac{\triangle y}{\triangle t}(\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n)\big) \qquad (6.3.23) \\
\frac{\partial u}{\partial t} =& \frac{-1}{2\triangle x}\big(u_0(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2}(\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) - \frac{\triangle x}{\triangle t}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\big) \\
& \frac{-1}{2\triangle y}\big(v_0(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\triangle y}{\triangle t}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)\big) \qquad (6.3.24) \\
\frac{\partial v}{\partial t} =& \frac{-1}{2\triangle x}\big(u_0(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) - \frac{\triangle x}{\triangle t}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)\big) \\
& \frac{-1}{2\triangle y}\big(v_0(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) - \frac{\triangle y}{\triangle t}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)\big) \qquad (6.3.25)
\end{aligned}$$

On remplace les différentes opérations par leur développement de Taylor associé. Après calculs, on obtient sous forme matricielle :

$$\boxed{W_t + A_0 W_x + B_0 W_y + D_0 W_{xx} + D_1 W_{yy} = O\big((\triangle x)^2, (\triangle y)^2\big)} \qquad (6.3.26)$$

$$\text{avec } D_0 = \begin{pmatrix} (-\frac{(\triangle x)^2}{2\triangle t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\triangle x)^2}{2\triangle t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\triangle x)^2}{2\triangle t} \end{pmatrix}, \qquad (6.3.27)$$

$$\text{et } D_1 = \begin{pmatrix} (-\frac{(\triangle y)^2}{2\triangle t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\triangle y)^2}{2\triangle t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\triangle y)^2}{2\triangle t} \end{pmatrix}. \qquad (6.3.28)$$

L'erreur de troncature est définie par :

$$E = D_0 W_{xx} + D_1 W_{yy} + O\big((\triangle x)^2, (\triangle y)^2\big) \qquad (6.3.29)$$

On évalue maintenant les différents termes de l'erreur de troncature à bas Mach. Les termes des matrices de diffusion sont directement quantifiables, tandis que les termes de W_{xx} et W_{yy} sont évalués grâce à un

développement asymptotique en Mach comme dans le cas 1D. On a :

$$D_0 = \begin{pmatrix} O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) & 0 & 0 \\ 0 & O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) & 0 \\ 0 & 0 & O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) \end{pmatrix}, \tag{6.3.30}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) & 0 & 0 \\ 0 & O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) & 0 \\ 0 & 0 & O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) \end{pmatrix}, \tag{6.3.31}$$

$$\text{et } W_{xx} = \begin{pmatrix} O(M) \\ O(1) \\ O(1) \end{pmatrix}, W_{yy} = \begin{pmatrix} O(M) \\ O(1) \\ O(1) \end{pmatrix}. \tag{6.3.32}$$

Finalement les erreurs de troncature sur les équations sont :

$$\boxed{E_{masse} = O\Big((\triangle x, \triangle y)\Big)} \tag{6.3.33}$$

$$\boxed{E_{qdm-x} = O\Big(\frac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big)} \tag{6.3.34}$$

$$\boxed{E_{qdm-y} = O\Big(\frac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big)} \tag{6.3.35}$$

A la différence du cas 1D, le système d'Euler 2D barotrope admet des ondes caractéristiques à vitesse u et v. Par exemple les valeurs propres de A_0 sont $\lambda_1 = u_0 - c_0/M$, $\lambda_2 = u_0$ et $\lambda_3 = u_0 - c_0/M$. Il existe donc des phénomènes caractérisés par ces vitesses. Pour l'étude de ces phénomènes, à bas Mach, les erreurs de troncature sur les équations de quantité de mouvement explosent. Ce raisonnement prouve que, pour les équations discrètes étudiées, le problème bas Mach est un problème multi-D. Pour que ce schéma soit précis à bas Mach, il faut donc $\triangle x = O(M)$ ce qui est quasiment impraticable (résultat en accord avec Dellacherie et al. [54]).

En l'état, on a vu que ce sont les termes de diffusion sur les vitesses qui posent problème. Une solution pratique est donc de réduire la diffusion sur ces variables. Les équations discrètes corrigées (6.3.24) et (6.3.25) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} =& \frac{-1}{2\triangle x}\big(u_0(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2}(\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) - \Theta\frac{\triangle x}{\triangle t}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\big) \\ & \frac{-1}{2\triangle y}\big(v_0(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \Theta\frac{\triangle y}{\triangle t}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)\big) \end{aligned} \tag{6.3.36}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} =& \frac{-1}{2\triangle x}\big(u_0(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) - \Theta\frac{\triangle x}{\triangle t}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)\big) \\ & \frac{-1}{2\triangle y}\big(v_0(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{c_0^2}{\rho_0 M^2}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) - \Theta\frac{\triangle y}{\triangle t}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)\big) \end{aligned} \tag{6.3.37}$$

Le terme correcteur Θ doit être d'ordre $O(M)$ à bas Mach. On peut aussi imposer qu'il tende vers $O(1)$ (*i.e.* schéma classique) lorsque $M \longrightarrow 1$ car, à ces régimes, le schéma initial est performant. On prend donc :

$\Theta = min(M, 1)$. Les matrices de diffusion sont caractérisées par les ordres suivant à bas Mach :

$$D_0 = \begin{pmatrix} O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) & 0 & 0 \\ 0 & O\Big((\triangle x, \triangle y)\Big) & 0 \\ 0 & 0 & O\Big((\triangle x, \triangle y)\Big) \end{pmatrix}, \tag{6.3.38}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} O\Big(\dfrac{(\triangle x, \triangle y)}{M}\Big) & 0 & 0 \\ 0 & O\Big((\triangle x, \triangle y)\Big) & 0 \\ 0 & 0 & O\Big((\triangle x, \triangle y)\Big) \end{pmatrix}. \tag{6.3.39}$$

Ce qui implique avec la même méthode que dans le cas non corrigé :

$$W_{xx} = \begin{pmatrix} O(M) \\ O(1) \\ O(1) \end{pmatrix}, W_{yy} = \begin{pmatrix} O(M) \\ O(1) \\ O(1) \end{pmatrix}. \tag{6.3.40}$$

D'où :

$$\boxed{E_{qdm-x} = O\Big(\triangle x, \triangle y\Big)} \tag{6.3.41}$$

$$\boxed{E_{qdm-y} = O\Big(\triangle x, \triangle y\Big)} \tag{6.3.42}$$

Le préconditionnement permet de retrouver un schéma qui préserve l'asymptotique.

On va voir dans le paragraphe qui suit que ce résultat est cohérent avec les corrections proposées dans la littérature. Il est important de noter que, même si le raisonnement théorique est effectué dans le cas linéaire, ce cas simple suffit pourtant pour mettre en évidence des difficultés à bas Mach. Évidemment, il ne faut pas exclure que les non-linéarités puissent amplifier ce phénomène. Ceci est en accord avec Dellacherie [53].

6.4 Quelques corrections

6.4.1 Revue

Ce paragraphe donne une revue de quelques préconditionnements pour corriger le problème bas Mach. En dehors des articles proposant ces corrections, le lecteur est renvoyé à Guillard et Nkonga [89] pour une récente revue des corrections possibles.

Préconditionnement de Turkel :
Une des premières corrections proposées pour éliminer ce problème bas Mach est attribué à Turkel [223]. Pour suivre ses travaux on se replace dans un cadre général en considérant le système énergétique (*cf.* équations (6.2.4), (6.2.5) et (6.2.6)), la réduction au cas barotrope étant naturelle. Pour forcer la condition d'incompressibilité : un terme est ajouté à l'équation "problématique" du système au premier ordre (*cf.* equations (6.2.10), (6.2.11) et (6.2.12)) :

$$\frac{1}{M^2}(P_0)_t + \rho_0(c_0)^2(u_0)_x = 0$$

Donc si $M \longrightarrow 0$ on aura bien $(u_0)_x \longrightarrow 0$. Notons que cette manipulation des équations au niveau continu rend ce raisonnement ambigu. En effet, il est important de rappeler qu'au niveau continu il n'y a aucun problème de convergence des équations compressibles vers celles incompressibles pour $M \longrightarrow 0$. En fait,

l'idée est de modifier le système continu de sorte qu'au niveau discret les choses se passent bien. Considérant cela, on a le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0 \\
&u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}P_x = 0 \\
&P_t + M^2 uP_x + M^2\rho c^2 u_x = 0
\end{aligned}$$

On forme la Jacobienne et on trouve des vitesses acoustiques préconditionnées :

$$\begin{aligned}
\tilde{c_-} &= \frac{(1-M^2)u + \sqrt{(M^2-1)^2u^2 + 4M^2c^2}}{2} \\
\tilde{c_+} &= \frac{(M^2-1)u + \sqrt{(M^2-1)^2u^2 + 4M^2c^2}}{2}
\end{aligned}$$

$M = M_{ref}$ peut être fixé globalement ou localement suivant certaines règles (*cf.* Le Martelot et al. [125]). On voit qu'en réduisant les vitesses d'ondes on a l'effet escompté car la diffusion numérique est directement liée à ces vitesses. Par voie de conséquence cela corrige la diffusion de toutes les variables. Il semble donc que cette approche fasse plus que nécessaire compte tenu du résultat du paragraphe précédent. Cette approche demeure cependant une référence. Le défaut principal de cette méthode est que la contrainte CFL est pénalisée pour un schéma explicite (*cf.* Birken [26]) :

$$\triangle t \leq CFL * M_{ref,min}\frac{\triangle x}{Max(|u|+c)}$$

Ce point est très contraignant. Pour obtenir un solveur efficace, il faut employer un schéma implicite en temps. Notons également que pour éviter des problèmes de singularité il faut donner une borne inférieure à M_{ref} qui n'est pas évidente à calibrer (*cf.* par exemple [113]).

Le lecteur est renvoyé aux travaux de Murrone et Guillard [166] et Le Martelot et al. [125] pour l'utilisation de cette méthode dans un cadre diphasique instationnaire.

Remarque 27. *Il est important de préciser que les travaux de Turkel étaient initialement réservés aux écoulements stationnaires (le lecteur peut se référer à Le Martelot et al. [125] pour plus de détails sur l'évolution de cette approche). Notons aussi que l'idée générale de la méthode n'est pas exactement due à Turkel. Chorin [42] a en effet proposé quelques années avant de transformer les équations d'Euler incompressibles en ajoutant un terme de compressibilité artificielle pour rendre le système elliptique hyperbolique et donc faciliter la résolution. Sans entrer dans les détails, l'approche est "simplement" de modifier artificiellement la vitesse des ondes du système initial, tout comme on vient de le voir précédemment. Turkel a cependant largement généralisé cette approche du compressible vers l'incompressible et vice versa.*

Préconditionnement de Dellacherie :

L'analyse fine de Dellacherie [53] indique qu'il faut éliminer la diffusion sur la discrétisation de la pression pour résoudre les équations d'Euler à bas Mach avec un schéma de type Godunov. Il propose un schéma bas Mach [53] puis "Tous Mach" [54] qui permet d'éliminer ce problème. Pour cela il propose de centrer la discrétisation de la pression dans le schéma initial (souffrant du défaut bas Mach). Rappelons que le flux d'un schéma type Godunov peut s'écrire $F^* = F_{centré} + \alpha F_{décentré}$ et que le terme α induit de la diffusion ce qui stabilise le schéma (un flux centré donne un schéma instable). Pour obtenir un schéma "Tous Mach", il propose de lier les deux types de flux afin de retrouver un schéma de type-Godunov "pur" lorsque $M \longrightarrow 1$ et un schéma centré lorsque $M \longrightarrow 0$. La liaison entre les deux schémas est assurée par une fonction linéaire, avec F^P le flux sur la pression :

$$\begin{aligned}
&F^P_{all-Mach} = \phi * F^P_{God} + (1-\phi) * F^P_{cen} \\
&\text{avec } \phi = min(max(M_L, M_R), 1)
\end{aligned}$$

Cette correction donne de bons résultats et est stable au sens énergétique pour une CFL classique. Notons que la preuve de stabilité énergétique n'est en soit pas suffisante et qu'une preuve de stabilité au sens L_2 serait intéressante ; reste que ce résultat est déjà très encourageant. Seule la correction pour le schéma de Godunov est présentée ici, mais Dellacherie a aussi proposé les corrections analogues pour la plupart des solveurs de Riemann approchés. On peut se demander quel est le lien entre une réduction de la diffusion numérique sur la pression et la condition déterminée dans le paragraphe 6.3 stipulant qu'il faut réduire la diffusion numérique sur la vitesse. En fait ceci est "équivalent" comme démontré par Dellacherie et al. [54]. Le lecteur est d'ailleurs renvoyé à cet article faisant le lien entre la plupart des corrections rencontrées dans la littérature. Notons que cette approche ne demande pas d'introduire un "cut-off" minimum sur ϕ contrairement à l'approche de Turkel.

Remarque 28. *On peut se laisser tenter d'analyser cette non perte de stabilité à l'inverse de l'approche de Turkel. Ici seul le terme vraiment problématique est corrigé à l'inverse de Turkel qui réduit la diffusion partout. Comme ce qui semble importer pour qu'un schéma soit stable est d'avoir une diffusion minimale globale, le fait de tuer la diffusion sur la pression sans pour autant en faire de même sur les autres variables permet de conserver un minimum de diffusion. Le fait que la stabilité soit conservée à CFL classique indique que les schémas de type Godunov peuvent être améliorés dans certaines conditions en réduisant leur diffusion. Depuis le début de ce paragraphe "on dit" que la CFL n'est pas pénalisée, on verra en fait sur des exemples numériques qu'elle l'est, mais de manière acceptable.*

Préconditionnement de Thornber et Rieper :

Thornber et al. [216] ont proposé une correction attrayante, car très simple à implémenter dans la plupart des solveurs. L'idée est de centrer les vitesses en amont de leur utilisation pour le calcul des flux. Encore une fois, le fait de centrer les vitesses réduit la diffusion numérique sur ces variables. En amont de la résolution du problème de Riemann on pose (avec u le vecteur vitesse) :

$$u_L = \frac{u_L + u_R}{2} + \phi \frac{u_L - u_R}{2} \tag{6.4.1}$$

$$u_R = \frac{u_L + u_R}{2} + \phi \frac{u_R - u_L}{2} \tag{6.4.2}$$

$$\text{avec } \phi = min(max(M_L, M_R), 1) \tag{6.4.3}$$

Rieper [187] a proposé une correction adaptée au solveur de Roe consistant à réduire le saut de vitesses normales lors du calcul des flux, ce qui est en accord avec les résultats obtenus au paragraphe 6.3.2. L'expression de ce préconditionnement est donc similaire à celui de Thornber mais en ne considérant que les directions normales. Selon Oßwald et al. [169], le préconditionnement de Thornber peut potentiellement induire des effets secondaires mais nous n'avons pas rencontré cela avec cette correction. Selon Thornber cette correction ne pénalise pas la condition CFL de base. Nous reviendrons sur cette assertion dans le paragraphe suivant.

Remarque 29. *Cette revue des méthodes permettant de corriger le problème bas Mach est clairement non exhaustive. Il existe de nombreux travaux traitant ce problème. Pour avoir une vision plus complète des recherches sur le sujet le lecteur peut se référer par exemple à Haack et al. [91], Sun et al. [210], Miczek et al. [155], Degong et al. [52], Iampietro et al. [100].*

6.4.2 Tests numériques

Le but de cette section est d'évaluer les corrections Tous Mach évoquées précédemment dans différentes conditions. Nous nous restreignons cependant à celles de Thornber et de Dellacherie car celle de Turkel induit une condition de stabilité L_2 inenvisageable avec un solveur explicite. Ces tests sont effectués avec les équations d'Euler barotropes, mais encore une fois, d'autres systèmes auraient pu être considérés comme par exemple celui de SV. La loi d'état choisie est $P = P_{ref} + c_{ref}^2(\rho - \rho_{ref})$. Le solveur employé est celui de Godunov. La résolution est du premier ordre en temps et en espace. Les corrections de ce solveur sont notées dans la suite "prec Dellacherie" et "prec Thornber" (pour préconditionnement).

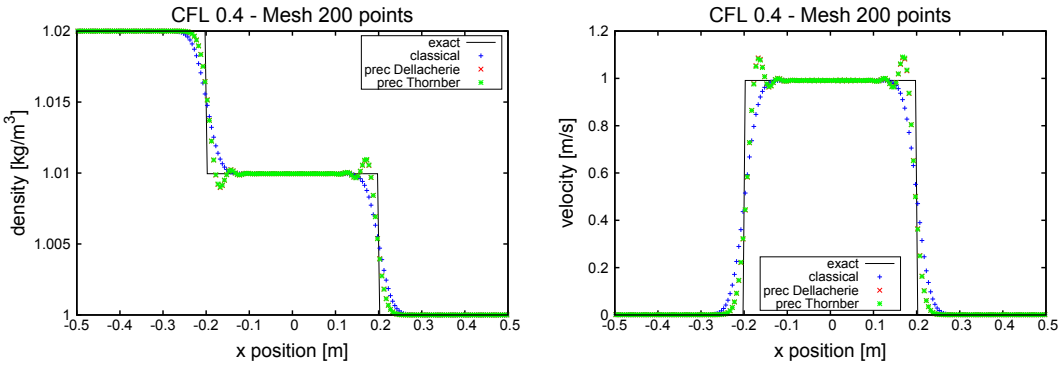
6.4.2.1 Tube à choc bas Mach

Les conditions initiales de ce premier cas test sont données en Table 6.1. La vitesse du son est fixée à $c_{ref} = 100m/s$. La masse volumique de référence est $\rho_{ref} = 1kg/m^3$. Ce cas est simulé sur $t_{max} = 0.002s$ sur un tube de $1m$ centré en $x = 0$.

Deux CFL sont présentées : les figures 6.1 et 6.2 présentent respectivement les résultats obtenus avec $CFL = 0.4$ et $CFL = 0.8$. Notons que seuls les champs de masse volumique et de vitesse sont présentés car la pression et le nombre de Mach sont évidemment redondants pour ce système.

$\rho_L[kg/m^3]$	$u_L[m/s]$	$\rho_R[kg/m^3]$	$u_R[m/s]$
1.02	0.001	1	0.001

TABLE 6.1 – Conditions initiales du cas test tube à choc bas Mach.



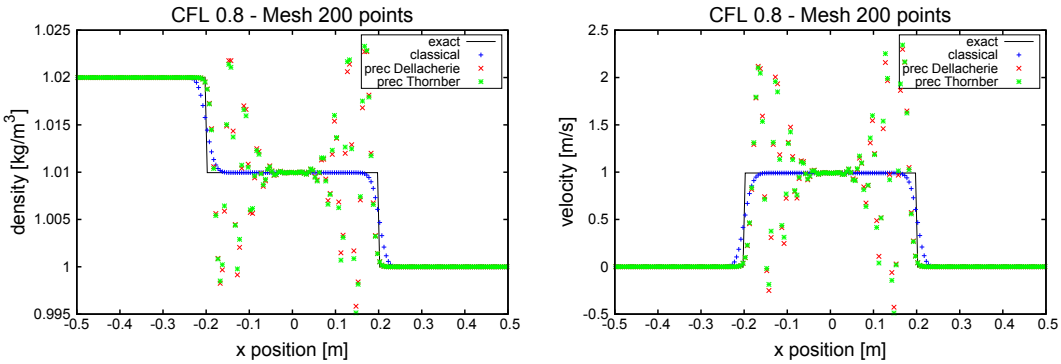
(a) Masse volumique.

(b) Vitesse.

FIGURE 6.1 – Tube à choc bas Mach ($M_{max} \approx 0.01$). Effet du préconditionnement avec $CFL = 0.4$.

On observe, pour cette $CFL = 0.4$, des oscillations avec les deux corrections étudiées. Également, les solveurs sont stables au sens L_2 car en raffinant le maillage les oscillations observées décroissent et la solution numérique converge. Cela semble être le cas dès lors que $CFL \leq 0.5$. Des oscillations similaires (bien que difficilement observables vu la finesse du maillage employé par les auteurs) sont visibles dans Dellacherie et al. [54]. Notons que dans un cadre légèrement différent, Iampietro et al. [100] observent aussi ce type d'oscillations. Les résultats entre les deux corrections sont quasi identiques.

A $CFL = 0.8$ la condition de stabilité est clairement altérée. En l'état, il faut donc exclure une telle CFL. Ces résultats montrent que les corrections étudiées réduisent la stabilité du schéma initial. Notons cependant que la réduction de CFL nécessaire pour obtenir la stabilité est acceptable.



(a) Masse volumique. (b) Vitesse.

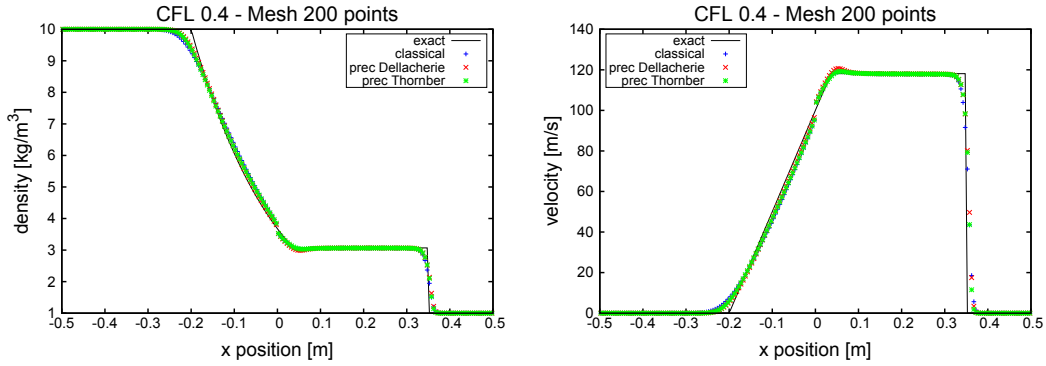
FIGURE 6.2 – Tube à choc bas Mach ($M_{max} \approx 0.01$). Effet du préconditionnement avec $CFL = 0.8$.

6.4.2.2 Tube à choc à Mach modéré

Pour ce cas test plus raide induisant des vitesses supersoniques, seules les conditions initiales sont modifiées. Elles sont récapitulées dans le tableau 6.2. Les résultats pour les deux CFL sont donnés en figures 6.3 et 6.4.

$\rho_L[kg/m^3]$	$u_L[m/s]$	$\rho_R[kg/m^3]$	$u_R[m/s]$
10	0	1	0

TABLE 6.2 – Conditions initiales du cas test tube à choc à Mach modéré.

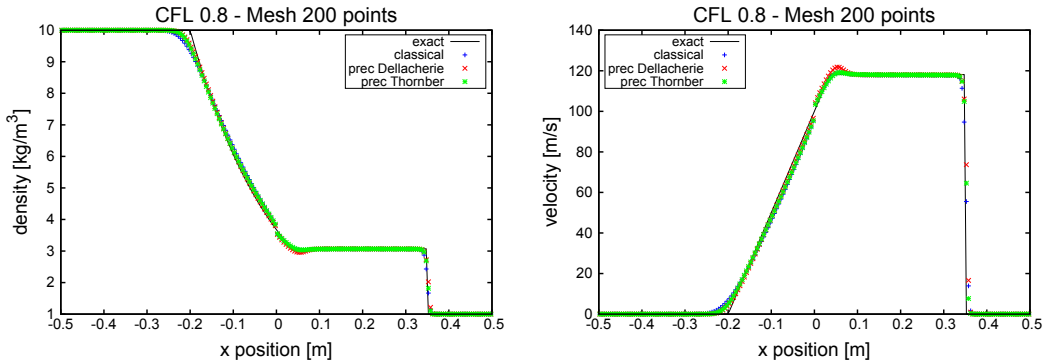


(a) Masse volumique. (b) Vitesse.

FIGURE 6.3 – Tube à choc Mach modéré ($M_{max} \approx 1.2$). Préconditionnement avec $CFL = 0.4$.

A la différence du cas test précédent, les oscillations induites par les corrections sont plus faibles. Notons que le préconditionnement de Dellacherie oscille légèrement plus que celui de Thornber.

Contrairement au cas test précédent, les schémas corrigés sont stables même pour une $CFL = 0.8$. En fait on peut comprendre cela en observant que, comme le Mach est beaucoup plus élevé, les corrections employées sont beaucoup moins actives (car inversement proportionnelle au Mach).



(a) Masse volumique.

(b) Vitesse.

FIGURE 6.4 – Tube à choc Mach modéré ($M_{max} \approx 1.2$). Préconditionnement avec $CFL = 0.8$.

Remarque 30. *On peut noter que lorsqu'elles sont stables, les corrections utilisées réduisent légèrement la diffusion du schéma de base.*

6.4.2.3 Vortex stationnaire

Ce cas test est inspiré des travaux de Gresho et al. [83] qui ont proposé d'étudier un vortex stationnaire avec les équations de Navier Stokes incompressibles. Le lecteur peut se référer en Annexe B où on dérive le vortex de Gresho analogue dans le cadre des équations d'Euler barotropes (et des équations de SV).

On fixe $c_{ref} = \{100, 1000\}m/s$, soit $M_{max} \approx \{0.01, 0.001\}$ pour les deux sous cas tests effectués. Le domaine considéré est $\Omega = [-0.5, 0.5] * [-0.5, 0.5]$. La masse volumique de référence est $\rho_{ref} = 1kg/m^3$. Ce cas est simulé jusqu'à $t_{max} = 0.1s$. Compte tenu des résultats précédents sur tube à choc en bas Mach, la CFL est fixée à $CFL = 0.4$. Le maillage est uniforme avec $\triangle x = \triangle y = 0.025m$.

La condition initiale, ainsi que la solution exacte en tout temps, est, avec $\overrightarrow{U} = (u_r, u_\theta)$ la vitesse dans un repère cylindrique de rayon r et d'angle θ et $\rho_0 = \rho_{ref}$:

$$\overrightarrow{U} = \begin{cases} (0, 5r) & \text{if } 0 \leq r \leq 0.2 \\ (0, 2 - 5r) & \text{if } 0.2 < r \leq 0.4 \\ (0, 0) & \text{if } r > 0.4 \end{cases} \tag{6.4.4}$$

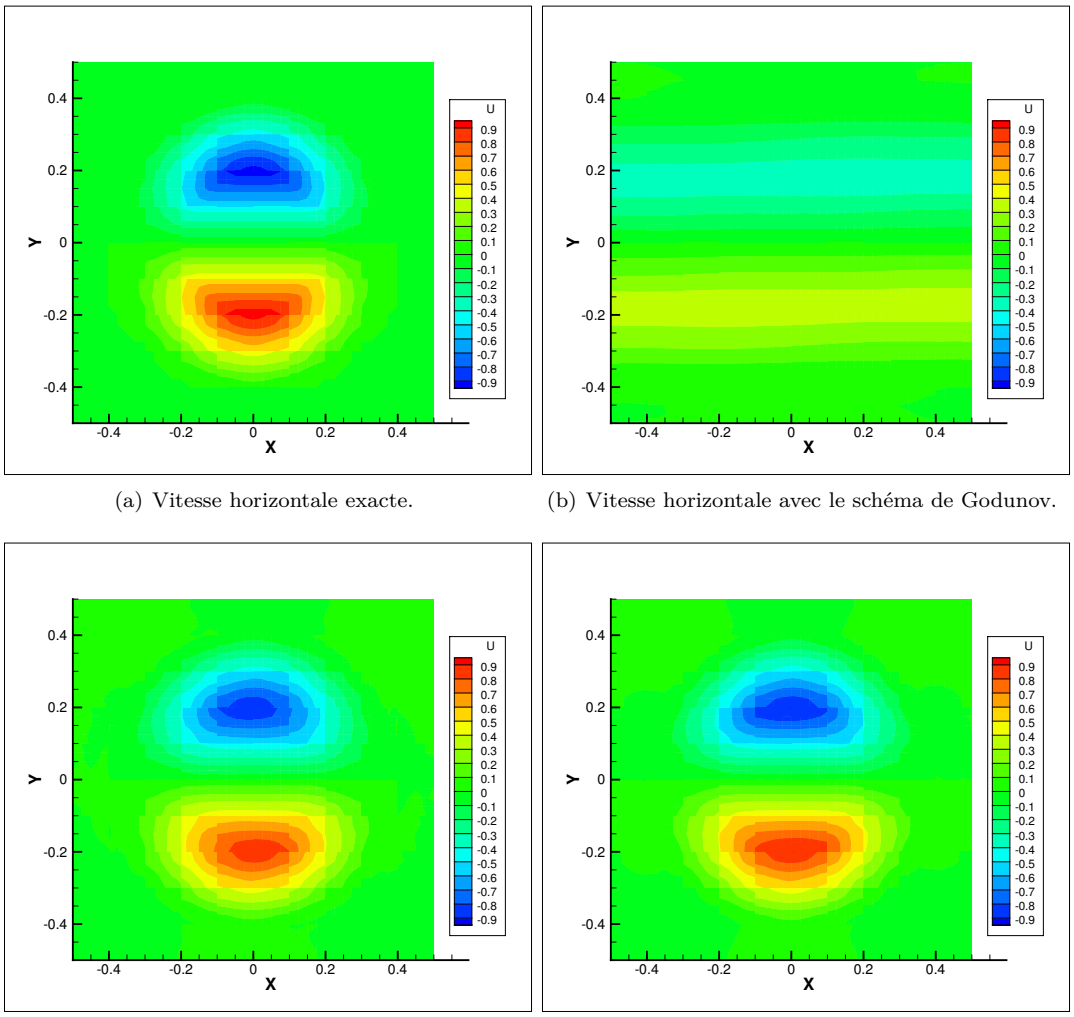
$$\rho = \begin{cases} \rho_0 exp(\frac{5r}{c_{ref}^2}) & \text{si } 0 \leq r \leq 0.2 \\ \rho_1 exp\Big(\frac{1}{c_{ref}^2}(2ln(r) - 5r)\Big) & \text{si } 0.2 < r \leq 0.4 \\ \rho_1 exp\Big(\frac{1}{c_{ref}^2}(2ln(0.4) - 5 * 0.4)\Big) & \text{si } r > 0.4 \\ \text{avec } \rho_1 = \rho_0 exp\Big(\frac{1}{c_{ref}^2}(10 * 0.2 - 2ln(0.2))\Big) \text{ par continuité} \end{cases} \tag{6.4.5}$$

La transformation au cas cartésien est directe avec les formules de trigonométrie de base. Les conditions aux limites sont ouvertes.

Les figures 6.5(a), 6.5(b), 6.5(c) et 6.5(d) illustrent respectivement le champs de vitesse horizontal à $t = 0.1s$ avec la solution exacte, le schéma de Godunov seul, avec la correction de Dellacherie et avec la correction de Thornber dans le sous-cas test $M_{max} \approx 0.01$. Il est clair que, sans correction, la solution est totalement dégradée. Notons qu'avec un maillage beaucoup plus fin, il est cependant possible d'obtenir une

solution acceptable sans correction. Les deux corrections testées donnent des résultats similaires avec un léger avantage pour la correction de Thornber.

Il en est de même pour le même cas avec $M_{max} \approx 0.001$ (voir figure 6.6). Le fait que les résultats des schémas corrigés ne changent pas en fonction du nombre de Mach démontre qu'ils ne souffrent pas du syndrome bas Mach en préservant l'asymptotique.



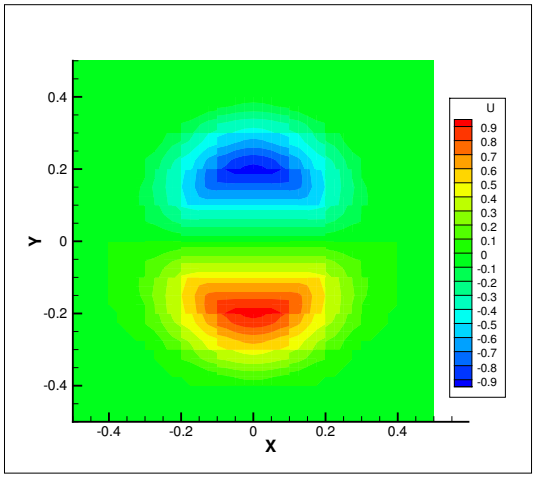
(a) Vitesse horizontale exacte.

(b) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov.

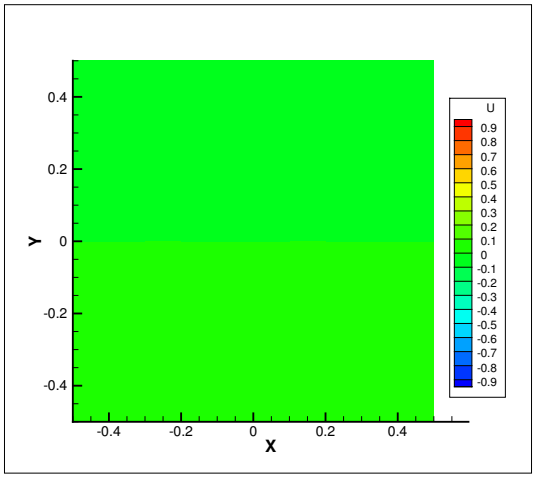
(c) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Dellacherie.

(d) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber.

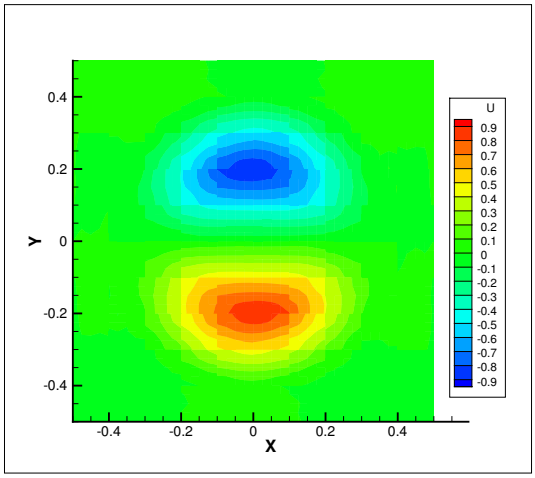
FIGURE 6.5 – Vortex stationnaire à $t = 0.1s$. Effet du preconditionnement en condition faible Mach $M_{max} \approx 0.01$.



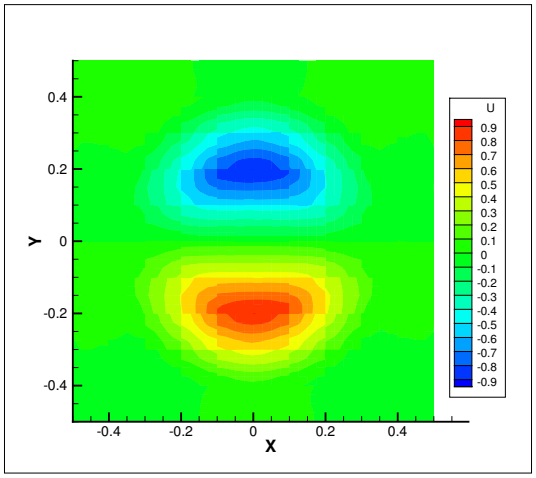
(a) Vitesse horizontale exacte.



(b) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov.



(c) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Dellacherie.



(d) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber.

FIGURE 6.6 – Vortex stationnaire à $t = 0.1s$. Effet du preconditionnement en condition très faible Mach $M_{max} \approx 0.001$.

6.4.3 Bilan

Les cas tests effectués permettent de voir que dans certaines situations la solution obtenue, avec le schéma de Godunov, est de mauvaise qualité. En 1D, avec des conditions aux limites de type mur, il n'y a pas de problème bas Mach. Les preconditionnements testés réduisent la stabilité du schéma initial et induisent des oscillations à bas Mach. A Mach plus élevé, comme la correction est moins forte, il est difficile d'observer des oscillations numériques.

En 2D par contre, plus le Mach est faible plus les résultats sont dégradés. Ces résultats sont en accord avec l'étude de l'erreur de troncature du paragraphe précédent. Les préconditionnements de Dellacherie ou Thornber corrigent le problème et donnent des résultats très satisfaisants et similaires. Précisons que, pour plus de concision, seuls les résultats avec le schéma de Godunov ont été présentés mais que le schéma de Lax Freidrichs donne des résultats similaires sur tous les cas tests.

En l'état, ces corrections semblent utilisables avec une $CFL \leq 0.5$ si on accepte certaines oscillations numériques qui semblent assez contrôlées. Sans plus de théorie sur ces oscillations, il semble cependant risqué de les ignorer. Si on pense à l'utilisation de ces corrections dans un cadre diphasique ou avec des modèles en eau peu profonde, rien n'assure qu'elles ne pourraient pas engendrer localement des résultats non physiques (comme une fraction volumique négative ou une hauteur négative). On propose dans le paragraphe qui suit d'essayer de mieux comprendre ces difficultés et de les corriger.

6.5 Vers un schéma Tous Mach TVD

6.5.1 Construction

Dans ce paragraphe on se concentre sur le défaut des préconditionnements étudiés précédemment. Avant de se lancer dans une éventuelle correction, une étape intéressante est d'essayer de caractériser les oscillations rencontrées.

Un cadre adéquat est l'étude des variations totales des variables dues au schéma. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au chapitre 5 ; on rappelle la définition d'une variation totale pour un schéma sur une variable u :

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \tag{6.5.1}$$

Pour un système d'équations discrétisées, il est en général difficile de pouvoir caractériser la variation totale car les variables sont souvent liées entre elles. C'est le cas des équations d'Euler barotropes. Par contre, comme ce système est hyperbolique, on peut le transformer en une forme plus adéquate. Le système d'Euler barotrope linéarisé, adimensionné et mis sous forme non conservative s'écrit :

$$\begin{aligned} &U_t + A_0 U_x = 0 \\ &\text{avec } U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \text{ et } A_0 = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 \\ \dfrac{c_0^2}{\rho_0 M^2} & u_0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Cette forme est valide si l'écoulement étudié ne comporte pas de chocs. Pour simplifier les calculs, on se place sous l'approximation acoustique en se donnant un état de vitesse socle nul ($u_0 = 0$). Comme montré par Dellacherie [54], ce cas suffit pour rencontrer des difficultés à bas Mach. D'autre part on prend $\rho_0 = 1$ sans perte de généralité dans le raisonnement. La jacobienne devient :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{c_0^2}{M^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5.2}$$

Pour tenter d'étudier les variations totales des solutions discrètes et essayer de corriger les oscillations, cette forme, bien que déjà simplifiée, reste difficile à manipuler car les variables sont liées. Comme le système est

hyperbolique, il peut être mis sous une forme beaucoup plus adéquate aux manipulations analytiques. Ce système admet pour valeurs propres $\lambda_1 = -\dfrac{c_0}{M}$ et $\lambda_2 = \dfrac{c_0}{M}$. Le calcul des vecteurs propres à droite permet de diagonaliser le système. On obtient la matrice de passage P et son inverse :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{c_0}{M} & \dfrac{c_0}{M} \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\dfrac{M}{2c_0} \\ 1/2 & \dfrac{M}{2c_0} \end{pmatrix}, \tag{6.5.3}$$

Les variables primitives sont :

$$W = P^{-1}U = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho}{2} - \dfrac{uM}{2c_0} \\ \dfrac{\rho}{2} + \dfrac{uM}{2c_0} \end{pmatrix} \tag{6.5.4}$$

Le système initial $U_t + A_0 U_x = 0$ s'écrit maintenant $W_t + D_0 W_x = 0$ avec :

$$D_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{c_0}{M} & 0 \\ 0 & -\dfrac{c_0}{M} \end{pmatrix} \tag{6.5.5}$$

On a vu précédemment qu'une solution pour éviter le problème bas Mach était de réduire d'un facteur $O(M)$ la diffusion sur la variable vitesse du système. Cela revient à centrer plus ou moins le schéma initial. On écrit le schéma de Rusanov global (*i.e.* $max(\lambda_{k,i+1}, \lambda_{k,i}) = \lambda_{max}$) corrigé pour le système initial, avec comme notation $\triangle^n f_i = f_i^{n+1} - f_i^n$:

$$\frac{\triangle^n \rho_i}{\triangle t} = \frac{-\triangle t}{2\triangle x}\Big((u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \lambda_{max}\big((\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) - (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)\big)\Big) \tag{6.5.6}$$

$$\frac{\triangle^n u_i}{\triangle t} = \frac{-\triangle t}{2\triangle x}\Big(\frac{c_0^2}{M^2}(\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) - \lambda_{max}\big(\Theta_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \Theta_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n)\big)\Big) \tag{6.5.7}$$

On rappelle que Θ_i est une fonction en $O(M)$ qui réduit la diffusion sur l'équation de quantité de mouvement à bas Mach. Pour faire le lien avec le paragraphe 6.3, il faut noter que dans ce dernier, comme seuls les ordres de grandeur nous intéressaient, on avait $\Theta_i = \Theta_{i+1/2} = \Theta_{i-1/2} = O(M)$. Dans le cas général la correction est évidemment locale à chaque flux, d'où cette forme de l'équation (6.5.7). On a vu que ce système admet des ondes à vitesses caractéristiques $\pm c_0/M$, on a donc $\lambda_{max} = c_0/M$.

Pour obtenir une forme compacte du système discrétisé on pose $\triangle^x f_i = f_{i+1}^n - f_{i-1}^n$, $\triangle^{x-} f_i = f_i^n - f_{i-1}^n$ et $\triangle^{x+} f_i = f_{i+1}^n - f_i^n$, ce qui donne :

$$\frac{2\triangle x}{\triangle t}\triangle^n U_i = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{c_0^2}{M^2} & 0 \end{pmatrix} \triangle^x U_i + \begin{pmatrix} \dfrac{c_0}{M} & 0 \\ 0 & \Theta_{i+1/2}\dfrac{c_0}{M} \end{pmatrix} \triangle^{x+} U_i - \begin{pmatrix} \dfrac{c_0}{M} & 0 \\ 0 & \Theta_{i-1/2}\dfrac{c_0}{M} \end{pmatrix} \triangle^{x-} U_i \tag{6.5.8}$$

Les matrices de diffusion (*i.e.* la deuxième et troisième matrice du coté droit du système) sont notées respectivement dans la suite D_{1+} et D_{1-}. On diagonalise ce système discret (le seul point "technique" est passé en notant que comme $D_{1\pm}$ sont diagonales, $P^{-1}D_{1\pm} = D_{1\pm}P^{-1}$) :

$$\boxed{\frac{2\triangle x}{\triangle t}\triangle^n U_i = -A_0\triangle^x U_i + D_{1+}\triangle^{x+} U_i - D_{1-}\triangle^{x-} U_i}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\triangle x}{\triangle t}\triangle^n U_i = -PD_0P^{-1}\triangle^x U_i + D_{1+}\triangle^{x+} U_i - D_{1-}\triangle^{x-} U_i$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\triangle x}{\triangle t}\triangle^n (P^{-1}U_i) = -D_0\triangle^x (P^{-1}U_i) + P^{-1}D_{1+}\triangle^{x+} U_i - P^{-1}D_{1-}\triangle^{x-} U_i$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{2\triangle x}{\triangle t}\triangle^n W_i = -D_0\triangle^x W_i + D_{1+}\triangle^{x+} W_i - D_{1-}\triangle^{x-} W_i} \tag{6.5.9}$$

Grâce aux transformations effectuées, chaque équation du système correspond maintenant à une équation d'advection. La discrétisation du système initial avec un schéma up-wind pour l'équation de masse et une combinaison d'un schéma centré / upwind donne exactement la même chose pour le système diagonalisé respectivement pour l'équation sur W_1 et W_2.

On se concentre maintenant sur l'équation sur W_2. L'équation sur W_1 ne pose en effet aucun problème numérique car elle est discrétisée avec un schéma up-wind pur. Il est facile de montrer que ce schéma préserve la monotonie et n'induit donc pas d'oscillations numériques. L'équation discrète qui contient la correction bas Mach est beaucoup plus délicate. Pour simplifier les notations qui suivent, on note $W = W_2$ (W n'est donc plus un vecteur de variables caractéristiques mais un scalaire). Également on rappelle qu'une condition nécessaire à la stabilité, pour une résolution avec le schéma de Rusanov, est $\triangle t = \dfrac{CFL\triangle x}{c_0/M}$ (avec $CFL \leq 1$, point sur lequel on va revenir car ici le schéma est légèrement différent à cause du préconditionnement). L'équation sur W_2 s'écrit donc maintenant (grâce à (6.5.9)) :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\Big(\frac{c_0}{M}(W_{i+1}^n - W_{i-1}^n) - \Theta_{i+1/2}\frac{c_0}{M}(W_{i+1}^n - W_i^n) + \Theta_{i-1/2}\frac{c_0}{M}(W_i^n - W_{i-1}^n)\Big) \tag{6.5.10}$$

$$= W_i^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\frac{c_0}{M}\Big((W_i^n - W_{i-1}^n)(1+\Theta_{i-1/2}) + (W_{i+1}^n - W_i^n)(1-\Theta_{i+1/2})\Big) \tag{6.5.11}$$

En s'inspirant des travaux d'Harten [94], on propose le théorème suivant :

Théorème 3.

Soit le schéma $u_i^{n+1} = u_i^n - C_{-,i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n) + C_{+,i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n)$
Si pour tout i : $C_{-,i-1/2} \geq 0, C_{+,i+1/2} \leq 0$ *et* $C_{-,i-1/2} + C_{+,i+1/2} \leq 1$
Alors la variation totale du schéma est bornée telle que : $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)(1 - 2C_{+,i+1/2})$

Pour la preuve on a :

En décalant les indices du schéma initial :
$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n - C_{-,i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) + C_{+,i+3/2}(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n)$
En les soustrayant entre eux :
$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = C_{-,i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1 - C_{-,i+1/2} - C_{+,i+1/2})(u_{i+1}^n - u_i^n)$
$+ C_{+,i+3/2}(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n)$
Ce qui donne :

$$TV(u^{n+1}) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}|$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |(1 - C_{-,i+1/2} - C_{+,i+1/2})(u_{i+1}^n - u_i^n) + C_{-,i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n) + C_{+,i+3/2}(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n)|$$

Avec l'inégalité de Schwartz :

$$\leq \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |(1 - C_{-,i+1/2} - C_{+,i+1/2})||(u_{i+1}^n - u_i^n)| + \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |C_{-,i-1/2}||(u_i^n - u_{i-1}^n)| + \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |C_{+,i+3/2}||(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n)|$$

En décalant à nouveau les indices dans les deux derniers termes :

$$= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |(1 - C_{-,i+1/2} - C_{+,i+1/2})||(u_{i+1}^n - u_i^n)| + \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |C_{-,i+1/2}||(u_{i+1}^n - u_i^n)| + \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |C_{+,i+1/2}||(u_{i+1}^n - u_i^n)|$$

$$= TV(u^n)\Big((1 - C_{-,i+1/2} - C_{+,i+1/2}) + C_{-,i+1/2} - C_{+,i+1/2}\Big)$$

D'où :

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)\Big(1 - 2C_{+,i+1/2}\Big)$$

En appliquant ce théorème à l'équation (6.5.11), on obtient :

$$\boxed{TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)\big(1 + CFL(1 - min(1, M))\big)} \tag{6.5.12}$$

Des oscillations non négligeables sont donc possibles. Sans pouvoir mieux les quantifier, on décide d'essayer de les empêcher dans la suite de cette section.

On pourrait continuer de travailler sur l'équation (6.5.11) mais il est pratique de la reformuler pour retrouver un profil plus classique de schémas combinés. Imaginons que l'on discrétise le système diagonal (6.5.5) en prenant la forme de flux suivante (avec ϕ un limiteur) :

$$F = F_{up-wind} + \phi(F_{central} - F_{up-wind}) \tag{6.5.13}$$

Soit :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\Big(F_{i+1/2}^{up-wind} - F_{i-1/2}^{up-wind} + \phi_{i+1/2}(F_{i+1/2}^{central} - F_{i+1/2}^{up-wind}) - \phi_{i-1/2}(F_{i-1/2}^{central} - F_{i-1/2}^{up-wind})\Big) \tag{6.5.14}$$

Pour revenir au cas particulier où le schéma "up-wind" est celui de Rusanov global on a :

$$F_{i+1/2}^{up-wind} = \frac{c_0}{M}\frac{W_{i+1} + W_i}{2} - \frac{c_0}{2M}(W_{i+1} - W_i)$$

et pour les flux centrés :

$$F_{i+1/2}^{central} = \frac{c_0}{M}\frac{W_{i+1}+W_i}{2}$$

Ce qui donne pour le système diagonalisé :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}\frac{c_0}{M}\Big((W_i^n - W_{i-1}^n)(2-\phi_{i-1/2}) + (W_{i+1}^n - W_i^n)\phi_{i+1/2}\Big) \tag{6.5.15}$$

Par identification avec la forme précédente (6.5.11), on a $\boxed{\phi_i = 1 - \Theta_i}$.

Comme ϕ n'a pas encore été précisé, il est supposé potentiellement dépendre de W. En posant $r_i^+ = \dfrac{W_i - W_{i-1}}{W_{i+1} - W_i}$, le schéma peut s'écrire :

$$\boxed{W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\frac{c_0}{M}(W_i^n - W_{i-1}^n)\Big(1 + \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} - \frac{\phi_{i-1/2}}{2}\Big)} \tag{6.5.16}$$

Comme on l'a vu dans le chapitre 5, un schéma TVD préserve la monotonie. C'est donc une voie intéressante pour éliminer les oscillations observées. En utilisant le théorème de Harten [94], le schéma est TVD si :

$$0 \leq CFL\Big(1 + \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} - \frac{\phi_{i-1/2}}{2}\Big) \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} - \frac{\phi_{i-1/2}}{2} \leq 1/CFL - 1$$

Avec une $CFL = 1$ on obtient $\phi = 0$, on restreint donc la CFL à 0.5 d'où :

$$-2 \leq \frac{\phi_{i+1/2}}{r_i^+} - \phi_{i-1/2} \leq 2$$

Les deux seules solutions sont :

$$0 \leq \phi_{i+1/2} \leq 2r_i^+ \text{ et } 0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2$$

Il existe une multitude de fonctions qui respectent ces contraintes, la plus large est bornée par :

$$\phi(r) \leq max(0, min(2, 2r)) \text{ avec } r = min(r^+, r^-) \tag{6.5.17}$$

Si on oublie un instant qu'il y a d'autres contraintes sur ϕ pour que le schéma soit acceptable à bas Mach, cette dernière fonction permet d'obtenir un schéma TVD (mais pas nécessairement du second ordre, *cf.* Sweby [211]). On peut tracer un diagramme, comme proposé initialement par Sweby dans son formalisme des schémas TVD, donnant la zone où le schéma sera TVD pour le couple (ϕ, r) (voir figure 6.7).

Revenons maintenant au cas pour lequel ce développement a été effectué : le bon traitement du bas Mach. D'après l'analyse effectuée au paragraphe 6.3, ou encore au travaux de Rieper [187] ou Dellacherie [53, 54], pour avoir un schéma performant à bas Mach, il faut pondérer la diffusion sur l'équation de quantité de mouvement par un $O(M)$. Dans la présente formulation, cela veut dire $\Theta = O(M)$. Prenons par exemple $\Theta = min(1, M)$ pour retrouver un schéma up-wind à haut Mach. Ceci donne $\phi = 1 - min(1, M)$. Il est clair que cette contrainte n'est pas parfaitement compatible avec (6.5.17). La conclusion principale de cette analyse est donc que, même en autorisant des non linéarités locales dans le schéma (la fonction ϕ), il n'est pas possible d'obtenir un schéma TVD et parfaitement performant à bas Mach car ces deux contraintes sont parfois incompatibles.

On peut cependant choisir de vérifier la contrainte TVD ($\phi_{TVD} = max(0, min(2, 2r))$ et lorsque c'est possible, vérifier également la contrainte bas Mach ($\phi_{LM} = 1 - min(1, M)$), soit $\phi = min(\phi_{LM}, \phi_{TVD})$. Ainsi on obtient un schéma qui est TVD et "presque tous Mach". On présente en figure 6.8 le diagramme de type Sweby d'un tel choix. La fonction associée est :

$$\phi(r) = min\Big(1 - min(1, M), max(0, min(2, 2r))\Big) \tag{6.5.18}$$

$$\text{Soit } \Theta(r) = 1 - min\Big(1 - min(1, M), max(0, min(2, 2r))\Big) \tag{6.5.19}$$

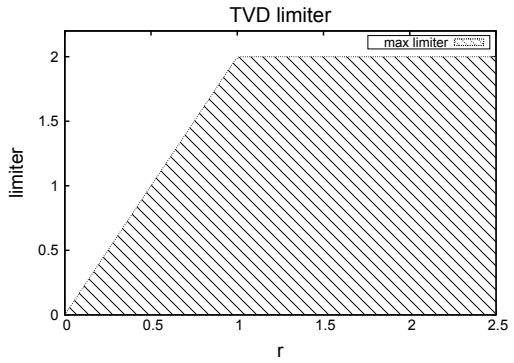


FIGURE 6.7 – Zone TVD avec le limiteur (6.5.17).

Notons que d'autres choix de limiteurs sont possibles, notamment pour la partie contrainte TVD. Nous avons choisi le limiteur TVD le moins contraignant pour *a priori* maximiser les performances du schéma à bas Mach, mais rien n'assure que ce choix soit le meilleur. Il est possible d'utiliser des limiteurs plus classiques, comme le fameux Minmod ou Superbee.

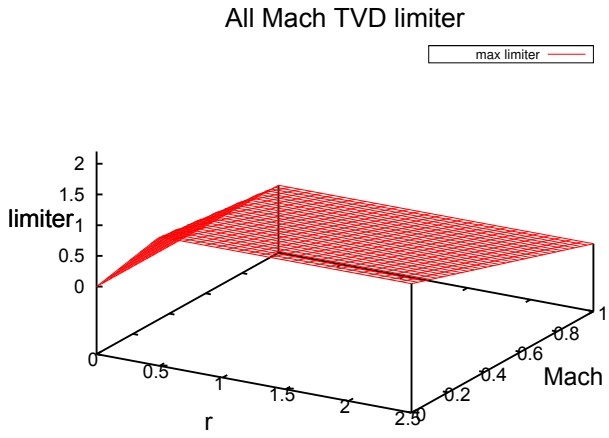


FIGURE 6.8 – Zone TVD et "préservant presque l'asymptotique" avec le limiteur (6.5.18). Au premier plan ($M = 0$), on retrouve une partie du limiteur (6.5.17) tandis qu'au dernier plan ($M = 1$), la limitation est nulle car le schéma redevient up-wind pur.

Remarque 31. *Il est intéressant de faire l'analogie entre ce résultat et le fait qu'il est a priori impossible d'avoir un schéma qui soit d'ordre 2 en espace et TVD. En effet, les schémas TVD sont basés sur des limiteurs qui descendent l'ordre du schéma dans les zones raides (comme un changement de pente) pour assurer cette contrainte. Ces schémas sont donc TVD et localement d'ordre 2, mais pas globalement. Ceci est analogue au fait que le schéma proposé est localement "tous Mach" lorsque cela ne viole pas la contrainte TVD. Pour outrepasser cette contrainte sur les montées en ordre, il a été proposé d'accepter certaines oscillations (ce sont les schémas WENO ou ENO).*

Hors cas d'un schéma linéarisé, comme par exemple celui de Roe, il est très difficile de retrouver le formalisme précédent dans le cas non linéaire. L'extension dans ce cas est donc effectuée relativement empiriquement. Notons que c'est aussi le cas des schémas d'ordre 2 en espace TVD (*cf.* par exemple Toro [221]).

Dans le cas non linéaire, en revenant au équations dimensionnées, on a :

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{-\rho}{c} & \frac{-\rho}{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2\rho} & \frac{1}{2} \\ \frac{c}{2\rho} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} u-c & 0 \\ 0 & u+c \end{pmatrix}. \tag{6.5.20}$$

Les variables primitives sont :

$$W = P^{-1}U = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} + \frac{u}{2} \\ \frac{c}{2} + \frac{u}{2} \end{pmatrix} \tag{6.5.21}$$

La construction du limiteur, ou du taux de correction bas Mach, dans le cas non linéaire est donc basée sur la variable $W_2 = \frac{c}{2} + \frac{u}{2}$ ce qui permet, lorsque $c \approx cste$, de prendre en fait simplement la variable "u". Par "chance" on retombe sur une variable classique ce qui permet une implémentation très facile dans un code comportant des schémas d'ordre 2 en espace. En 2D on prend le limiteur le plus pénalisant des deux directions du vecteur vitesse.

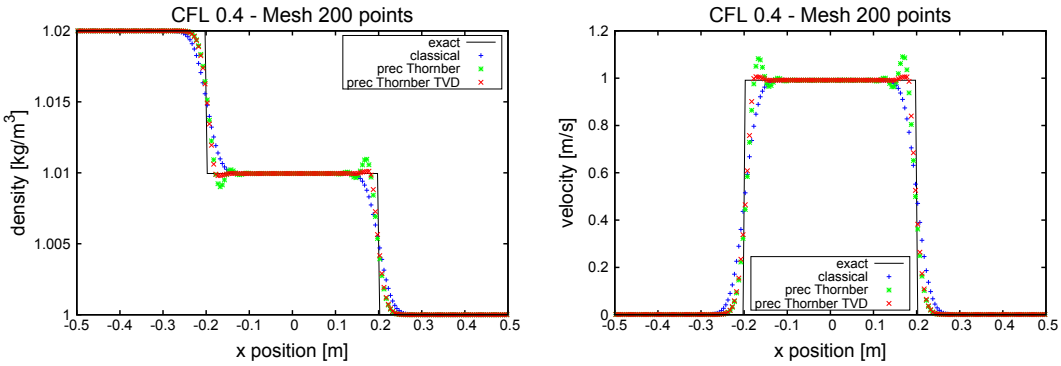
Remarque 32. *On peut se demander s'il y aura une différence entre ce schéma à correction bas Mach limité et un schéma classique d'ordre* 2*. La réponse est oui car le limiteur choisi n'appartient pas à la zone d'ordre 2 décrite par Sweby. D'autre part, dès que possible la correction sans limitation est retrouvée et le schéma est donc une combinaison linéaire en $O(M)$ entre un schéma centré (d'ordre 2) et up-wind (d'ordre 1), qui est donc d'un ordre intermédiaire.*

6.5.2 Tests numériques

Le but de cette section est d'évaluer le schéma préconditionné "presque Tous Mach TVD" proposé précédemment et de le confronter aux schémas classiques. Ce schéma est celui de Thornber corrigé pour être TVD mais la procédure de limitation peut évidemment s'appliquer aux autres schémas préconditionnés comme celui de Dellacherie. Le lecteur peut se référer à la section 6.4.2 où les cas tests ont été présentés précisément.

6.5.2.1 Tube à choc bas Mach

Les figures 6.9(a) et 6.9(b) présentent respectivement le champs de masse volumique et de vitesse avec le préconditionnement TVD.



(a) Masse volumique.

(b) Vitesse.

FIGURE 6.9 – Tube à choc bas Mach ($M_{max} \approx 0.01$). Effet du préconditionnement TVD avec $CFL = 0.4$.

Les oscillations rencontrées avec le schéma corrigé standard sont quasiment éliminées avec le nouveau schéma TVD.

Remarque 33. *Pour le même cas où une $CFL = 0.8$ donnait lieu à de fortes instabilités pour les schémas corrigés standard (résultats non présentés ici), l'ajout de la contrainte TVD permet de retrouver des profils beaucoup plus stables. Il demeure des oscillations mais il semble que la "limite" $CFL < 0.5$ puisse maintenant être franchie. Reste que, d'après le raisonnement théorique pour construire ce schéma TVD, on suppose $CFL < 0.5$. Il semble donc plus prudent de rester sur cette borne.*

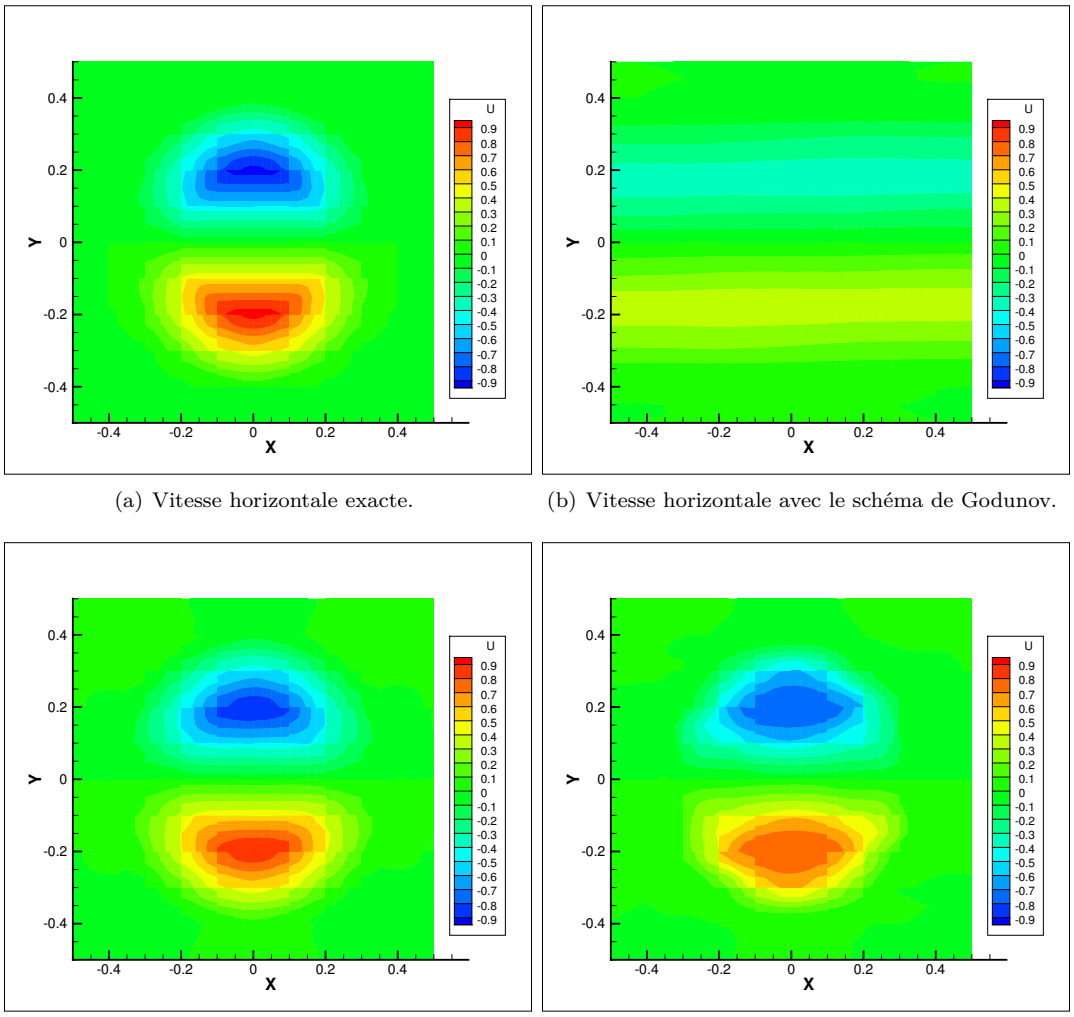
Le cas test "Tube à choc modéré" (*cf.* paragraphe 6.4.2.2) n'est pas présenté car les résultats, déjà correct sans contrainte TVD, sont inchangés.

6.5.2.2 Vortex stationnaire

Les figures 6.10(a), 6.10(b), 6.10(c) et 6.10(d) illustrent respectivement le champs de vitesse horizontale à $t = 0.1s$ avec la solution exacte, le schéma de Godunov seul, avec la correction de Thornber et avec la correction de Thornber TVD pour le sous-cas $M_{max} \approx 0.01$.

Les deux corrections (avec limitation TVD ou non) testées donnent des résultats similaires avec un léger avantage pour la correction de Thornber sans limiteur.

Le même cas avec $M \approx 0.001$ est illustré en figure 6.11. Le schéma corrigé TVD donne toujours de bien meilleurs résultats que le schéma de Godunov mais s'est clairement dégradé, comparé au schéma corrigé non TVD. Ce problème est sans doute cas test dépendant car la limitation TVD n'agit sur le schéma que dans certaines conditions. En l'état, pour de très faibles Mach, il semble que la limitation TVD soit à éviter pour préserver l'asymptotique, quitte à observer des oscillations numériques dans la solution.



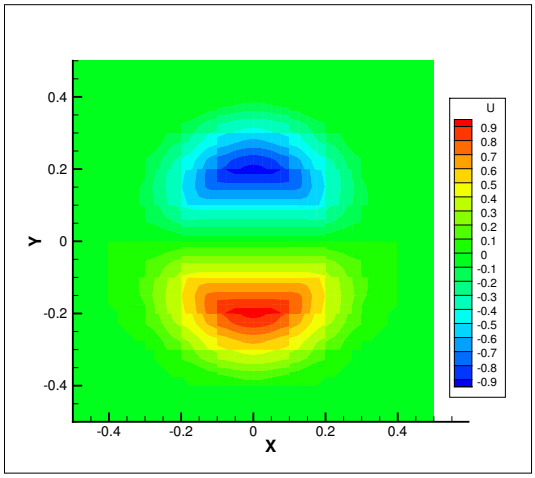
(a) Vitesse horizontale exacte.

(b) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov.

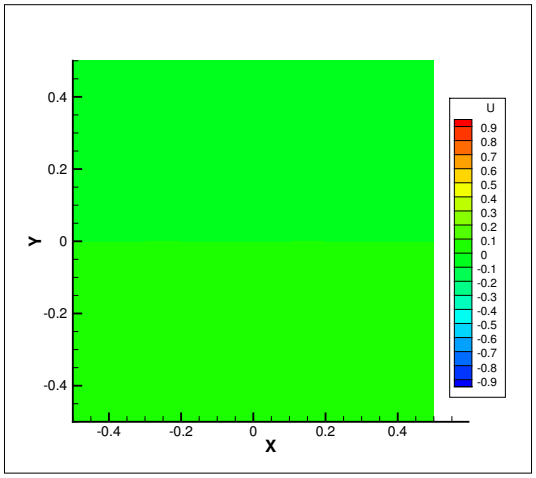
(c) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber.

(d) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et limitation TVD.

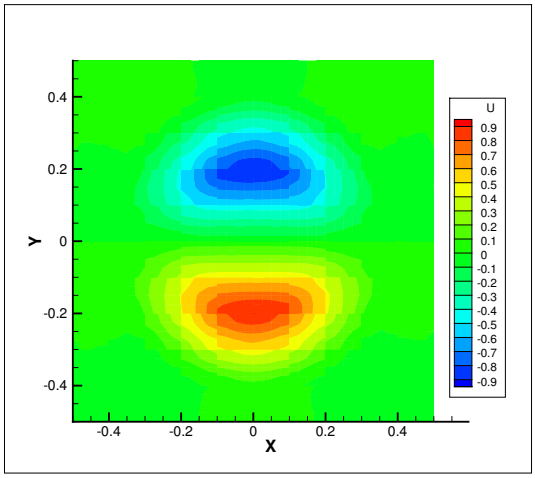
FIGURE 6.10 – Vortex stationnaire à $t = 0.1s$. Effet du preconditionnement TVD en condition faible Mach $M_{max} \approx 0.01$. L'ajout de la contrainte TVD réduit légèrement la qualité des résultats (le vortex a légèrement perdu en intensité).



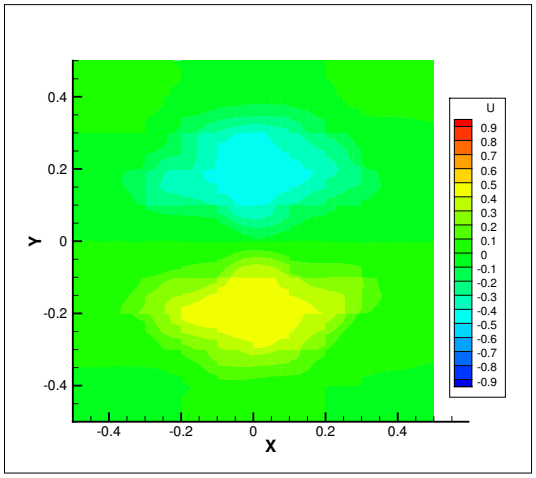
(a) Vitesse horizontale exacte.



(b) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov.



(c) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber.



(d) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et contrainte TVD.

FIGURE 6.11 – Vortex stationnaire à $t = 0.1s$. Effet du preconditionnement TVD en condition très faible Mach $M_{max} \approx 0.001$. Le schéma corrigé TVD perd en précision face au schéma corrigé non TVD.

6.5.3 Bilan

La limitation proposée pour rendre les schémas Tous Mach classiques TVD a permis de faire disparaître les oscillations rencontrées pour le cas test "tube à choc bas Mach". Cependant, un autre effet indésirable est apparu : le schéma préconditionné et TVD ne préserve plus parfaitement l'asymptotique comme démontré dans les deux cas tests du vortex. La solution perd en qualité lorsque le nombre de Mach est réduit vers des valeurs très faibles.

Pour des applications à Mach modéré (comme $M \approx 0.01$), il semble que le schéma préconditionné TVD proposé soit un choix acceptable à la fois pour sa robustesse accrue et pour sa capacité à donner de bons résultats à ces faibles Mach. Par contre pour des applications à très faible Mach (comme $M \approx 0.001$), la contrainte TVD affecte la propriété initiale de préservation de l'asymptotique et n'est donc pas un choix judicieux. En l'état, il faut donc dans ce cas revenir au schéma standard corrigé et accepter d'éventuelles oscillations numériques.

6.6 Vers un schéma Tous Mach à oscillations réduites

6.6.1 Construction

Compte tenu des résultats numériques de la section précédente avec le schéma "presque Tous Mach TVD", la contrainte TVD est trop restrictive et ne permet pas d'obtenir un schéma vraiment performant à très bas Mach. Pour essayer d'améliorer la capacité du schéma à préserver l'asymptotique, on propose de relaxer la contrainte TVD vers le cas TVB (Total Variation Bounded), en gardant un "contrôle" minimum sur les éventuelles oscillations numériques.

On a vu précédemment que le schéma à correction de type Thornber donnait :

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)\big(1 + CFL(1 - min(1, M))\big) \tag{6.6.1}$$

Les cas tests effectués avec ce schéma montrent clairement que des oscillations non négligeables sont générées conformément à ce résultat. Ce schéma est évidemment déjà TVB mais à borne supérieure large. Il faut donc réduire ce taux de variation. On repart de l'équation (6.5.16), que l'on rappelle ci-dessous :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\frac{c_0}{M}(W_i^n - W_{i-1}^n)\Big(1 + \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} - \frac{\phi_{i-1/2}}{2}\Big)$$

En reprenant le théorème 3 proposé au paragraphe 6.5.1, on a le théorème analogue suivant :

Si pour tout i : $C_{-,i-1/2} > 1$ et $C_{+,i+1/2} = 0$

Alors la variation totale du schéma est bornée telle que : $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)(-1 + 2C_{-,i-1/2})$

La preuve est quasi identique au théorème 3.

On veut contrôler les oscillations à des valeurs acceptables. Cette notion "d'acceptable" est particulièrement délicate. Ce point sera discuté plus tard, on se donne pour l'instant :

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)\big(1 + \beta\big) \tag{6.6.2}$$

Rappelons que la correction qui donne un schéma bas Mach agit seulement à M petit. Ce choix n'est donc pas gênant à haut Mach où le schéma redevient naturellement TVD. A bas Mach, avec β bien choisi, les oscillations seront relativement faibles. Par identification on a : $C_{-,i-1/2} \leq 1 + \frac{\beta}{2}$. On construit un schéma qui est au mieux TVD et au pire TVB (et limité dans certaines conditions), ce qui donne grâce au théorème

d'Harten et celui énoncé précédemment :

$$0 \leq CFL\Big(1 + \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} - \frac{\phi_{i-1/2}}{2}\Big) \leq 1 + \frac{\beta}{2}$$

$$-1 \leq \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} - \frac{\phi_{i-1/2}}{2} \leq \frac{1}{CFL} + \frac{\beta}{2CFL} - 1$$

Avec $CFL = 0.5$:

$$-1 \leq \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} - \frac{\phi_{i-1/2}}{2} \leq 1 + \beta$$

Les deux seules solutions sont :

$$-1 \leq \frac{\phi_{i+1/2}}{2r_i^+} \leq 1 + \beta \text{ et } -1 \leq \frac{\phi_{i-1/2}}{2} \leq 1 + \beta$$

Comme seul le cas où $\phi \geq 0$ nous interesse, on a :

$$\boxed{0 \leq \phi_{i+1/2} \leq 2r_i^+(1+\beta)} \text{ et } \boxed{0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2(1+\beta)}$$

Il existe une multitude de fonctions qui respectent ces contraintes, la plus large est bornée par :

$$\phi(r) \leq max\big(0, min(2, 2r)(1+\beta)\big) \text{ avec } r = min(r^+, r^-) \tag{6.6.3}$$

De la même manière que dans le cas TVD, on choisit de respecter la contrainte TVB-limité et, dès que possible, la contrainte bas Mach. Ainsi on obtient un schéma qui est "quasi tous Mach" et TVB-limité. La fonction associée est :

$$\phi(r) = min\Big(1 - min(1, M), max\big(0, min(2, 2r)(1+\beta)\big)\Big) \tag{6.6.4}$$

$$\text{Soit } \Theta(r) = 1 - min\Big(1 - min(1, M), max\big(0, min(2, 2r)(1+\beta)\big)\Big) \tag{6.6.5}$$

Le choix du paramètre β peut être fait après des expériences numériques. Il est important de noter que l'estimation du taux de variation totale de la solution donnée par l'équation (6.6.2) était le point de départ du raisonnement, mais qu'une contrainte supplémentaire a été ajoutée au limiteur : la contrainte bas Mach. On prend, dès que possible, $\phi = \phi_{LM}$ ce qui veut dire qu'on retombe dans ce cas sur l'estimation 6.6.1. Le limiteur $\phi = \phi_{TVB-lim}$ est lui sélectionné lorsqu'il est le plus limitant. En augmentant β, les oscillations ne pourront donc pas excéder celles obtenues avec le schéma préconditionné de base. Ceci permet d'envisager de prendre des valeurs de β élevées. Elles seront mêmes inférieures car, même pour β tendant vers l'infini, la présence d'extremum implique un limiteur nul (*i.e.* pour $r \leq 0$). Dans ce cas le schéma tendra vers son analogue non préconditionné (*i.e.* up-wind pur). C'est pour cela qu'on peut parler d'un schéma à oscillations réduites.

Remarque 34. *La méthode présentée pour construire un schéma bas mach TVB peut tout à fait être appliquée dans un contexte de schémas d'ordre "très" élevés. Par exemple en sous limitant les schémas standards d'ordre 2 TVD, il est a priori possible, en agissant à bon escient (sur le paramètre β), d'outrepasser la limite d'ordre 2 avec une grande simplicité. Il serait intéressant de comparer cette approche avec les schémas WENO ou ENO.*

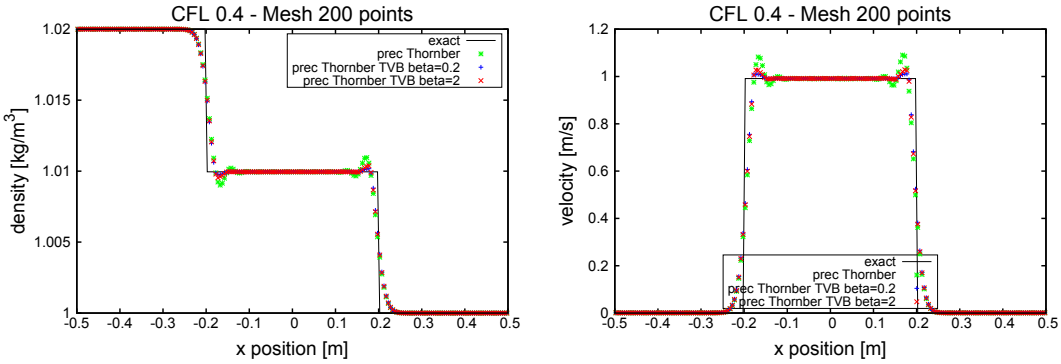
6.6.2 Tests numériques

Le but de cette section est d'évaluer le schéma "Tous Mach" TVB-limité (ou à oscillations réduites) proposé précédemment et de le confronter au schéma Tous Mach standard et à la version TVD. Ce schéma est celui de Thornber corrigé pour être "à oscillations réduites" mais la procédure de limitation peut évidemment s'appliquer aux autres schémas préconditionnés comme celui de Dellacherie. Le lecteur peut se référer à la section 6.4.2 où les cas tests sont présentés précisément. Dans ces cas tests, nous allons faire varier

le paramètre β pour essayer de déterminer à partir de quand on retrouve la propriété de préservation asymptotique tout en limitant autant que possible les oscillations numériques. Comme pour le cas TVD la limitation, basée sur l'indicateur de régularité r, est construite avec la variable u. En 2D on prend le limiteur le plus pénalisant des deux directions du vecteur vitesse.

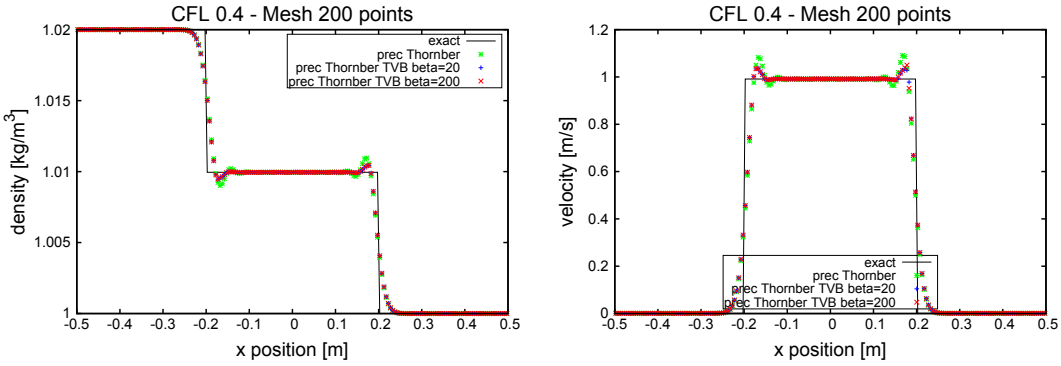
6.6.2.1 Tube à choc bas Mach

Les figures 6.12(a) et 6.12(b) présentent respectivement le champs de masse volumique et de vitesse pour le préconditionnement TVB-limité avec β faible. Le cas où β est plus élevé est présenté en figures 6.13(a) et 6.13(b).



(a) Masse volumique, β faible. (b) Vitesse, β faible.

FIGURE 6.12 – Tube à choc bas Mach ($M_{max} \approx 0.01$). Effet du preconditionnement TVB-limité avec $CFL = 0.4$ avec $\beta = \{0.2, 2\}$.



(a) Masse volumique, β élevé. (b) Vitesse, β élevé.

FIGURE 6.13 – Tube à choc bas Mach ($M_{max} \approx 0.01$). Effet du preconditionnement TVB-limité avec $CFL = 0.4$ avec $\beta = \{20, 200\}$.

Les oscillations rencontrées avec le schéma corrigé standard sont fortement réduites avec le nouveau schéma TVB-limité pour des valeurs de β faibles. Pour β plus élevé, il demeure des pics mais moins grands que le cas "sans contrainte" TVB. Au vu de ces cas tests, il semble qu'il soit préférable de prendre β petit

mais, même pour des valeurs élevées, la solutions est améliorée et largement acceptable. Notons que pour $\beta \geq 200$ les résultats ne changent plus (ce point sera expliqué dans le paragraphe 6.6.3).

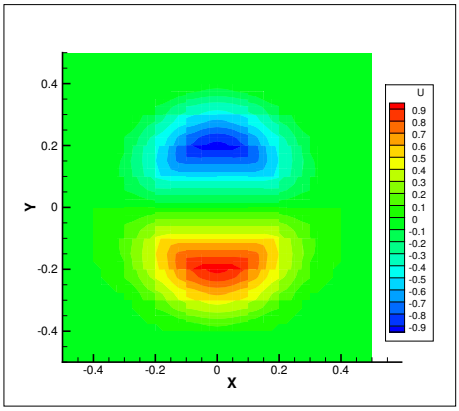
Le cas test "Tube à choc modéré" (*cf.* paragraphe 6.4.2.2) n'est pas présenté car les résultats, déjà corrects sans contrainte sur le schéma préconditionné de base, sont inchangés.

6.6.2.2 Vortex stationnaire

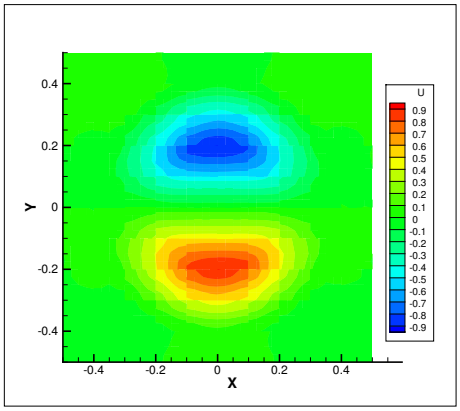
Les figures 6.14(a), 6.14(b), 6.14(c), 6.14(d), 6.14(e) et 6.14(f) illustrent respectivement le champs de vitesse horizontale à $t = 0.1s$ avec la solution exacte, le schéma de Godunov avec la correction de Thornber et avec la correction de Thornber TVB-limité avec $\beta = 0.2$, avec $\beta = 2$, avec $\beta = 20$ et avec $\beta = 200$ pour le sous cas $M_{max} \approx 0.01$.

Les deux corrections (avec limitation ou "non") testées donnent des résultats similaires avec un léger avantage pour la correction de Thornber sans limiteur. Pour $\beta >> 1$, les résultats entre le schéma préconditionné limité et celui préconditionné "non TVB" sont identiques. Pour ce cas test, le choix $\beta \geq 2$ permet d'obtenir des résultats très satisfaisants. La notation "non TVB" est évidemment abusive car le schéma préconditionné de base est aussi TVB ; il est cependant moins contraint que le schéma proposé d'où cet abus de notation.

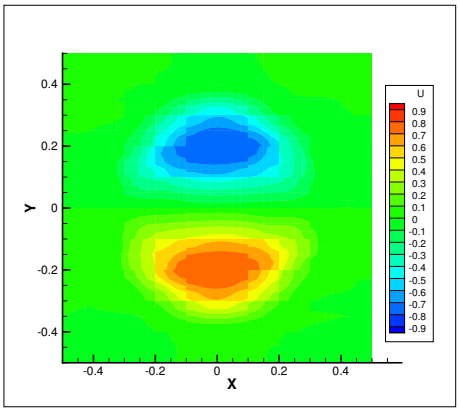
Le même cas avec $M \approx 0.001$ est illustré en figure 6.15. Pour ce cas, on rappelle que la contrainte TVD du paragraphe 6.5.1 illustrée en figure 6.11 donnait clairement de mauvais résultats en annulant la propriété initiale du schéma à préserver l'asymptotique. La contrainte TVB-limité permet d'améliorer les résultats. Pour $\beta \geq 20$, les résultats sont similaires à ceux sans "limitation TVB" et donc très satisfaisant.



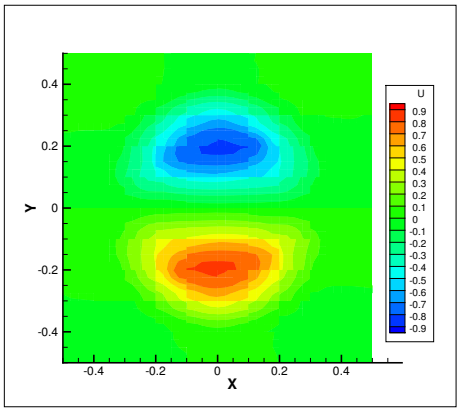
(a) Vitesse horizontale exacte.



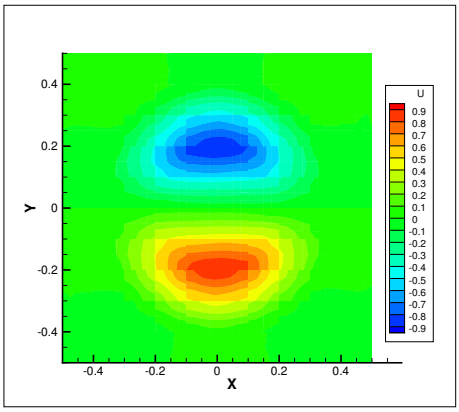
(b) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber.



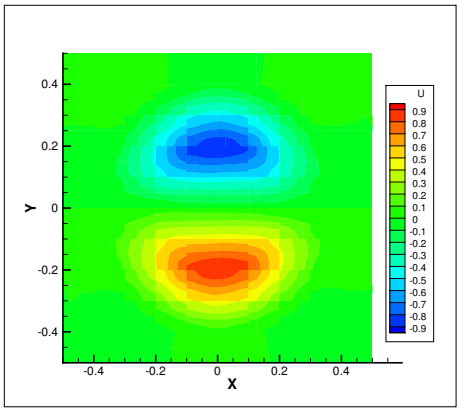
(c) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 0.2$.



(d) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 2$.

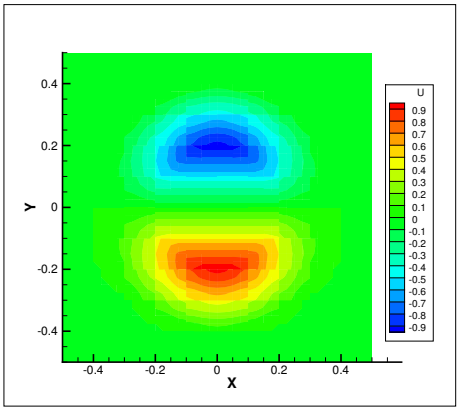


(e) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 20$.

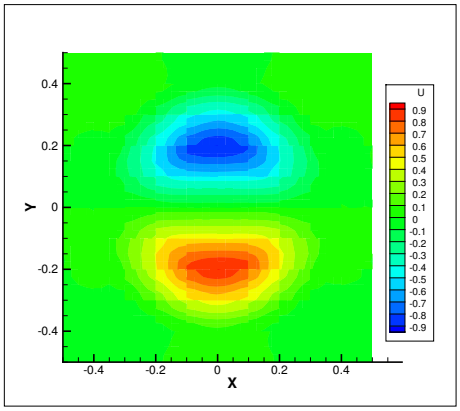


(f) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 200$.

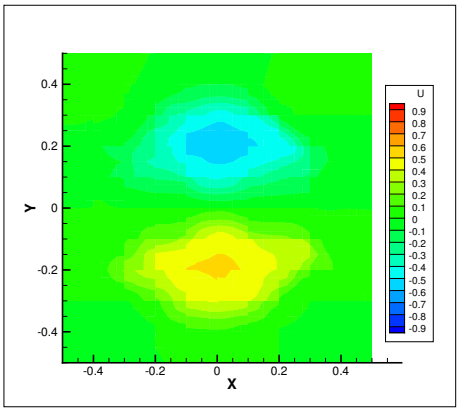
FIGURE 6.14 – Vortex stationnaire à $t = 0.1s$. Effet du preconditionnement TVB-limité en condition faible Mach $M_{max} \approx 0.01$ avec différentes valeurs de β.



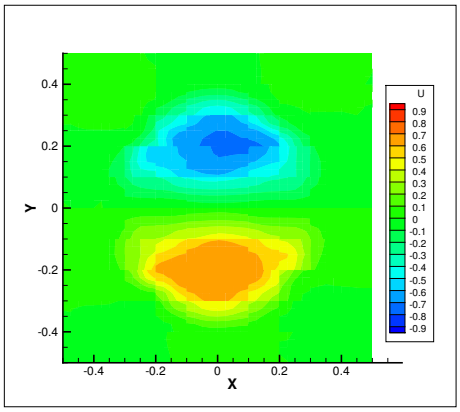
(a) Vitesse horizontale exacte.



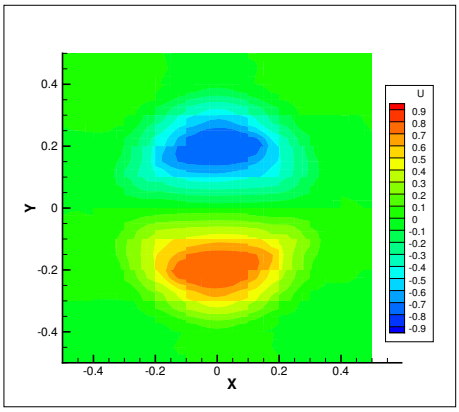
(b) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber.



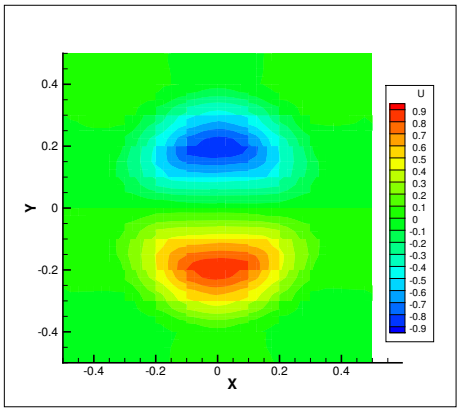
(c) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 0.2$.



(d) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 2$.



(e) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 20$.



(f) Vitesse horizontale avec le schéma de Godunov et correction de Thornber et TVB-limité $\beta = 200$.

FIGURE 6.15 – Vortex stationnaire à $t = 0.1s$. Effet du preconditionnement TVB-limité en condition faible Mach $M_{max} \approx 0.001$ avec différentes valeurs de β.

6.6.3 Bilan

La limitation proposée pour réduire la variation totale des schémas classiques a permis de réduire les oscillations rencontrées pour le cas test "tube à choc bas Mach". L'effet indésirable rencontré avec la contrainte supérieure TVD peut désormais être évité en prenant $\beta >> 1$ sur la contrainte TVB. Avec β élevé, ce nouveau schéma est performant à bas Mach (il préserve l'asymptotique) et moins oscillant (car parfois limité) que le préconditionnement standard.

Nous avons vu qu'au delà d'une certaine valeur de β, les résultats étaient inchangés. Ceci s'explique par le fait que

$$\beta \longrightarrow \infty \Longrightarrow \phi(r) = min\Big(1 - min(1, M), max\big(0, min(2, 2r)(1 + \beta)\big)\Big)$$
$$\longrightarrow \begin{cases} 1 - min(1, M) & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r \leq 0 \text{ (i.e. extremum dans la solution)} \end{cases}$$

Compte tenu des conclusions précédentes on fait le choix d'utiliser cette dernière forme de limiteur TVB pour s'affranchir du paramètre β. Soit :

$$\boxed{\Theta = \begin{cases} min(1, M) & \text{si } r > 0 \\ 1 & \text{si } r \leq 0 \text{ (i.e. extremum dans la solution)} \end{cases}}$$

Ce schéma faiblement limité permet de conserver la propriété de préservation asymptotique, tout en réduisant les oscillations de la formulation initiale.

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a pu voir qu'il est difficile pour un schéma de type Godunov d'être performant à bas Mach pour la résolution des équations d'Euler compressibles barotropes. Ce problème numérique rentre en fait dans un cadre plus large, nommé "asymptotic preserving", qui se rencontre finalement assez souvent lorsqu'une échelle caractéristique d'un modèle tend vers de petites valeurs. En se plaçant dans la lignée des travaux de Guillard et Viozat [90], Dellacherie [53, 54] et Rieper [187] nous avons estimé formellement l'erreur de troncature à bas Mach d'un schéma donné. Dans certaines conditions (par exemple en 2D pour le système barotrope), cette erreur explose en fonction du nombre de Mach. Les termes problématiques, diffusion sur la vitesse, ont ainsi pu être identifiés en accord avec Rieper [187] ou Dellacherie [54]. Différentes corrections proposées dans la littérature, conformes avec ce résultat, ont été testées numériquement. Il est ressorti que ces préconditionnements permettent de retrouver un schéma qui préserve l'asymptote. Cependant des effets indésirables (oscillations numériques) ont été mis en évidence, en accord par exemple avec les résultats numériques de Iampietro et al. [100].

Une transformation de ces schémas preconditionnés, en l'occurrence celui de Thornber [216], vers une variante TVD a été proposée et testée. Ce schéma n'est plus sujet aux oscillations parasites (en 1D) mais perd hélas la propriété initiale de préservation d'asymptotique à très bas Mach. Pour des calculs délicats nécessitant un solveur très robuste, ce schéma donne cependant des résultats acceptables à faible Mach et est donc un bon candidat.

Pour outrepasser cette perte de précision à très faible Mach, la limitation TVD proposée a été revue et une limitation TVB a été construite. Les tests numériques effectués avec ce dernier schéma ont montré qu'il est possible de réduire les oscillations du schéma préconditionné standard, tout en conservant quasiment parfaitement la propriété de préservation asymptotique. Pour arriver à ce résultat il faut limiter le préconditionnement seulement dans les zones contenant un extremum ce qui rend la limitation finalement très simple à coder (*cf.* equation (6.6.3)). Dans le fond par contre, un résultat important de ce chapitre est qu'il n'est *a priori* pas possible d'obtenir un schéma Tous Mach exempt d'oscillations numériques car la contrainte permettant de rendre le schéma TVD n'est pas compatible avec la contrainte le rendant bon à tous les nombres de Mach. Le schéma proposé au final (schéma "tous Mach TVB-limité") réduit cependant ce phénomène indésirable en le rendant *a priori* acceptable.

Chapitre 7

Méthodes de maillages adaptatifs

Sommaire

7.1 Introduction 144
7.2 Présentation de la méthode BB-AMR 144
7.3 Critère et seuil de raffinement 146
7.4 Une projection conservative pour les modèles verticalement intégrés 149

Ce chapitre a pour but de présenter la méthode de maillage adaptatif utilisée dans cette thèse et de résumer les travaux effectués pour tenter d'améliorer son efficacité et son utilisation pratique.

7.1 Introduction

Les méthodes de raffinement de maillage se nomment généralement AMR pour "Adaptive Mesh Refinment". L'intérêt principal de l'utilisation d'un maillage adaptatif pour simuler un événement est d'obtenir une erreur de discrétisation la plus uniforme possible. Cela permet, pour un taux d'erreur donné, d'obtenir un nombre de cellules minimum et donc de maximiser les performances du calcul. Par exemple, lorsqu'on étudie un phénomène instationnaire comme la propagation d'une vague, il arrive qu'à certains endroits du domaine de calcul rien ne se passe à un instant donné, puis que plus tard ce ne soit plus le cas. Comme il n'a guère d'intérêts à utiliser une grille très fine aux endroits du domaine où il ne passe rien, il est très utile de pouvoir raffiner le maillage dans ces zones uniquement lorsque cela devient nécessaire.

Il existe une multitude de méthodes à maillages adaptatifs. On présente dans ce paragraphe deux des plus connues. La première est basée sur des cellules mères, ou macro cellules, relativement grossières et fixes dans le temps qui peuvent être raffinées (puis déraffinées) si besoin au cours d'un calcul. Cette approche se nomme généralement BB-AMR pour "Block Based", les blocs étant les cellules mères. La seconde est basée sur un maillage qui ne comporte pas de cellules mères. Le maillage est alors totalement adaptatif. Généralement, pour cette approche le nombre total de cellules est gardé constant au cours d'une simulation et les nœuds des cellules sont déplacés pour augmenter la densité de cellules à certains endroits et inversement à d'autres (pour plus de détails sur ce type d'approche, le lecteur peut par exemple se référer à Arpaia et Ricchiuto [10]). Un des avantages de cette dernière méthode est qu'elle permet d'avoir des zones avec des cellules extrêmement grandes, puisque aucune maille n'est fixée. Un des avantages de l'approche BB-AMR est que la structure (macro cellules) est fixe, les temps de remaillages sont par conséquent minimisés. Le code qui nous a servi de base pour cette thèse bénéficie de la méthode BB-AMR pour notamment résoudre un modèle bi-fluide (nommé modèle minimum dans le chapitre traitant de la modélisation bi-fluide) suite au travaux de Ersoy et al. [66] et Golay et al. [80] (voir aussi Altazin et al. [7]).

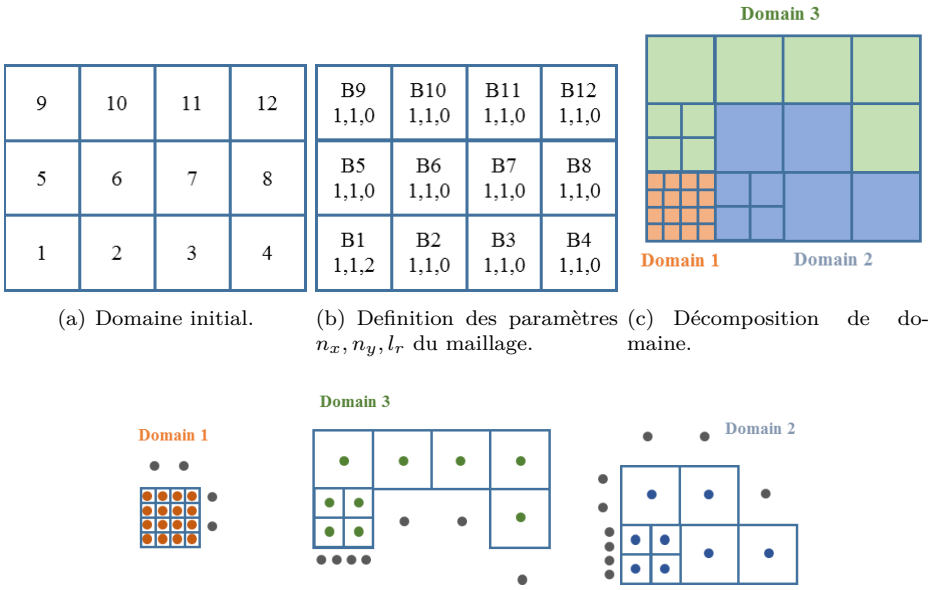
Les travaux effectués sur les méthodes AMR au cours de cette thèse concernent premièrement la description d'une méthode de projection (*i.e.* "réinitialisation" des variables à chaque modification du maillage) pour les modèles type "eau peu profonde", afin de réduire les problèmes de conservation de masse. Le deuxième sujet qui nous a intéressé concerne la détermination de l'erreur *a priori* et du seuil à se fixer pour déclencher le raffinement du maillage. Généralement, pour un critère censé représenter au mieux l'erreur dans chaque cellule, on raffine les zones où "l'erreur" est la plus élevée. Une procédure très utilisée pour cela est de calculer la moyenne du critère d'erreur sur le domaine et de raffiner les cellules au dessus d'un certain pourcentage de cette moyenne. La valeur en question, nommée seuil de raffinement, est fixée pour un calcul donné et doit souvent être calibrée suivant les cas tests effectués. Un des défauts de cela est que rien n'assure que ce seuil doive être fixe car la solution évolue au cours d'une simulation. D'autre part, la calibration de ce seuil pour chaque nouvelle simulation est relativement chronophage. Une méthode pour déterminer la zone à raffiner sans calibration, ou à seuil automatique, est proposée. Ces travaux ont respectivement donnés lieux aux publications (en cours de revue pour les deux dernières) suivantes : Pons et al. [176], [175] et Pons et Ersoy [174]. Un résumé est donné dans ce chapitre mais le lecteur peut se référer à ces références pour plus de détails.

7.2 Présentation de la méthode BB-AMR

Comme évoqué en introduction, le principe de la méthode BB-AMR est de construire initialement un maillage de cellules mère (les blocs) qui seront fixes dans le temps. Ces blocs peuvent contenir un nombre quelconque de cellules dont le nombre peut varier au cours d'un calcul. Pour chaque bloc, on définit une discrétisation n_x, n_y et n_z et un niveau de raffinement l_r de sorte que le nombre de cellules dans la direction x soit $2^{l_r} n_x$. L'écart entre les niveaux de raffinement de deux blocs adjacents est fixé à 2, comme illustré en figure 7.1.

Dès que cela devient nécessaire, le maillage de chaque bloc peut être changé. A ce moment là, les répartitions des cellules par domaines sont adaptées grâce à l'algorithme de Cuthill-McKee pour conserver une efficacité optimale en calcul parallèle. A l'interface entre les domaines, des cellules fictives sont générées pour permettre la communication entre les domaines basée sur la norme MPI (Message Passing Interface). Chaque domaine est associé à un processus qui est chargé sur un cœur de calcul. Bien que la structure (les blocs) du maillage ne change pas pour un calcul, le raffinement ou dé-raffinement, ainsi que la renumérotation des domaines est un processus coûteux. Comme les macro cellules sont généralement grosses, il est possible de définir une sorte de CFL de bloc permettant de ne pas changer le maillage à chaque pas de temps. Le temps maximal de non remaillage est estimé par le ratio en la taille du plus petit bloc et la vitesse caractéristique du phénomène étudié. A chaque fois que le maillage est changé les variables sur les anciennes cellules doivent être projetées sur le nouveau maillage.

Précisons que les maillages utilisés dans cette thèse sont non structurés et uniformes par blocs mais qu'il est possible d'utiliser d'autres types de maillages non structurés. Un exemple de maillage 3D est donné en figure 7.2.



(a) Domaine initial.

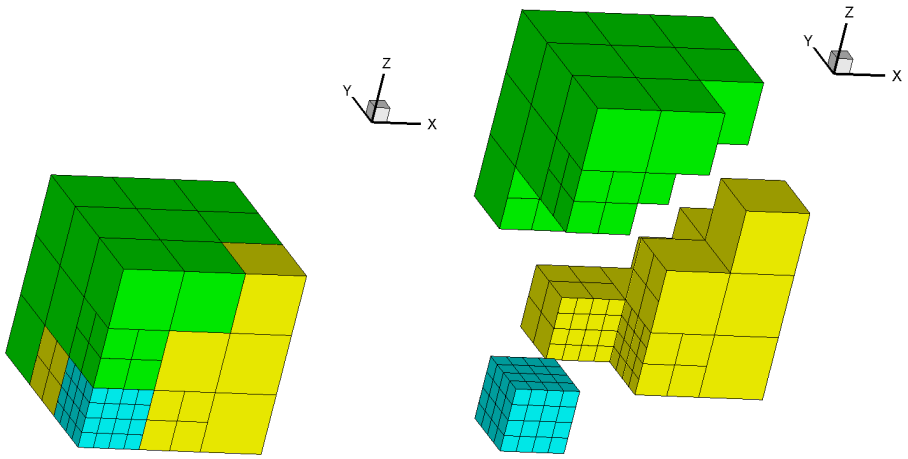
(b) Definition des paramètres n_x, n_y, l_r du maillage.

(c) Décomposition de domaine.

(d) Génération du maillage.

FIGURE 7.1 – Méthode BB-AMR.

Un des points clefs des méthodes AMR est de déterminer où il est nécessaire de raffiner ou dé-raffiner le maillage. Pour cela il faut commencer par calculer un critère pour chaque cellule représentatif de l'erreur commise, ou que l'on va commettre. Ensuite il faut décider des cellules à sélectionner pour rendre l'erreur la plus uniforme possible. Le paragraphe qui suit est consacré à ce sujet.



(a) Domaine de calcul. (b) Sous domaines pour calcul parallèle.

FIGURE 7.2 – Exemple 3D de la décomposition de domaines et d'un maillage typique.

7.3 Critère et seuil de raffinement

Pour calculer un critère représentatif de l'erreur, la meilleure méthode est sans doute d'effectuer un pas de temps sur un certain maillage, noter les variables, revenir en arrière, refaire le même pas de temps sur un maillage différent et comparer les variables. L'écart entre les résultats donne alors une estimation de l'erreur. Cette méthode est dû à Berger et al. [24]. Hélas cette approche est très coûteuse et donc peu utilisée en pratique.

L'idée pour réduire ce coût est de se donner un critère d'erreur *a priori*. Pour des systèmes compliqués, il est généralement très difficile d'obtenir une expression de l'erreur. On a donc généralement recours à une expression intuitive dépendant du problème résolu. Par exemple, pour la résolution de modèle en eau peu profonde, un des critères les plus utilisés est le gradient de surface libre. Des critères potentiellement plus complets, comme la production numérique d'entropie, sont aussi parfois utilisés (*cf.* par exemple Golay et al. [80]). Il est cependant difficile de démontrer qu'un critère est supérieur à un autre car cela dépend souvent du cas test effectué et que, même sur un seul cas test, certains critères sont meilleurs que d'autres dans certaines zones et *vice versa*. Le lecteur peut se référer par exemple à Pons et Ersoy [174] où différents critères sont testés sur un cas où la solution analytique est connue. Il en ressort que, pour les critères sensés, les supports des critères (*i.e.* zone ou les critères sont non nuls) sont relativement proches de la vrai erreur. Par contre les ordres de grandeur peuvent être localement très différents. Ces derniers points sont cruciaux.

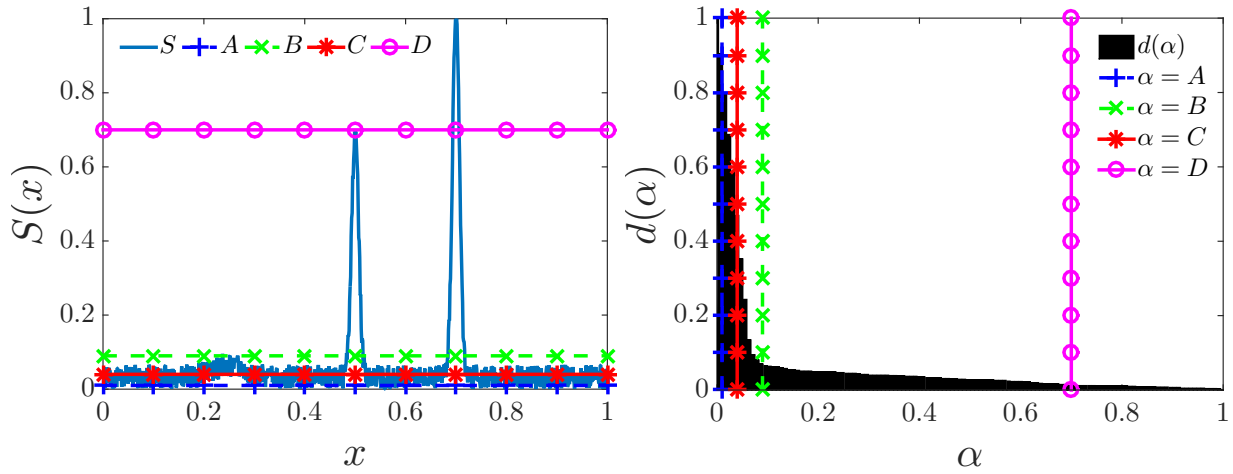
Si les supports sont relativement sensés, il est alors possible d'envisager la détermination des zones à raffiner avec un choix adéquat de seuil (valeur du critère à partir de laquelle on raffine).

La plupart des utilisateurs de méthodes AMR déterminent les zones à raffiner en se donnant pour seuil un pourcentage de la moyenne de leur critère sur tout le domaine. Cette méthode à l'avantage d'être très simple. Néanmoins, si le critère explose (à tort) dans certaines zones, toute tentative de moyenne sur le domaine pour obtenir une "référence" pour savoir environ à partir de quelle valeur seuil il faut raffiner, ne sera pas représentative. On pourrait par exemple dans ce cas se dire que la médiane est un meilleur choix. D'autre part, comme la solution évolue, un certain seuil basé sur un pourcentage de la moyenne peut être judicieux à un instant et mauvais à un autre . Il existe évidemment d'autres approches (le lecteur peut se référer à Pons et Ersoy [174] pour une revue), mais cette dernière est la principale utilisée. Cette revue à cependant fait ressortir une méthode originale, proposée par Dannenhoffer [48], qui consiste à construire une distribution d définie de la manière suivante : à un seuil donné, d vaut le nombre de cellule au dessus de ce seuil. Avec S_k la valeur du critère sur la cellule k et α_j une séquence croissante partant de 0 et allant jusqu'à

$max_k(S_k)$, on a :

$$d = \#\{k; S_k > \alpha_k\} \tag{7.3.1}$$

Pour un critère donné (*cf.* figure 7.3(a)), la distribution associée normalisée par le nombre total de cellules est illustrée en figure 7.3(b). Cette distribution contient beaucoup d'informations. Par exemple à chaque



(a) Critère d'erreur S et valeur de seuil arbitraire $\{A, B, C, D\}$.

(b) Distribution de Dannenhoffer.

FIGURE 7.3 – Distribution de Dannenhoffer pour un critère donné et lien entre un seuil sur le critère et sur la distribution. Pour le seuil B environ 10% des cellules sont sélectionnées. Images extraites de Pons et Ersoy [174].

maximum local du critère, il y a un "saut" dans la distribution. Une zone intéressante de cette fonction est le "genou" : la zone entre B et C. Il semble que quand la distribution explose, on se trouve dans le "bruit" du critère, alors qu'à l'inverse, lorsque d varie peu, on est loin du support du critère qui nous intéresse. La zone entre ces deux comportements est ce fameux "genou". Cependant, si la fonction sur laquelle on s'appuie pour ces explications est relativement lisse, en pratique elle peut être assez saccadée à cause des maximums locaux du critère. Il est par conséquent assez difficile de déterminer ce genou en pratique. Dannenhoffer a donc proposé de raisonner sur une pente limite de la distribution pour s'approcher de ce "genou" avec :

$$\frac{\partial\big(d(\alpha)\big)}{\partial\alpha} \approx -1 \tag{7.3.2}$$

Mais encore une fois, le calcul de la dérivée d'une fonction non lisse n'a rien d'évident. Pour arriver à un résultat il faut passer par un filtrage de la distribution. Hélas, il est difficile de trouver une méthode de filtrage qui fonctionne à tous les coups, ce qui mène parfois à des seuils aberrants.

Pour faire court, la méthode que nous avons proposée est basée sur une transformation (nommée f) de la distribution d, de sorte que le seuil à sélectionner soit un maximum global de f. La sélection d'un maximum global est en effet directe et robuste car non sujette à des besoins de filtrages ou autres. Cette transformation est la suivante :

$$f(\alpha) = \alpha d(\alpha) \tag{7.3.3}$$

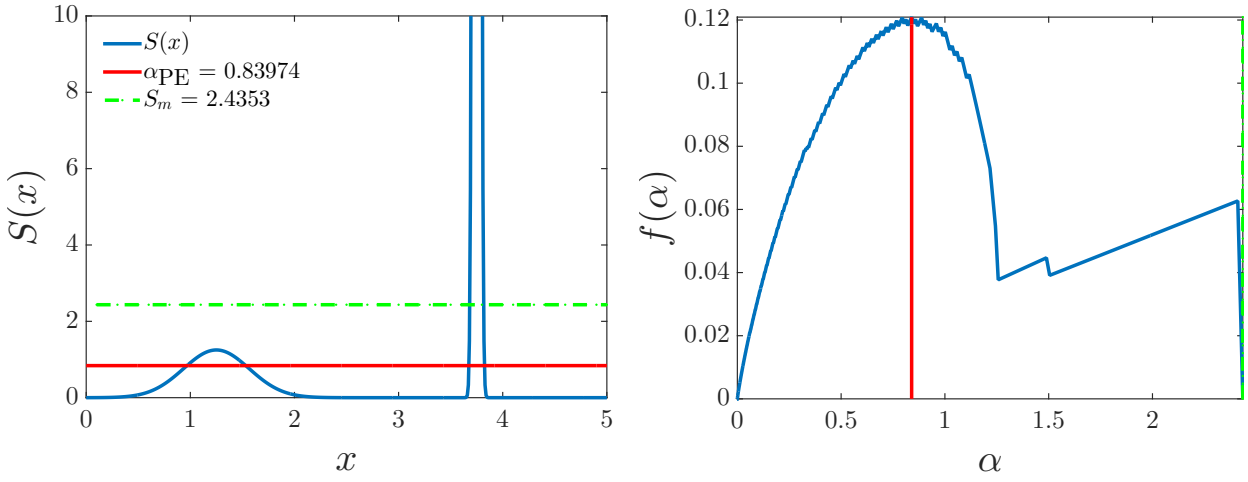
On prend pour seuil de raffinement :

$$\alpha_s \text{ tel que : } f(\alpha_s) = max(f(\alpha)) \text{ sur } \alpha \in [0, \overline{\alpha}] \tag{7.3.4}$$

Lorsque le critère est varié en amplitude, cette approche tend à donner un seuil inférieur au critère moyen ce qui permet de réduire l'influence d'extremum local sur le choix du seuil de raffinement. A l'inverse, lorsque

le critère est relativement uniforme, cette approche tend à donner un seuil proche ou égal au critère moyen, qui dans ce cas homogène est représentatif et donc un bon choix. Ces deux cas de figures sont illustrés en figures 7.4 et 7.5.

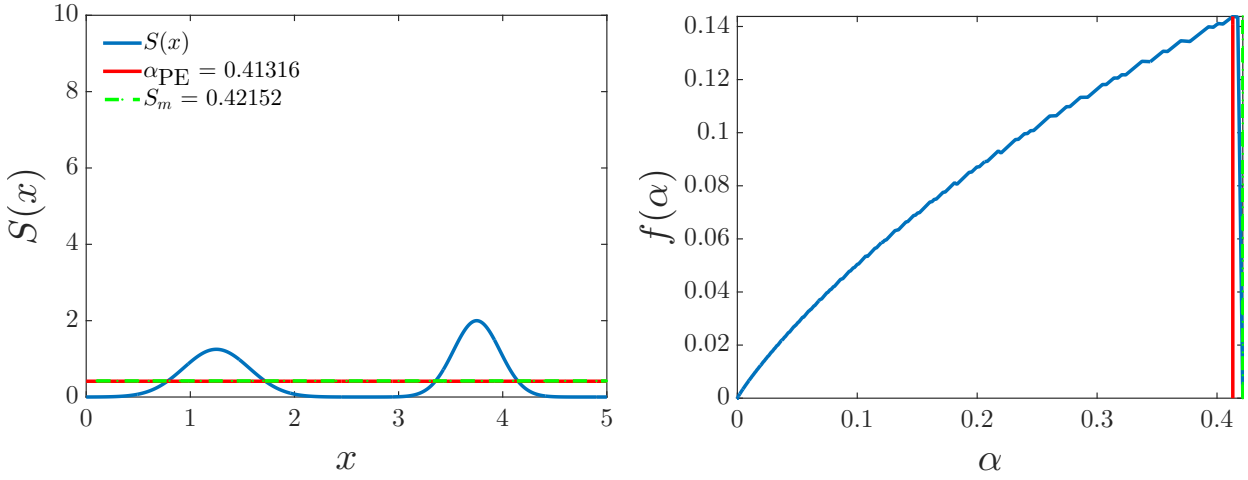
Évidemment il faut être conscient que sans un critère d'erreur vraiment représentatif de l'erreur, il est difficile de parler de choix optimal. Par contre, cette méthode a l'avantage de ne pas faire appel à des paramètres, ce qui la rend automatique. Pour plus de détails sur la construction de cette approche le lecteur est renvoyé à Pons et Ersoy [174]. Pour des applications de cette méthode sur des cas réels, avec le modèle de Saint-Venant, le lecteur peut se référer, en plus de cette dernière référence, à Pons et al. [175]. De futures investigations seraient intéressantes pour consolider cette proposition.



(a) Critère d'erreur S et valeur de seuil défini soit par le critère moyen S_m sur le domaine, soit par la méthode proposée α_{PE}.

(b) Distribution trasnformée f permettant la détermination de α_{PE}.

FIGURE 7.4 – Avantage de la méthode proposée pour choisir un seuil de raffinement lorsque le critère contient des valeurs inhomogènes. Le critère moyen sur le domaine n'est pas représentatif de l'ensemble de la série car il est affecté par les valeurs extrèmes.



(a) Critère d'erreur S et valeur de seuil défini soit par le critère moyen S_m sur le domaine, soit par la méthode proposée (α_{PE}).

(b) Distribution trasnformée f permettant la détermination de α_{PE}.

FIGURE 7.5 – Méthode proposée pour choisir un seuil de raffinement lorsque le critère contient des valeurs homogènes. Le choix tend vers le critère moyen qui est représentatif du critère sur le domaine.

7.4 Une projection conservative pour les modèles verticalement intégrés

Une des parties des méthodes AMR est la projection des variables. Pour une condition initiale sur un maillage donné, on résout les équations pendant un certain temps, puis on décide d'adapter le maillage. Connaissant les variables sur l'ancien maillage, il faut "initialiser" le nouveau. Cette étape s'appelle généralement étape de projection.

Suivant les modèles résolus, cette étape ne pose aucun problème. En règle générale, pour toute cellule raffinée, les valeurs des variables de la cellule parente sont affectées aux cellules enfants. Lorsqu'une cellule est dé-raffinée, les valeurs mères sont moyennées et affectées à la cellule enfant (*cf.* par exemple Berger et Colella [22] pour plus de détails). En se basant sur les gradients des cellules mères, il est possible d'arriver à une méthode plus élaborée comme dans Berger et al. [23].

Dans le cas des modèles en eau peu profonde, l'intégration verticale induit un terme d'effet bathymétrique qui engendre des difficultés. Une des contraintes à respecter pour ces modèles est de conserver le niveau de surface libre pour éviter la génération d'ondes non physiques. Lors de la projection, la bathymétrie peut évoluer car les zones où le maillage devient plus fin peuvent utiliser une bathymétrie plus précise et *vice versa*. Comme on assume le niveau de surface libre (noté dans la suite η) constant, un changement quelconque de bathymétrie (z) peut induire un changement de hauteur d'eau ($h = \eta - z$) et donc une perte ou un gain de masse. Ceci est illustré en figure 7.6.

Il est possible de négliger les pertes et créations de masse dans certains contextes, comme par exemple dans Popinet [180]. Cependant il est en fait possible en ajoutant une contrainte entre les niveaux d'interpolation / extrapolation de bathymétrie d'éliminer ce problème. Pour présenter formellement cette contrainte dans le cas de la méthode BB-AMR, on note d la dimension du problème, 2^d le nombre de cellules C_{0i} de surface $|C_{0i}|$ et z_{0oi}, la bathymétrie qui correspond aux sous-cellules de la cellule C_0. En supposant la masse volumique ρ

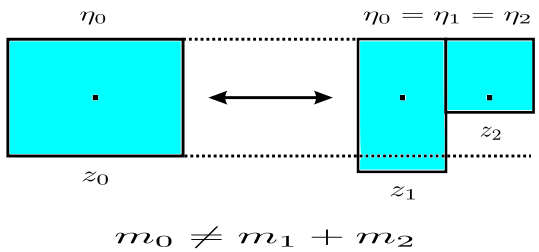


FIGURE 7.6 – Diffilcultés de conservation de masse lors de l'étape de projection AMR. Ici il n'y a pas de lien entre les différents niveaux de bathymétrie. Chaque niveau vient d'une interpolation ou extrapolation propre pour un unique fichier de donnée. Rien n'assure donc qu'entre deux niveaux de raffinement la masse soit conservée.

constante, la contrainte à respecter est :

$$\int_{oldmesh} \rho dV = \int_{newmesh} \rho dV \iff \rho|C_0|h_0 = \sum_{i=1}^{2^d} \rho|C_{0i}|h_{0i} \quad \underset{h_i \geq 0}{\iff} |C_0|(\eta_0 - z_0) = \sum_{i=1}^{2^d} |C_{0i}|(\eta_{0i} - z_{0i})$$
$$\underset{\eta = cste}{\iff} z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{2^d} |C_{0i}| z_{0i}}{|C_0|} \tag{7.4.1}$$

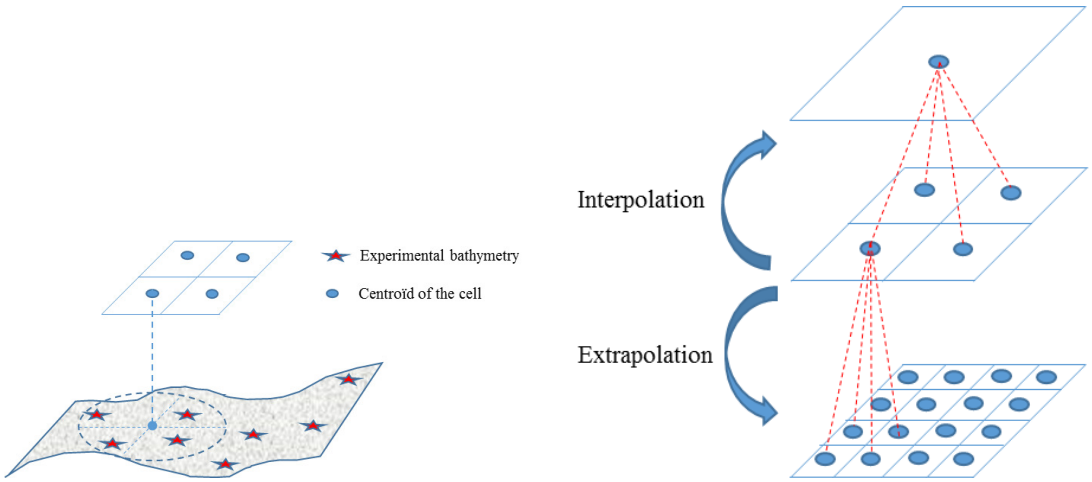
Dans le cas d'un maillage 1D uniforme, on a donc :

$$z_0 = \frac{z_{01} + z_{02}}{2} \tag{7.4.2}$$

Ce résultat simple montre que n'importe quel raffinement ou dé-raffinement de cellule sous la contrainte de $\eta = cste$ et de masse conservée, doit respecter le fait que la grille bathymétrique de rang n doit être une moyenne de la grille de niveau $n+1$. La fonction $(z_{01}, z_{02}) \longrightarrow \dfrac{z_{01} + z_{02}}{2}$ étant non bijective, la seule solution pour respecter toutes ces contraintes est que la grille la plus fine, qui peut apparaître au cours d'un calcul, soit la grille de bathymétrie maître et que toute les grilles plus grossières soient définies à partir de ce niveau.

Discrétisation de la bathymétrie : En pratique, comme les données bathymétriques ont une précision finie, il n'est pas toujours nécessaire de la définir sur la grille la plus fine. On choisit un niveau de maillage cohérent avec la précision de bathymétrie souhaitée et on interpole les données sur les centres des cellules de ce maillage, comme illustré en figure 7.7. On est donc capable de définir la bathymétrie sur n'importe quelle grille dé-raffinée en respectant la formule (7.4.1) depuis la grille maître. Pour définir la bathymétrie sur une grille plus raffinée que la précision de la bathymétrie, on fait le choix trivial $z_{0i} = z_0$ pour extrapoler les données ce qui satisfait évidemment (7.4.1).

Remarque 35. *Il est important de noter que le processus d'interpolation / extrapolation de bathymétrie vers un maillage non structuré peut être très coûteux. Pour minimiser ce coût, nous réorganisons les données bathymétriques avant de les traiter. Pour plus de détails sur ce point le lecteur peut se référer à Pons et al. [176].*



(a) Interpolation de la bathymétrie sur la grille maître.

(b) Interpolation / extrapolation des sous grilles depuis les valeurs de la grille maître.

FIGURE 7.7 – Méthode de construction des valeurs de bathymétrie au centre des cellules.

Cas du raffinement Une fois que la bathymétrie est connue sur le nouveau maillage, la hauteur d'eau est déterminée par $h_i = max(0, \eta_i - z_i)$ avec $\eta_i = cste$. Ce qui donne :

$$h_{0i} = max(0, h_0 + z_0 - z_{0i}) \tag{7.4.3}$$

L'opérateur "max" est important dans le cas où le maillage est modifié près d'une transition sec/mouillé.

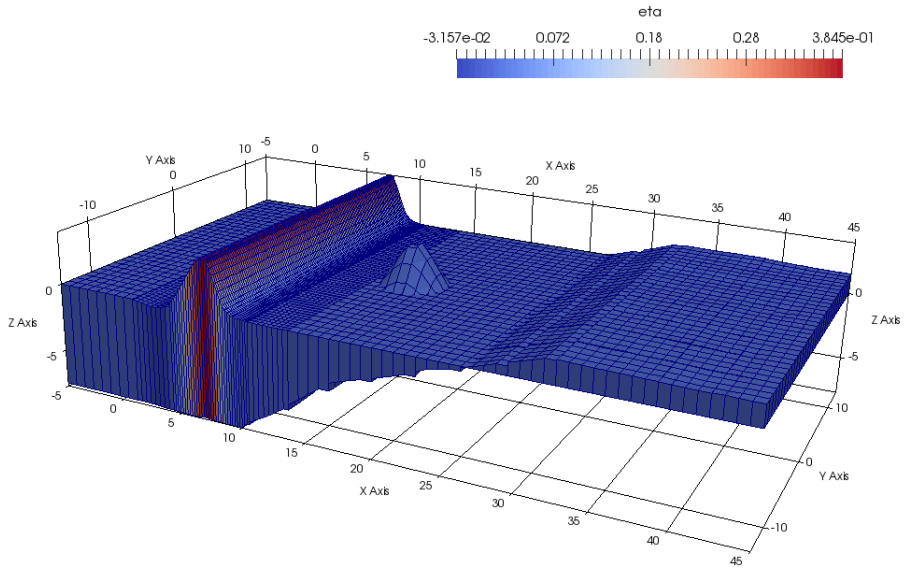
Une fois la hauteur d'eau connue, la quantité de mouvement (ou la vitesse) peut être mise à jour. Par analogie avec le raisonnement précédent, la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$h_0 u_0 = \frac{\sum_{i=1}^{2^d} |C_{0i}| h_{0i} u_{0i}}{|C_0|} \tag{7.4.4}$$

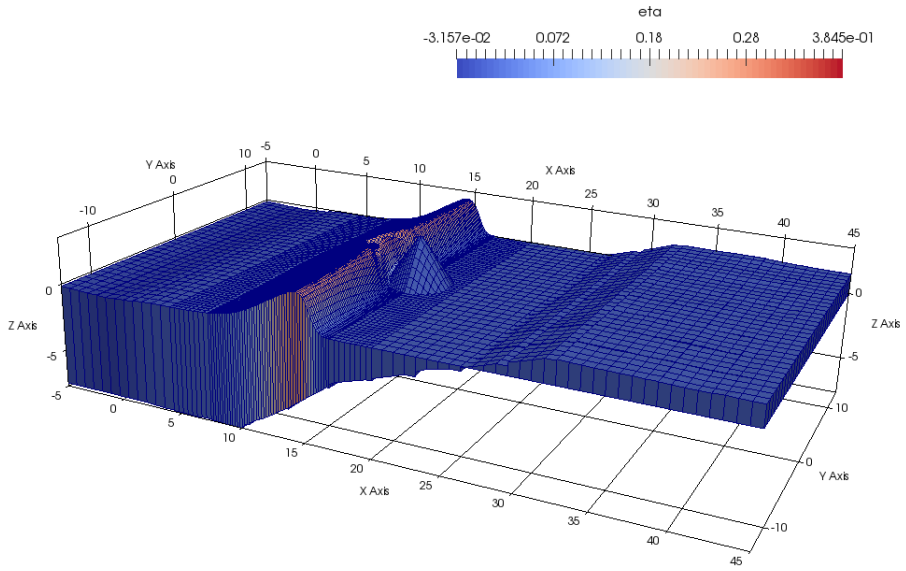
Quand le maillage est raffiné, il faut déterminer u_{0i} depuis u_0. Par conséquent, comme les h_{0i} sont calculés par 7.4.3, un choix simple satisfaisant l'équation (7.4.4) est

$$u_{0i} = u_0 \tag{7.4.5}$$

Le cas de dé-raffinement ne comporte pas de difficultés supplémentaires. Par contre lorsqu'on se trouve sur la ligne sec/mouillé, il faut considérer une série de cas particuliers. Pour ces cas annexes et le cas du dé-raffinement, le lecteur est renvoyé à Pons et al. [176]. Le lecteur pourra aussi trouver dans ce papier une application numérique 2DV montrant les bonnes qualités de conservation de masse de cette méthode. Pour finir, on illustre simplement l'adaptation de la bathymétrie au cours d'un calcul qui permet de minimiser le nombre de cellules, lorsque rien ne se passe en zone sèche (*cf.* figure 7.8). Ce point est particulièrement utile pour réduire le coût d'un calcul de tsunami réel mettant un certain temps pour s'approcher de la côte, car cette zone n'a pas besoin d'être bien définie au début de la simulation.



(a) $t = 3.5$ s.



(b) $t = 5.5$ s.

FIGURE 7.8 – Adaptation de la bathymétrie lors de la submersion de l'île conique.

Chapitre 8

Applications numériques des modèles d'ondes longues

Sommaire

8.1 Applications numériques avec le modèle de Saint-Venant 154
8.1.1 Méthodes numériques pour la résolution du modèle de Saint-Venant 154
8.1.2 Cas tests pour le modèle de Saint-Venant 154
8.1.2.1 Tube à choc 154
8.1.2.2 Détente sur fond sec 155
8.1.2.3 Ile conique 156
8.1.2.4 Tsunami d'Hokkaido-Nansei-Oki de 1993 157
8.1.2.5 Tsunami de Tohoku de 2011 159
8.1.3 Bilan 173
8.2 Applications numériques avec le modèle de Serre-Green-Naghdi "standard" et dissipatif 173
8.2.1 Méthodes numériques 173
8.2.2 Cas tests pour le modèle de Serre-Green-Naghdi "standard" et dissipatif 173
8.2.2.1 Propagation de soliton 173
8.2.2.2 Rupture de barrage sur fond humide 174
8.2.2.3 Propagation de soliton sur fond variable et déferlement 175
8.2.3 Bilan 184

L'objet de ce chapitre est de valider et d'utiliser le modèle de Saint-Venant présenté dans le chapitre 2 et le modèle SGN dissipatif proposé dans le chapitre 3. Des tests académiques sont présentés et des études de cas réels sont effectuées. En particulier le tsunami de 2011 au Japon est investigué avec le modèle de SV sur de grandes échelles, et une étude locale de l'interaction avec la digue de la baie de Kamaishi est présentée. Le cas réel traité avec le modèle de SGN dissipatif concerne le déferlement d'une onde solitaire sur une plage. Ces modèles ont été implémentés dans le code non structuré Eolens (développé par l'IMATH et Principia). La résolution peut être effectuée en parallèle (norme MPI, Message Passing Interface). La résolution de ces modèles se base sur la méthode des volumes finis avec des schémas de type Godunov. Hors particularité rappelée avant les cas tests, le lecteur est renvoyé au chapitre 5 où les méthodes employées sont détaillées.

8.1 Applications numériques avec le modèle de Saint-Venant

8.1.1 Méthodes numériques pour la résolution du modèle de Saint-Venant

En s'appuyant sur le chapitre 5 on utilise suivant les cas tests un schéma d'Euler en temps d'ordre 1 ou de Runge-Kutta d'ordre 2. L'intégration en espace est basée sur le solveur de Godunov à l'ordre 1 ou à l'ordre 2 en suivant la méthode de Barth et Jespersen avec le limiteur minmod. La méthode BB-AMR présentée au chapitre 7 est utilisée sur les cas 2DV. Le critère d'erreur correspond à la production numérique d'entropie et le seuil de raffinement est sélectionné de manière automatique grâce à la méthode proposée au chapitre 7. Le traitement du terme bathymétrique requiert une attention particulière. Une contrainte minimum pour simuler des écoulements, où certaines parties du domaine sont parfois au repos, est d'utiliser un schéma qui préserve l'équilibre de "lac au repos". Pour ce faire on suit Audusse et al. [12]. Lorsqu'une solution exacte est présentée, elle vient de la résolution exacte du problème de Riemann donnée au chapitre 5.

8.1.2 Cas tests pour le modèle de Saint-Venant

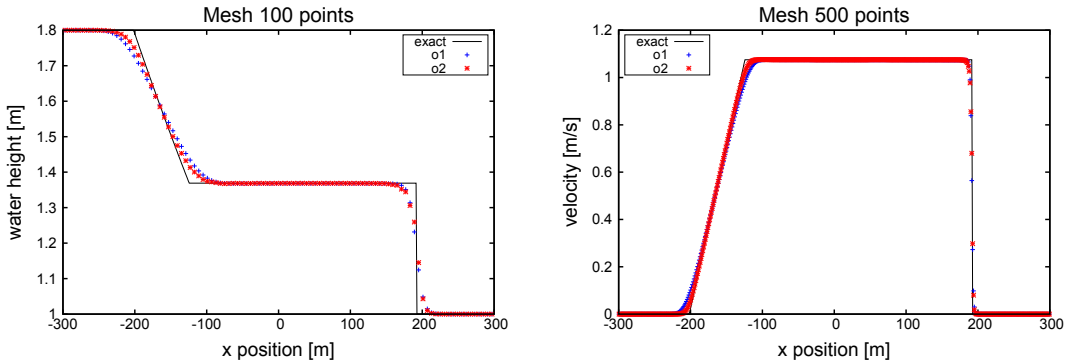
8.1.2.1 Tube à choc

Ce cas test permet d'évaluer la résolution du modèle dans des conditions raides, avec une forte détente et un choc intense. Un tube $600m$ est considéré. On se donne un état à droite et un état à gauche du centre du tube récapitulé dans le tableau 8.1. Le maillage est composé de $N = \{100, 500\}$ cellules uniformes. Le temps final est $t_{fin} = 48s$. La condition CFL est $CFL = 0.8$.

Les figures 8.1(a) et 8.1(b) présentent les champs de hauteur d'eau et de vitesse, avec les schémas en temps et en espace à l'ordre 1 et à l'ordre 2, en fonction de la solution exacte. La montée en ordre est bénéfique dans les zones non discontinues. Les résultats sont satisfaisants.

$h_L[m]$	$u_L[m/s]$	$h_R[m]$	$u_R[m/s]$
1.8	0	1	0

Table 8.1 – Conditions initiales du cas test tube à choc.



(a) Hauteur d'eau.

(b) Vitesse.

FIGURE 8.1 – Tube à choc à $t_{fin} = 48s$.

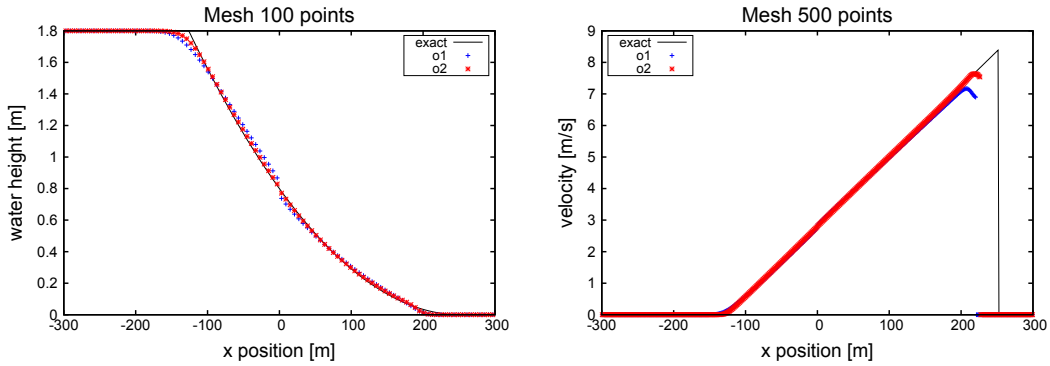
8.1.2.2 Détente sur fond sec

Ce cas test permet d'évaluer le traitement d'une transition sec-mouillée. Un tube $600m$ est considéré. On se donne un état à droite et un état à gauche du centre du tube récapitulé dans le tableau 8.2. Le maillage est composé de $N = \{100, 500\}$ cellules uniformes. Le temps final est $t_{fin} = 30s$. La condition CFL est $CFL = 0.8$.

Les figures 8.2(a) et 8.2(b) présentent les champs de hauteur d'eau et de vitesse, avec les schémas en temps et en espace à l'ordre 1 et à l'ordre 2, en fonction de la solution exacte. Les résultats sont satisfaisants.

$h_L[m]$	$u_L[m/s]$	$h_R[m]$	$u_R[m/s]$
1.8	0	0	0

TABLE 8.2 – Conditions initiales du cas test détente sur fond sec.



(a) Hauteur d'eau.

(b) Vitesse.

FIGURE 8.2 – Détente sur fond sec à $t_{fin} = 30s$.

8.1.2.3 Ile conique

Ce cas test permet d'évaluer la résolution du modèle en 2D sur bathymétrie variable avec reconstruction AMR. Il consiste en un soliton se propageant sur fond plat puis rencontrant une île conique. Pour finir la vague inonde une "plage". Notons que ce cas n'est pas parfaitement représentatif d'un tsunami car les solitons sont généralement peu semblables à ces vagues. Cependant, en terme de validation, ce cas est assez complet et l'étude expérimentale présentée par Lynett et al. [140] donne accès à des mesures de hauteurs d'eau (sondes WGH) et de vitesses (sondes ADV) variées. Ce cas test fait partie des cas étudiés dans le projet Tandem. La figure 8.3 illustre ce cas test et le placement des sondes. Pour plus de détails, le lecteur peut par exemple se référer à Pons et al. [175] et [176]. Les conditions aux limites latérales sont de type mur, celle en amont du soliton de type ouverte et celle en bout de plage de type mur. La condition initiale utilisée est un soliton solution du modèle de Boussinesq au premier ordre (*cf.* par exemple Pons et al. [175]). Du point de vue numérique, la méthode AMR présentée au chapitre 7 est utilisée. L'intégration en temps et en espace est d'ordre 2 avec une CFL de 0.5. Différents maillages ont été testés pour vérifier la convergence. Le plus grossier contient des cellules carrées de taille minimum 0.1m tandis que le plus fin de 0.025m.

Les résultats de hauteur d'eau à différents points du domaine sont présentés en figure 8.4(a), 8.4(b), 8.5(a) et 8.5(b). La méthode AMR permet un gain en efficacité de calcul de l'ordre de 2. Les résultats convergent en maillage et sont globalement de qualité. Pour une analyse plus détaillée le lecteur est renvoyé à Pons et al. [175].

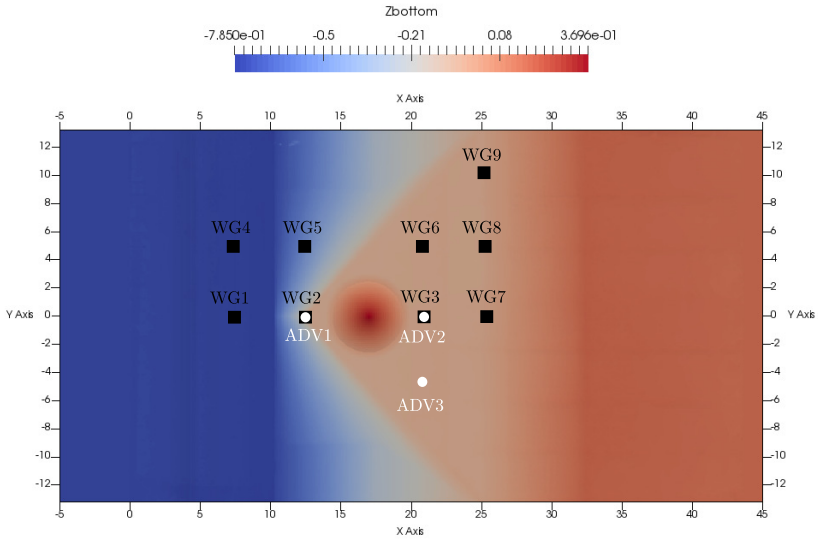
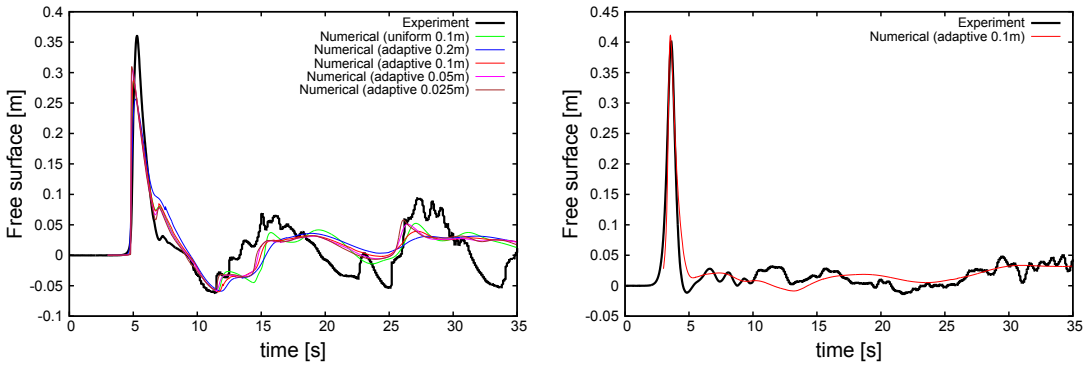
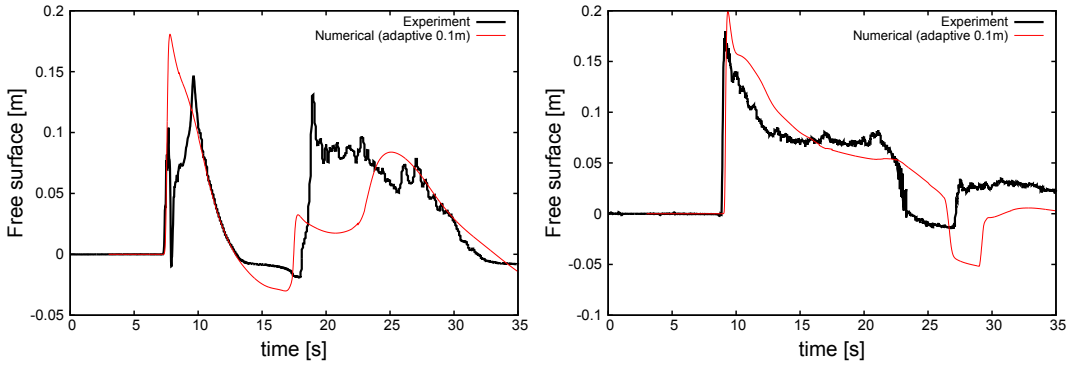


FIGURE 8.3 – Cas test de l'île conique : positions des sondes et bathymétrie.



(a) Sonde WG2. (b) Sonde WG4.

FIGURE 8.4 – Relevés de hauteur d'eau au cours du temps pour les sondes $WG2$ et $WG4$.



(a) Sonde WG6. (b) Sonde WG7.

FIGURE 8.5 – Relevés de hauteur d'eau au cours du temps pour les sondes $WG6$ et $WG7$.

8.1.2.4 Tsunami d'Hokkaido-Nansei-Oki de 1993

Ce cas concerne le tsunami d'Hokkaido-Nansei-Oki qui a frappé l'île Okushiri au Japon en 1993. Le run-up a été de plus de $30m$ et des courants de plusieurs dizaines de mètres par secondes ont été atteints. Pour comprendre ce cas, une expérience à l'échelle 1/400 [1] a été réalisée au Central Research Institute for Electric Power Industry (CRIEPI) à Abiko (Japon). La bathymétrie est une pente variable assez complexe. La vague incidente est imposée sur la condition au limite à gauche et les autres limites sont des murs. Le profil de la vague initiale à imposer en $x = 0m$ est donné en figure 8.6. Pour plus de détails sur ce cas, le lecteur peut par exemple se référer à Pons et al. [175] ou encore à Popinet [180]. Du point de vue numérique, la méthode AMR est utilisée avec une variation du nombre de cellules entre 8000 et 40000. L'intégration en temps est d'ordre 2 et en espace d'ordre 1 avec une CFL de 0.5. On compare le calcul AMR et un calcul sur grille uniforme (de 62000 cellules) avec l'expérience.

Trois niveaux d'eau sont comparés avec l'expérience. Ces comparaisons sont présentées en figure 8.7. Les résultats obtenus pour ce cas test sont de très bonne qualité. Ce cas est plus représentatif que le cas

1. Les données associées à ce cas test peuvent être trouvées ici : http://nctr.pmel.noaa.gov/benchmark/Laboratory/Laboratory_MonaiValley/ ou http://isec.nacse.org/workshop/2004_cornell/bmark2.html

précédent de l'île conique car la condition initiale n'est pas un soliton mais un "vrai" tsunami. La méthode AMR ne détériore pas les résultats et permet ici un gain de l'ordre de 3. Le maillage lors de la propagation et du run-up est illustré en figure 8.8.

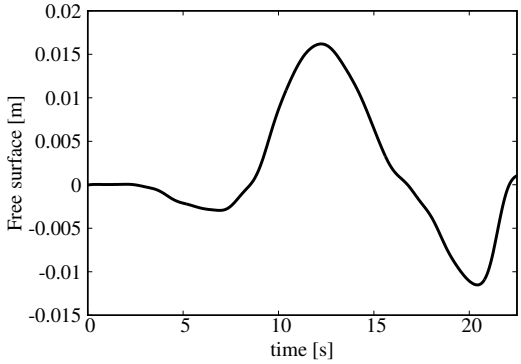
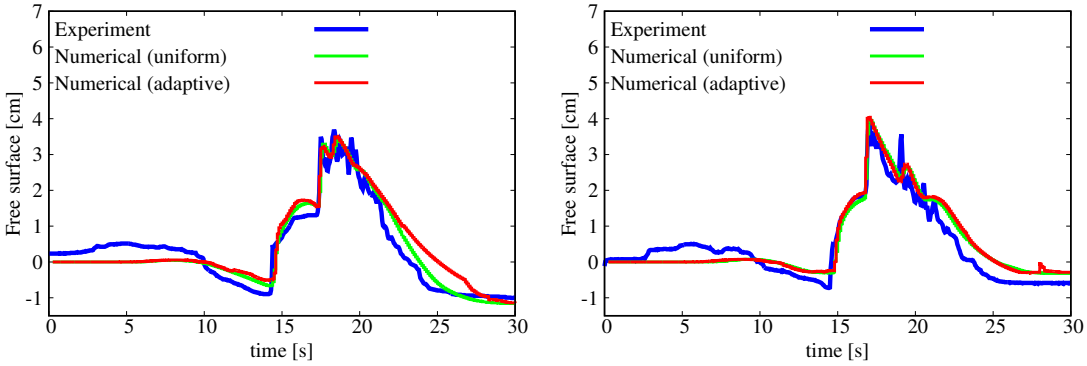


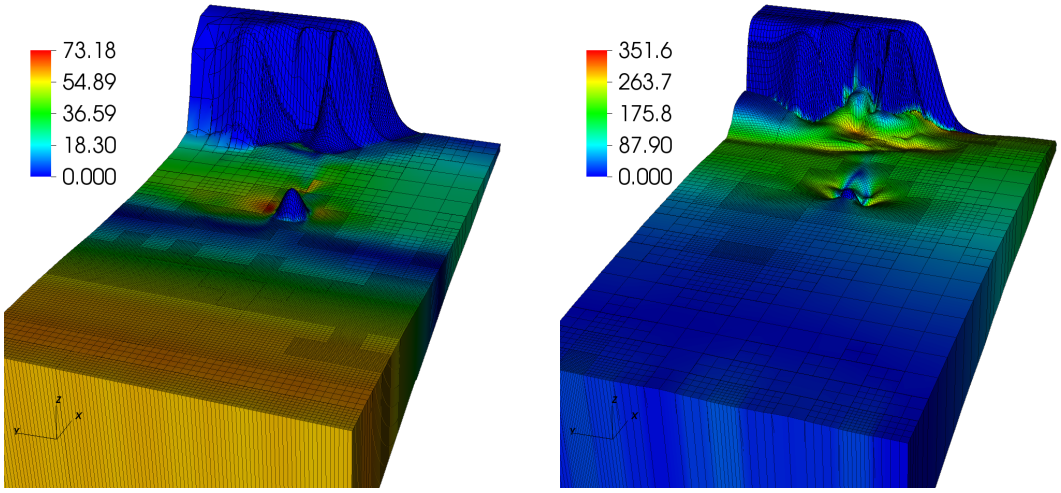
FIGURE 8.6 – Signal d'entrée du tsunami.



(a) Surface libre en sonde 1.

(b) Surface libre en sonde 2.

FIGURE 8.7 – Comparaison entre résultats numériques et expérience. Le maillage uniforme contient des cellules de la taille des plus petites cellules du maillage adaptatif.



(a) Entrée de la vague dans le domaine.

(b) Run-up.

FIGURE 8.8 – Entrée de la vague dans le domaine, run-up et illustration du maillage adaptatif. L'échelle de couleur correspond à l'énergie cinétique.

8.1.2.5 Tsunami de Tohoku de 2011

Le tsunami qui a frappé le Japon le 11 mars 2011 fut exceptionnel. Il a coûté la vie à environ 18000 personnes, engendré des pertes économiques importantes et un accident nucléaire. Il a été provoqué par un rare séisme de magnitude 9. Plusieurs mécanismes de génération ont été proposés depuis la catastrophe mais seul une actualisation des relevés de bathymétrie dans la zone permettrait de conclure sur ce point. Une vingtaine de sources ont été proposées pour cet événement (*cf.* Tappin et al. [213]). La plupart des sources considèrent une rupture au niveau de la faille alors qu'une source additionnelle de type glissement sous marin est proposée par Grilli et al. [84]. Cet événement est particulièrement documenté avec notamment des relevés sismiques et des relevés de niveaux d'eau proches des zones très impactées comme Iwate, Migyagi ou Fukushima, ainsi qu'à plus grande distance de l'épicentre. Deux sources extraites [2] de Satake [192] sont utilisées dans l'étude qui suit. La distribution de la rupture est définie par 55 sous zones comme illustrée en figure 8.9(c). La déformation du fond est calculée par un modèle de rupture rectangulaire supposant un demi espace élastique (méthode de Okada [168]). Cette source considère les contributions horizontales des mouvements. Deux inversions sont étudiées ici. La première est basée sur une déformation de toute la zone supposée instantanée et la seconde considère des déclenchements (multiples) cinématiques avec une vitesse de rupture de l'ordre de $2km/s$.

Les données bathymétriques utilisées sont une combinaison de données de grande échelle de GEBCO (General Bathymetric Chart of the Oceans) pour la zone loin des côtes, de données plus fines fournies par Hayashi dans le cadre du projet TANDEM, ainsi que les données associées à Sasaki et al. [191]. Dans ces données, la digue du port de Kamaishi détruite lors du passage du tsunami est supposée intacte.

Beaucoup de simulations de cet événement ont déjà été publiées (*cf.* par exemple [181],[182],[85],[112],[13] et [135]). On notera par exemple celle de Baba et al. [13], qui montre que globalement la dispersion est peu présente sur ce cas au niveau des côtes japonaises proches de la source. Ce papier montre également l'effet de la dispersion sur la zone plus au sud de Sandai très touchée. Assez loin au nord de la source, des vidéos disponibles aisément sur internet montrent des déferlantes massives impactant la digue de protection du

2. Ces sources ont été calculées et fournies par le BRGM, remerciement à Anne Lemoine, Rodrigo Pedreros et Sylvestre Le Roy.

port de Kuji ou, au sud, la zone de Sandai. Ces déferlantes sont certainement, là encore, principalement la conséquence d'effet dispersif.

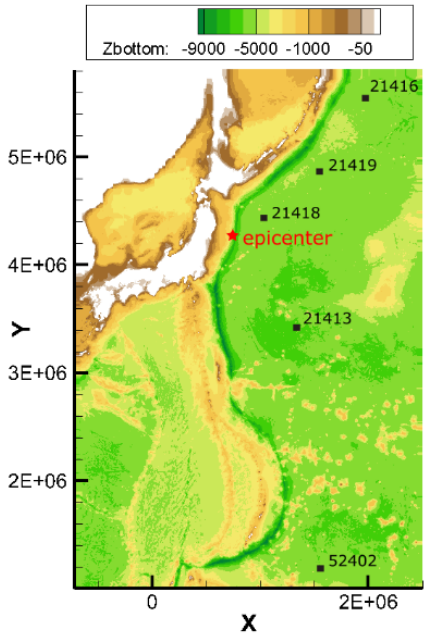
Trois simulations de ce cas ont été effectuées. Les deux premières visent principalement à valider le code sur un cas de grande échelle et plus particulièrement la méthode de maillage adaptatif. Ces résultats ont été publiés dans Pons et al. [178]. Il sont basés sur la source de Sakate instantanée. La précision de bathymétrie et du maillage est assez grossière en zone côtière. La troisième simulation effectuée est beaucoup plus fine en zone côtière et utilise la source de Satake complète (*i.e.* avec inversion cinématique). Ces résultats ont été en partie publiés dans Loevenbruck et al. [134].

La finesse du maillage atteinte dans la baie de Kamaishi permet, par exemple, d'observer avec précision l'interaction du tsunami avec la digue de protection du port. Pour ce dernier calcul, le niveau de raffinement possible est défini localement, ou autrement dit, certaines zones peuvent atteindre une précision très fine alors que d'autres sont limitées. Il en est de même pour le niveau d'interpolation de la bathymétrie. Les différentes zones pour le calcul adaptatif fin sont illustrées en figure 8.9(d). Pour ce calcul, le niveau des cellules (*i.e.* leur taille) est noté nc et le niveau d'interpolation des données bathymétriques est noté nb. On notera, sur la figure 8.9(d), que la baie de Kamaishi pourra contenir des cellules de 10m lors de l'envahissement et que le niveau d'interpolation de la bathymétrie est aussi de 10m afin de représenter relativement bien la digue de protection du port. A l'inverse, les deux autres calculs plus grossiers ont des paramètres de maillage définis globalement. Les paramètres numériques associés à ces trois calculs sont récapitulés dans le tableau 8.3.

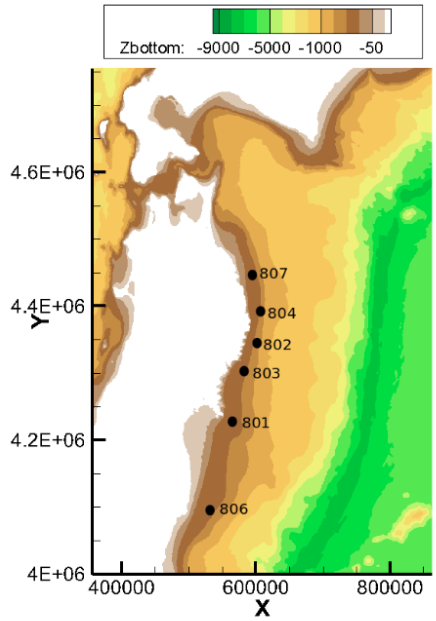
Nom de simulation	Uniform mesh	Adaptive mesh	Adaptive fine mesh
Source	statique	statique	cinématique
Taille de zone résolue	$[2500, 5000]$ km	$[2500, 5000]$ km	$[1500, 2100]$ km
Maillage	1500 m	$[700, 11700]$ m	$[10, 4800]$ m
Précision de la bathymétrie	900 m	$[900, 11700]$ m	$[10, 4800]$ m
Temps de simulation	5 h	5 h	3 h
Temps de re-maillage	pas applicable	60 s	60 s
Ordre d'intégration en temps	2	2	2
Ordre d'intégration en espace	2	2	2
CFL	0.5	0.5	0.5
Temps machine (cluster de 20 cœurs de puissance standard)	1 j	1 j	10 j

Table 8.3 – Paramètres numériques des simulations du tsunami du Japon de 2011.

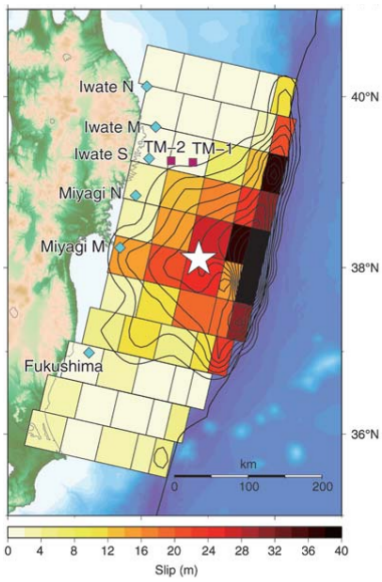
Des comparaisons entre les résultats des simulations et les relevés de niveau de surface libre sont effectuées au large (bouées DART) et plus proche des côtes (bouées GPS). Les emplacements de ces bouées sont illustrés en figure 8.9. Les distances simulées sont assez conséquentes et nécessitent sans doute de résoudre les équations en sphérique. Cependant, comme les zones qui nous importent le plus sont situées sur la côte japonaise, non loin de la source, une résolution cartésienne semble en première approximation suffisante. Il reste cependant à choisir une projection des données sur un plan. En suivant Grilli et al. [85], la projection Unit Transverse Mercator (UTM) a été choisie. Un programme Fortran a été réalisé pour appliquer les projections sur toutes les données nécessaires aux calculs. Évidemment aucune projection n'est parfaite, mais celle-ci est particulièrement adaptée car elle conserve les angles et donne une bonne approximation des distances dans une même zone. On notera que la bouée DART 52402 sort largement de la zone UTM 54. Cette bouée a été considérée pour propager le tsunami sur une grande distance en vérifiant notamment la performance de la méthode AMR. Compte tenu de sa distance à la source, les résultats sur cette bouée sont à considérer avec précaution ; il en est de même pour les DART $[21413, 21419, 21416]$ mais dans une moindre mesure.



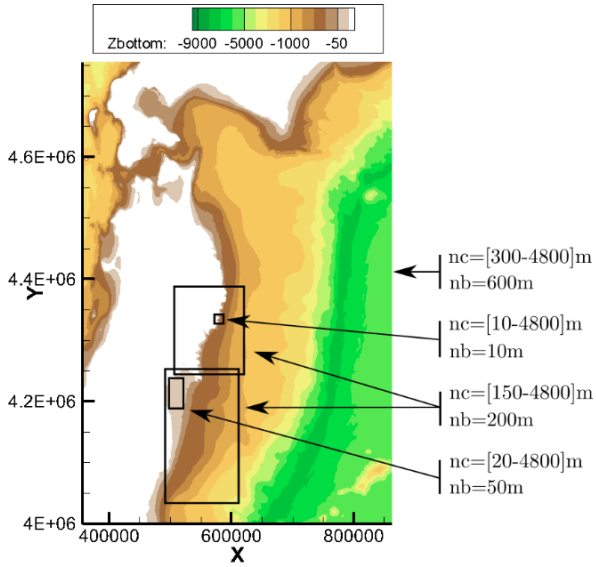
(a) Positions des bouées DART



(b) Positions des bouées GPS



(c) Sous zones de rupture de la source de Satake extraite de [192].



(d) Différentes zones du calcul sur maillage adaptatif fin.

FIGURE 8.9 – Bathymétrie, maillage, source et positions des relévés. Les bouées DART sont des bouées de haute mer, tandis que les bouées GPS sont plus proches des côtes.

Comparaison au large :

La figure 8.10 présente une comparaison entre les résultats des deux premiers calculs et les relevés des bouées DART au large du Japon. La courbe verte correspond à la simulation effectuée sur maillage uniforme, tandis que la rouge sur maillage adaptatif. Globalement les résultats numériques sont corrects. L'arrivée du tsunami est bien prédite sur les bouées les plus proches de l'épicentre et légèrement décalée pour la plus lointaine (DART 52402, *cf.* figure 8.10(e)). Les amplitudes sont aussi relativement bien prédites, même si on peut noter un écart de quasiment 40% sur la DART 21418.

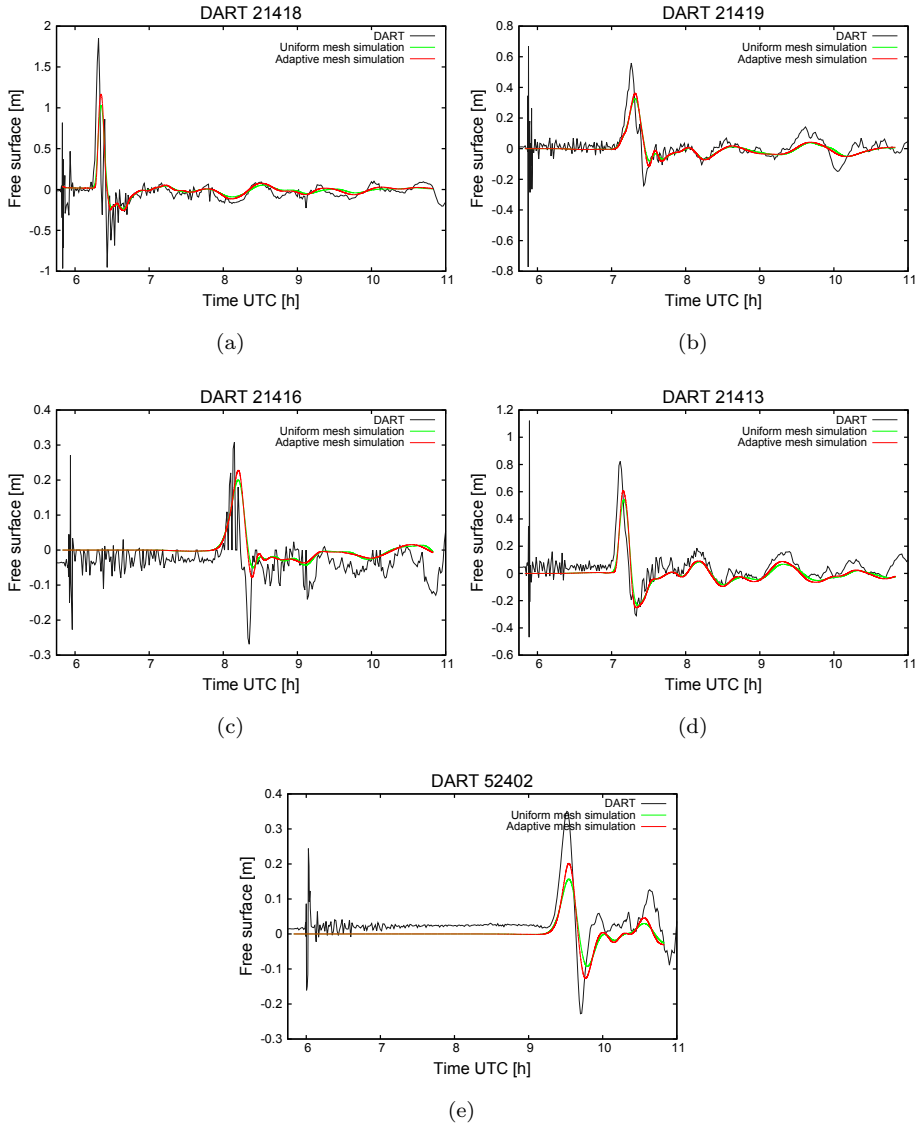


FIGURE 8.10 – Comparaison des simulations effectuées avec la source statique avec les relevés. Les courbes noires correspondent aux relevés, les vertes au maillage uniforme et les rouges au maillage adaptatif.

Comme indiqué précédemment, l'utilisation d'une résolution cartésienne sur de telles distances nécessite de la prudence dans l'analyse. Cependant, hors effet compensatoire entre plusieurs phénomènes non considé-

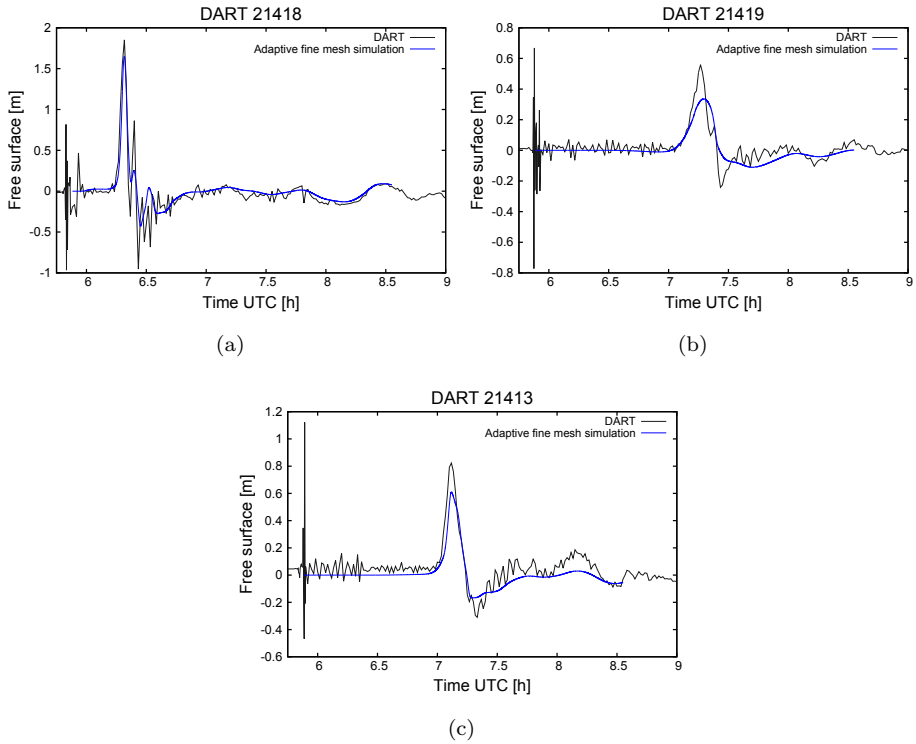
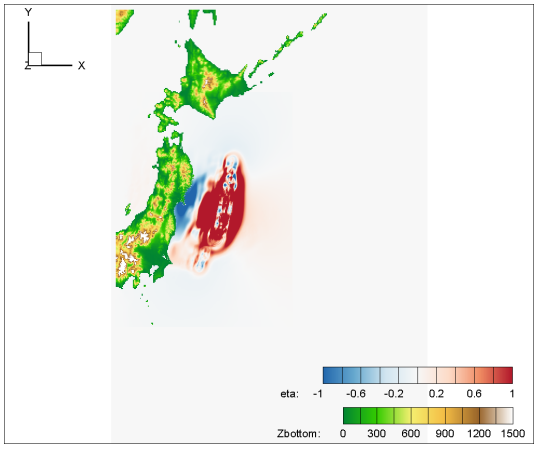


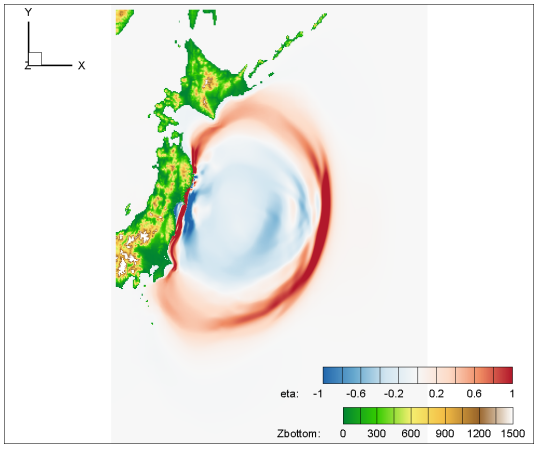
FIGURE 8.11 – Comparaison de la simulation fine effectuée avec la source cinématique avec les relevés. Les courbes noires correspondent aux relevés et les bleues au calcul sur maillage adaptatif fin.

rés, il semble que la dispersion ne joue pas un rôle très important sur ces zones. Ceci est en accord avec les résultats de Lovholt et al. [135], Kirby et al. [112] ou encore Popinet [182]. Pour de plus grandes distances, Kirby a montré une augmentation de ces effets, ainsi que la dépendance en fonction de la direction de propagation étudiée. Localement, le cas adaptatif est un peu plus fin que le cas uniforme et doit (hors calcul convergé) améliorer les résultats. Ce point est confirmé par la figure 8.10. Un maillage plus fin est sans doute nécessaire pour atteindre la convergence du calcul aux bouées (dans Popinet [181] un maillage trois fois plus fin est utilisé).

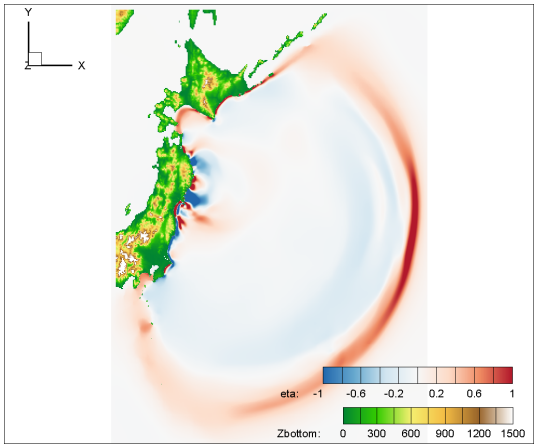
La figure 8.11 présente les résultats du calcul sur maillage adaptatif fin, obtenus au large sur les bouées DART. Une amélioration nette des résultats est observée sur la DART 21418 (*cf.* figure 8.11(a)). Les deux autres points de comparaisons montrent cependant une légère détérioration par rapport aux calculs précédents (*cf.* figures 8.10(b) et 8.10(d)). Pour de telles distances de propagation, il semble nécessaire de raffiner le maillage au large pour pouvoir conclure. On illustre en figure 8.12 la propagation du tsunami avec un vue globale sur ce maillage fin.



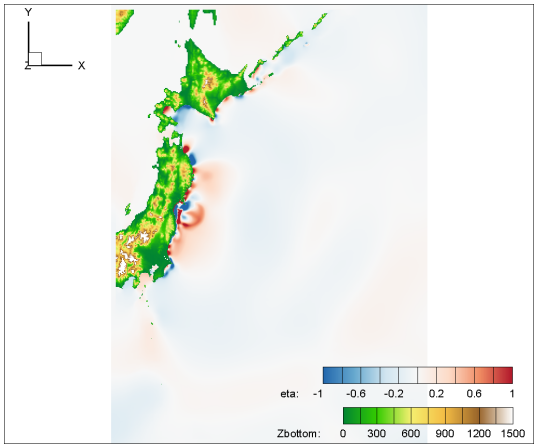
(a) 2 minutes après le début de la rupture.



(b) 30 minutes après le début de la rupture.



(c) 60 minutes après le début de la rupture.



(d) 120 minutes après le début de la rupture.

FIGURE 8.12 – Niveau de surface libre pour la simulation sur maillage adaptatif fin.

Comparaison en zone côtière :

La figure 8.13 présente une comparaison entre les résultats des deux premiers calculs et les relevés des bouées GPS en zone côtière japonaise. Les résultats numériques sont globalement satisfaisants. Les relevés des bouées 801 et 803 sont bien reproduits alors que les autres résultats comportent des biais notamment sur l'amplitude de la vague de front. Les résultats les moins bons concernent la bouée 806 pour laquelle l'amplitude moyenne n'est pas bien reproduite. A ces distances réduites de la source, comme les effets d'ellipticité de la Terre ne peuvent pas influencer fortement les résultats, seule la dispersion ou la fiabilité de la source sont discutables. Le calcul adaptatif fin présenté ensuite permet de trancher sur ce point. Comme pour les bouées au large, le calcul sur maillage adaptatif donne logiquement des résultats légèrement améliorés comparés au cas uniforme fixe.

La figure 8.14 présente les résultats en zone côtière (bouées GPS) du calcul adaptatif fin. L'amélioration de la qualité des résultats est conséquente par rapport aux précédentes simulations. Tous les signaux aux bouées sont très bien reproduits, même si on peut encore noter un décalage d'amplitude moyenne sur la bouée 806 (*cf.* figure 8.14(a)). Globalement, l'utilisation de la source la plus élaborée ainsi qu'un maillage plus fin et d'une grille de bathymétrie raffinée permet d'améliorer les résultats et d'obtenir un très bonne prévision du tsunami, notamment en zone côtière. Ces résultats permettent l'analyse de l'entrée du tsunami sur la côte avec une bonne fiabilité. On présente dans la suite l'étude de la baie de Kamaishi ravagée par le tsunami.

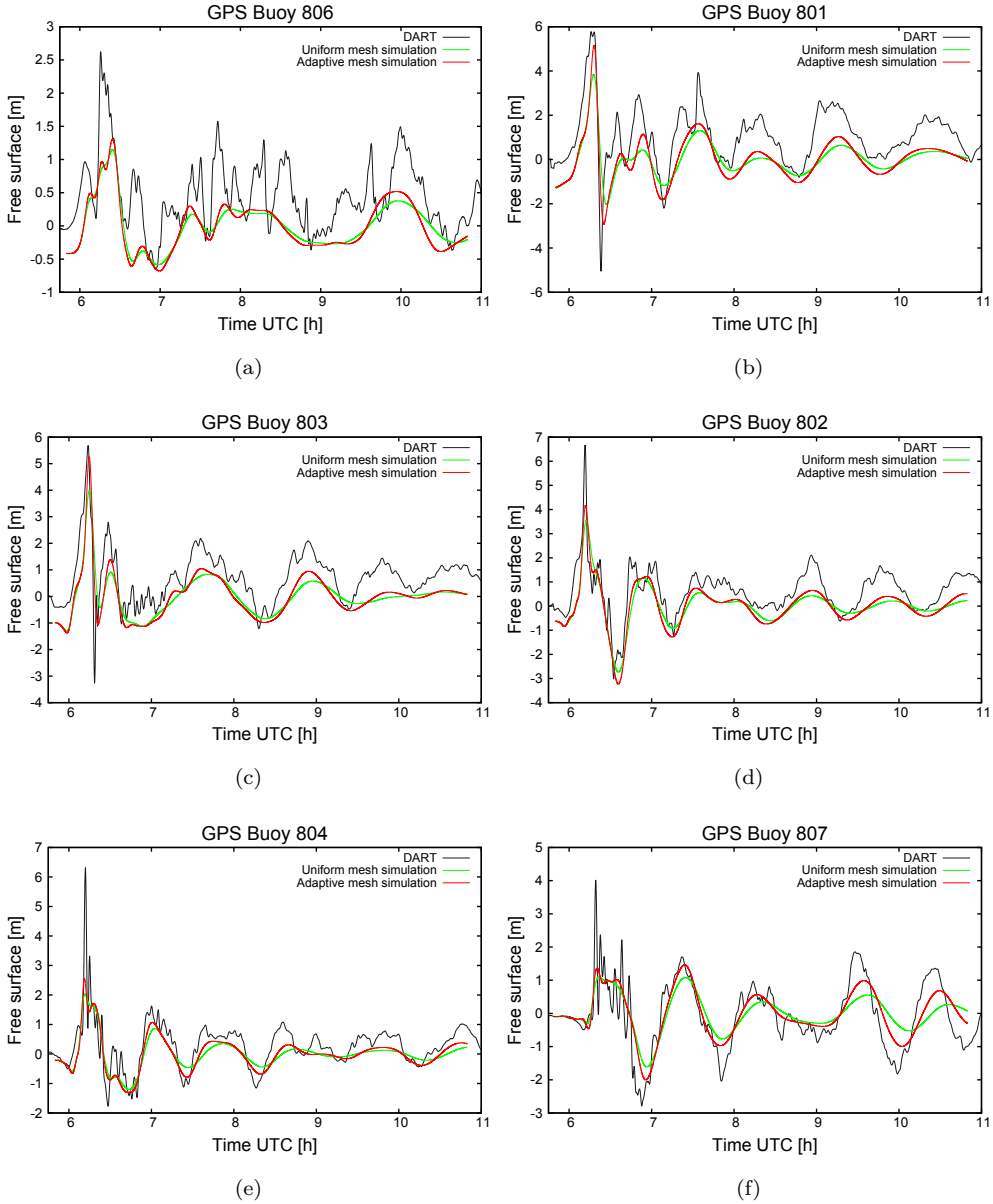


FIGURE 8.13 – Comparaison des simulations effectuées avec la source statique avec les relevés. Les courbes noires correspondent aux relevés, les vertes au maillage uniforme et les rouges au maillage adaptatif.

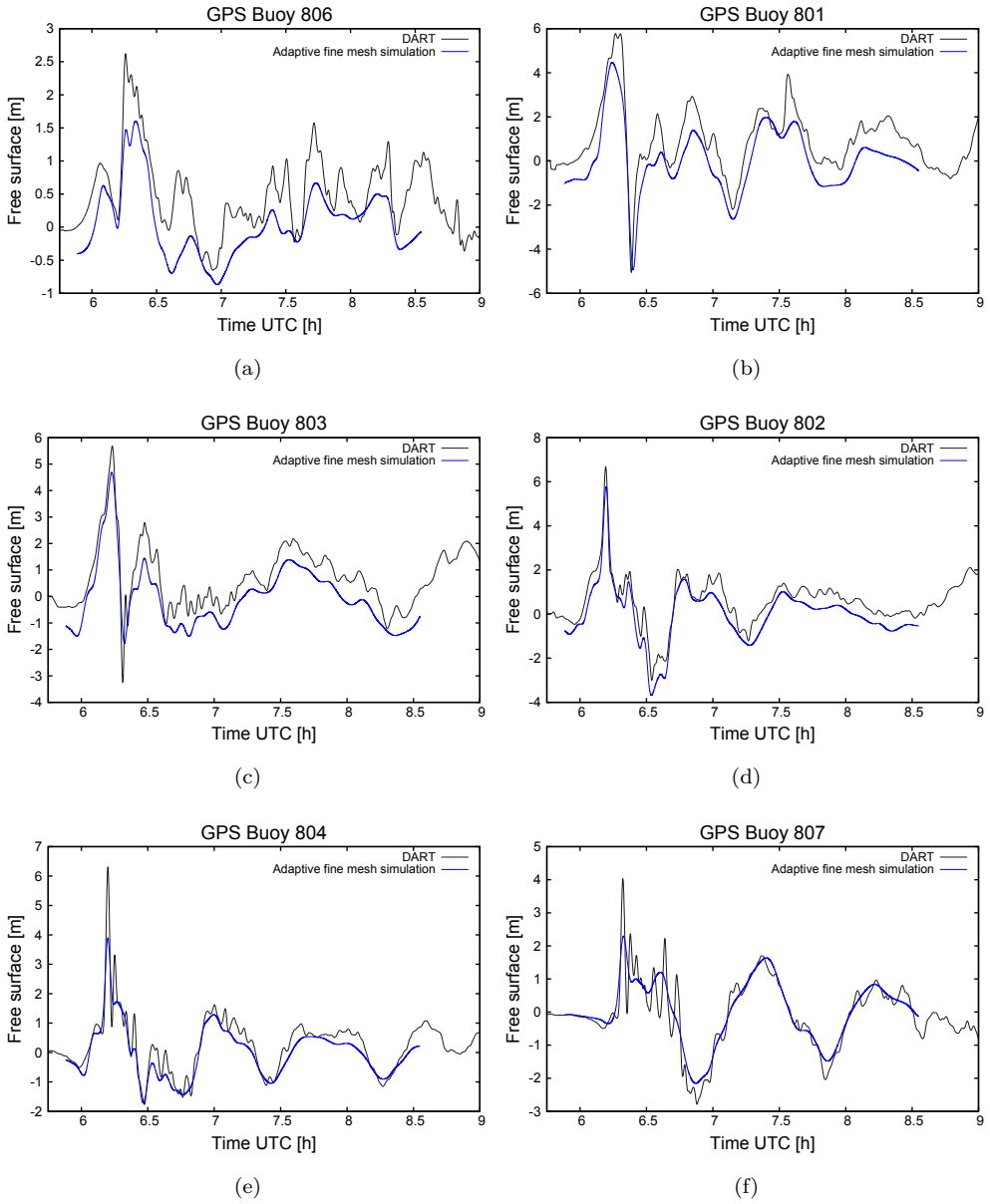


FIGURE 8.14 – Comparaison de la simulation fine effectuée avec la source cinématique avec les relevés. Les courbes noires correspondent aux relevés et les bleues au calcul sur maillage adaptatif fin.

Baie de Kamaishi :

Lors du passage du tsunami, une partie de la digue de protection du port a cédée, comme illustrée sur les figures 8.15 et 8.18(b). Le mécanisme de rupture est principalement attribué à un écart de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval de la digue ; pour plus de détails le lecteur est renvoyé au travail de Arikawa et al. [9]. Pour mieux évaluer l'effet de la digue, une simulation identique sans la digue a été effectuée. On présente en figures 8.16 et 8.17 une comparaison de l'entrée de la vague dans la baie de Kamaishi avec et sans digue de protection. L'effet de la digue est clairement notable et réduit de manière non négligeable le run-up. Comme dans la réalité cette digue a cédé au bout d'un certain temps, la reproduction approximative de l'événement doit se situer entre ces deux simulations. Les figures 8.16 et 8.17 montrent l'envahissement de la baie de

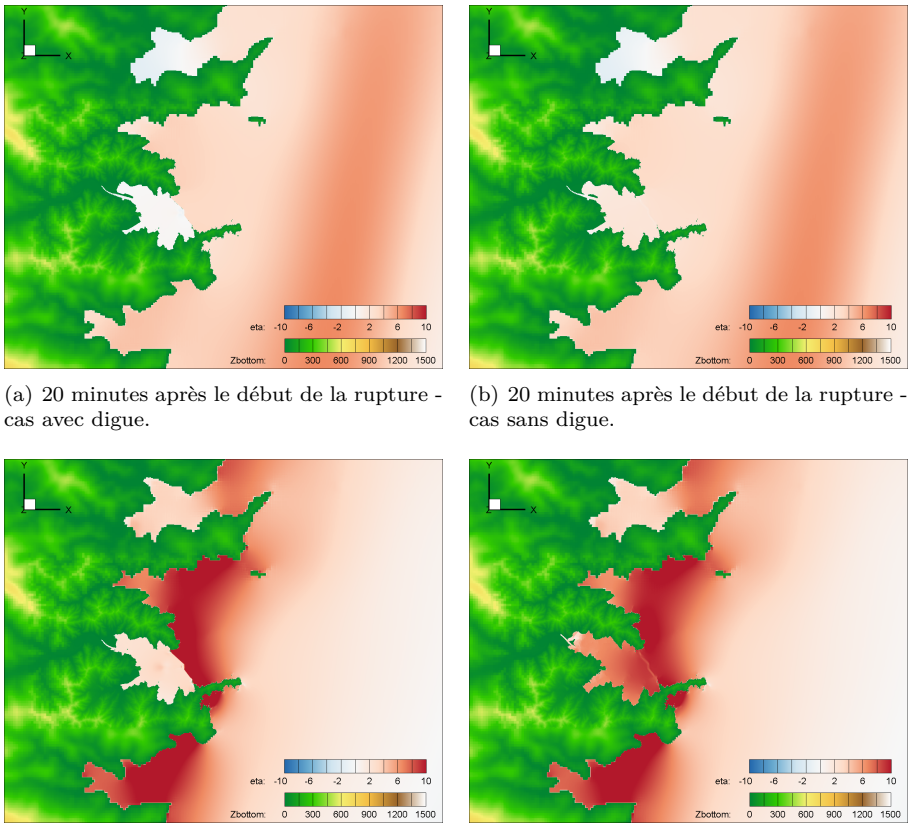
FIGURE 8.15 – Vue aérienne de la baie de Kamaishi et de sa grande digue de protection.

Kamaishi.

La figure 8.18(a) illustre le signal de surface libre du tsunami quelques centaines de mètres en amont de la digue de protection au nord de la baie. L'amplitude de la première onde excède les 9m avec une période encore très grande. Ce signal va nous servir de base pour une étude plus fine de l'interaction du tsunami avec la digue.

Arikawa et al. [9] ont étudié les causes de la rupture de la digue sur la base d'une expérience à échelle réduite. Leur travail a mis en évidence que les effets prépondérants du passage d'une onde longue, sur une structure similaire, sont liés à l'écart de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval de la digue. On propose de vérifier cette assertion grâce aux résultats obtenus avec le modèle de SV. On rappelle que, dans cette zone, les effets dispersifs sont suffisamment faibles pour considérer les résultats du modèle de SV de qualité (voir par exemple Baba et al. [13] pour une comparaison d'un modèle dispersif avec un modèle non dispersif sur cet événement). La figure 8.19 présente les caractéristiques de cette digue.

Les résultats, présentés et validés précédemment, sont repris sur une tranche de la digue afin d'évaluer la force maximale subie par les blocs supérieurs composant la digue. Ceci est nécessaire car il est difficile d'exploiter directement les résultats précédents pour être précis au niveau de la structure, compte tenu du maillage qui, au plus fin, à des cellules de $10m$ de coté. La configuration numérique du sous calcul est présentée en figure 8.20 avec le niveau de surface libre sur la digue à différents instants lors du passage du tsunami. Du côté droit du domaine on impose la hauteur d'eau obtenue avec le calcul global, dont le signal est donné en figure 8.18(a). Le maillage considéré est uniforme avec $\triangle x = 40cm$. Comme les données bathymétriques dont nous disposions étaient insuffisantes pour représenter finement la digue, des points ont



(a) 20 minutes après le début de la rupture - cas avec digue.

(b) 20 minutes après le début de la rupture - cas sans digue.

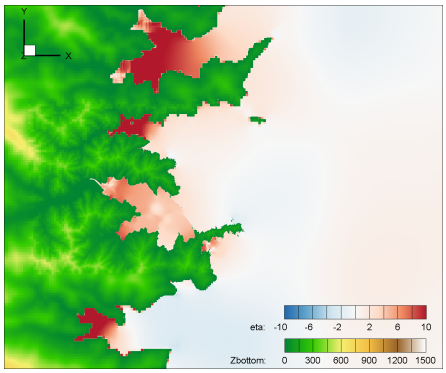
(c) 25 minutes après le début de la rupture - cas avec digue.

(d) 25 minutes après le début de la rupture - cas sans digue.

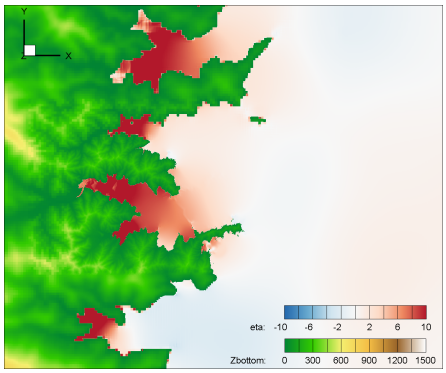
FIGURE 8.16 – Arrivée du tsunami sur la baie de Kamaishi avec et sans digue de protection.

été ajoutés en suivant grossièrement le schéma 8.19(a). La forme obtenue avec l'ajout de point est donnée en figure 8.19(b). Précisons que l'objectif est simplement de retrouver les bons ordres de grandeur, ce qui rend ces approximations cohérentes.

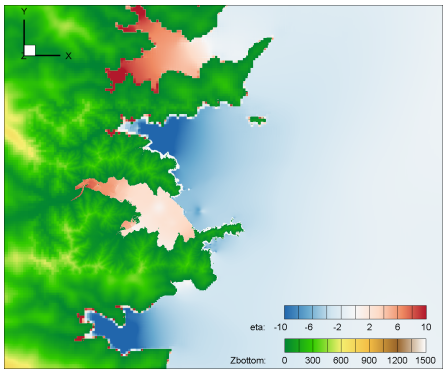
Le passage du tsunami sur la digue est illustré en figure 8.20. L'écart maximal de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval de la digue obtenu, avec cette sous-simulation, est de l'ordre de $10m$. Pour calculer les ordres de grandeur des forces principales on raisonne en linéique (direction transverse de la digue non considérée). On approxime la surface dans le plan de coupe à $20 * 28m^2$ (*cf.* schéma 8.19(a)). En supposant que celle ci est constituée de béton classique ou assimilé, on prend $\rho_{digue} \approx 2200kg/m^3$. Le poids linéique est donc $Pl_{digue} \approx \rho_{digue} * g * 20 * 28 \approx 1.2 * 10^7 N/m$. En considérant que la digue est totalement submergée lors de la poussée maximale, la poussée d'Archimède donne $Fl_{Archi} \approx \rho_{eau} * g * 20 * 28 \approx 5.6 * 10^6 N/m$. Ensuite la force linéique due à l'écart de hauteur d'eau est $Fl_{\triangle h} = \int_{zmin_{digue}}^{zmax_{digue}} \rho_{eau} * g * (\eta_{amont} - z)dz - \int_{zmin_{digue}}^{zmax_{digue}} \rho_{eau} * g * (\eta_{aval} - z)dz \approx 2.8 * 10^6 N/m$. Pour finir il est intéressant d'évaluer la force linéique due aux mouvements dynamiques, grâce à la formule de Morison : $Fl_{Mor} = \rho_{eau} * u^2 * C_d * \triangle Z_{digue} \approx 5 * 10^5 N/m$ avec $u_{max} \approx 3m/s$ d'après nos résultats. On voit que cette force est clairement négligeable devant les autres, ce qui est en accord avec Arikawa et al. [9].



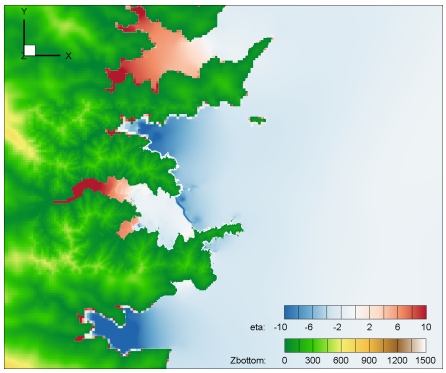
(a) 30 minutes après le début de la rupture - cas avec digue.



(b) 30 minutes après le début de la rupture - cas sans digue.



(c) 35 minutes après le début de la rupture - cas avec digue.



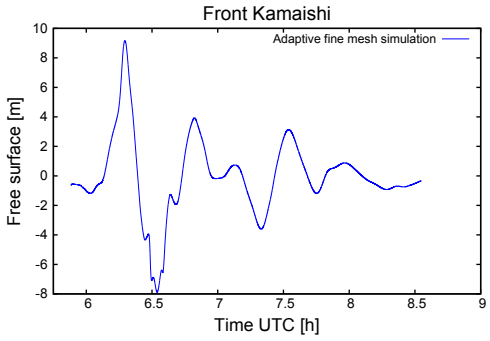
(d) 35 minutes après le début de la rupture - cas sans digue.

FIGURE 8.17 – Envahissement de la baie de Kamaishi avec et sans digue de protection.

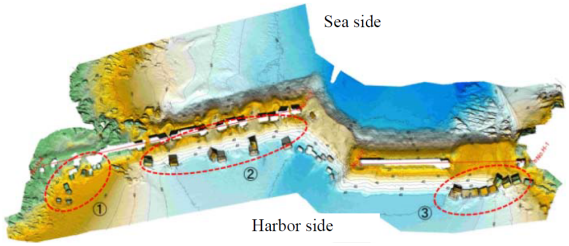
Pour estimer la tenue on peut évaluer le "coefficient de sûreté" (voir par exemple Medina [153]) :

$$SF = \frac{\mu(P - F_{up})}{F_{lat}} \tag{8.1.1}$$

Avec P le poids de la structure, F_{up} l'éventuelle force verticale qu'elle subit, F_{lat} la force de côté et μ le coefficient de friction. Dans le cas présent, $\mu = 0.6$ semble un choix cohérent. On obtient $\boxed{SF \approx 1}$ ce qui signifie que la structure peut céder. Nous venons, avec quelques approximations, d'estimer grâce à un calcul numérique qu'il est cohérent que la digue de Kamaishi ait cédée principalement à cause de l'écart de hauteur d'eau induit par le passage de la vague (et la poussée d'Archimède clairement non négligeable aussi). Ceci est en accord avec l'analyse expérimentale d'Arikawa et al. [9].

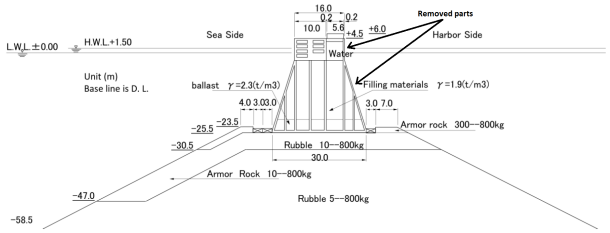


(a)

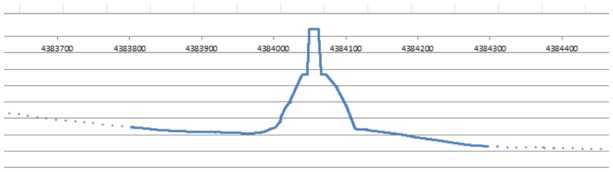


(b)

FIGURE 8.18 – Niveau de surface libre quelques centaines de mètres en amont de la digue de Kamaishi et de l'état de la digue après le passage du tsunami.

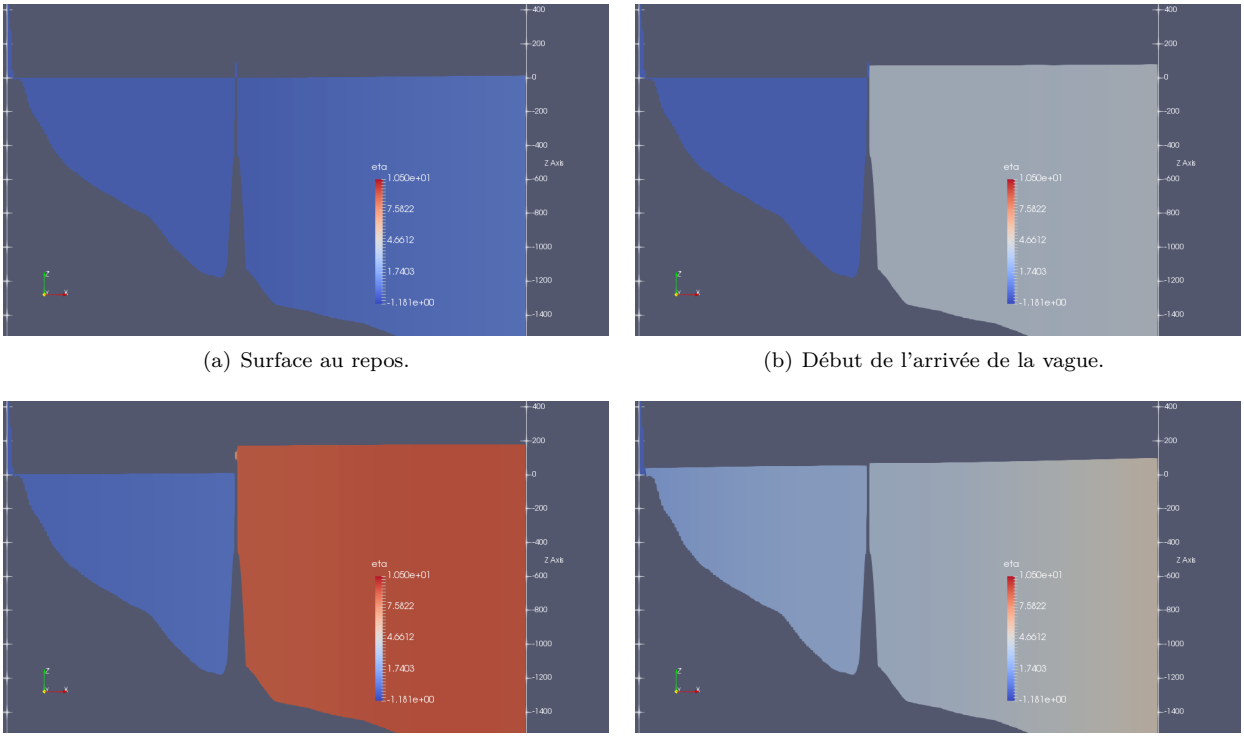


(a) Schéma des dimensions de la digue extrait de Arikawa et al. [9].



(b) Bathymétrie reconstruite pour le sous calcul. Des points sur la résolution ont été ajoutés pour mieux représenter la digue.

FIGURE 8.19 – Caractéristiques de la digue de Kamaishi.



(a) Surface au repos.

(b) Début de l'arrivée de la vague.

(c) Moment où la hauteur de la vague est quasiment à son maximum devant la digue. La digue est submergée.

(d) La vague est passée.

FIGURE 8.20 – Sous-simulation effectuée pour déterminer l'ordre de grandeur de l'écart de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval de la digue. Différents instants lors du passage du tsunami sont donnés. L'échelle a été distordue selon la verticale pour mieux voir les mouvements d'eau.

8.1.3 Bilan

Les cas tests effectués ont permis de valider l'implémentation du modèle de Saint-Venant sur bathymétrie variable avec méthode AMR dans le code Eolens. Les validations sur les cas académiques ont montré la robustesse des schémas employés, que ce soit pour traiter le "vide" ou des mouvements raides. La méthode d'adaptation de maillage permet de réduire significativement les temps de calculs. Lorsque la dispersion est négligeable, ce modèle donne de très bons résultats. Il permet d'obtenir des prévisions de qualité lorsqu'un tsunami est généré relativement proche de la côte. Dans le cas contraire, le défaut principal est que la vague va raidir anormalement et dissiper de l'énergie car aucune dispersion ne peut contrecarrer la non linéarité du modèle. Pour des contraintes de type poussée quasi hydrostatique sur des structures, ce modèle est capable de fournir des ordres de grandeurs cohérents.

8.2 Applications numériques avec le modèle de Serre-Green-Naghdi "standard" et dissipatif

8.2.1 Méthodes numériques

Pour ce modèle, on utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 en temps avec un "splitting" d'ordre 1 pour traiter les termes sources (relaxation des variables auxiliaires et éventuellement dissipation). La résolution en espace est d'ordre 2 et se base sur l'approche de Barth et Jespersen avec le limiteur minmod. Le solveur approché HLL est utilisé. Le schéma est corrigé pour préserver l'équilibre de lac au repos en "étendant" la méthode d'Audusse [12] proposée pour le système de Saint-Venant. Il suffit pour cela de remarquer qu'au repos, on a $\eta = h$ ce qui implique que l'équation de quantité de mouvement du système de SGN approché est identique à celle de SV. Il faut donc simplement modifier η de la même manière que h pour préserver l'équilibre $u = 0m/s$. Les cas d'équilibres plus complexes (*i.e.* avec $u \neq 0$) semblent être beaucoup plus délicats. Cependant, même pour le modèle de Saint-Venant ces cas ne sont pas traités dans la littérature à notre connaissance. Pour la partie dissipative, à chaque pas de temps en amont de la résolution du système complet, on évalue la fonction β (critère de transition vers le modèle de SV). Ensuite on applique la méthode voulue : par exemple une transition raide (le lecteur est renvoyé au chapitre 3 pour plus de détails sur les méthodes appliquées ici).

Dans tous les cas tests qui suivent, les variables auxiliaires du système de SGN approché sont initialisées telle que $\eta = h$ et $w = 0$. Il serait intéressant d'étudier si ce choix est parfaitement bien posé. La CFL utilisée est $CFL = 0.4$.

On présente tout d'abord deux cas tests académiques pour valider l'implémentation du modèle non dissipatif (correspondant à celui de Favrie et Gavriluyk [68]). On compare ensuite le modèle non dissipatif avec celui dissipatif, dit modèle hybride SGN-SV ou SGNd, pour un cas test impliquant un déferlement.

8.2.2 Cas tests pour le modèle de Serre-Green-Naghdi "standard" et dissipatif

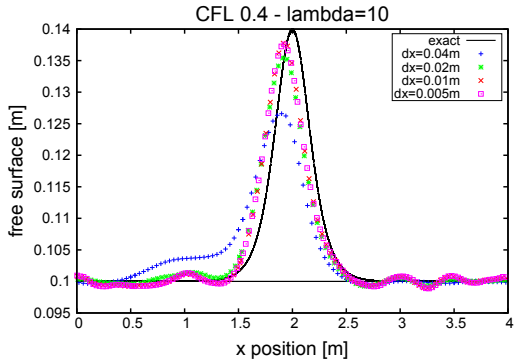
8.2.2.1 Propagation de soliton

Le modèle de SGN admet des ondes solitaires. Ces solutions conservent leur forme au cours du temps sur fond plat. Les solitons solutions des équations de Boussinesq ou des équations de SGN sont bien connues. Comme on utilise un système de SGN approché, il faudrait en toute rigueur re-dériver la solution qui est propre à ce système. Pour simplifier, on se contente d'utiliser la solution du système de SGN exacte compte tenu des résultats satisfaisants obtenus par Favrie et Gavriluyk [68] avec cette approche dans un cas similaire. Cette solution est :

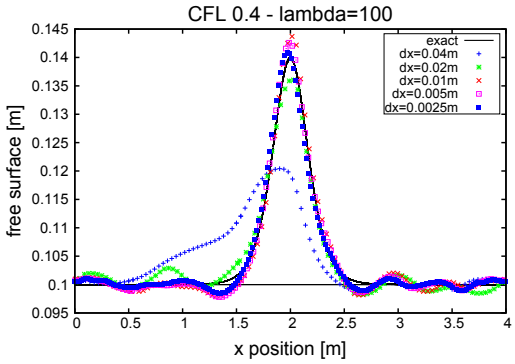
$$h(\xi) = h_1 + (h_2 - h_1) sech^2\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{3(h_2 - h_1)}{h_2 h_1^2}}\right) \tag{8.2.1}$$

$$u(\xi) = D(1 - \frac{h_1}{h(\xi}) \text{ avec } D^2 = gh_2 \text{ et } \xi = x - Dt \tag{8.2.2}$$

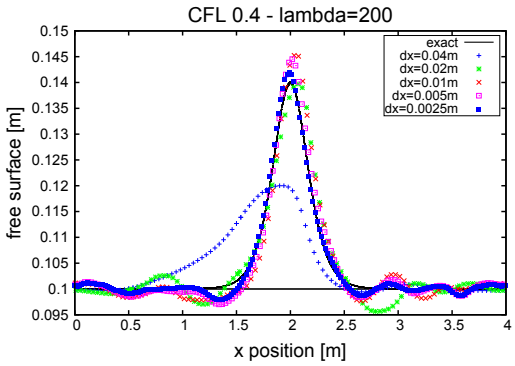
Ce cas est simulé sur un domaine 1D périodique de 4m avec le modèle non dissipatif. Notons cependant que le modèle dissipatif donne exactement les mêmes résultats ici, car le critère de déferlement ne se déclenche pas. Le soliton est initialisé au centre du domaine. On choisit $h2 = 0.14$ m et $h1 = 0.1$ m. Le temps final de la simulation est $t_{fin} = 6.8264$ s ce qui correspond à une distance parcourue de 8 m. On étudie la convergence en maillage pour différentes valeurs du coefficient de relaxation λ. La solution exacte est évidemment donnée par la solution initiale. Les figures 8.21(a), 8.21(b) et 8.21(c) présentent respectivement la solution obtenue avec des maillages de plus en plus fins pour $\lambda = \{10, 100, 200\}$. Conformément à Favrie et Gavrilyuk [68], plus λ est faible plus la convergence est facile mais moins la solution convergée tend vers la solution exacte. Cette "facilité" de convergence est due au fait que la diffusion numérique est liée aux vitesses caractéristiques, qui ici dépendent de λ. Pour ce cas test, $\lambda = 100$ est un bon compromis. Pour une discussion concernant l'éventuel déphasage que ce système peut engendrer face au système exact, le lecteur peut se référer à Favrie et Gavrilyuk [68]. Notons qu'on peut observer de petites oscillations au niveau de la surface libre au repos. Ceci est attribuable à la condition initiale qui n'est pas parfaite pour le système résolu. De plus, le fait de considérer un domaine périodique implique que toutes les petites perturbations restent dans le domaine. Cela étant dit, les résultats sont globalement satisfaisants.



(a) $\lambda = 10$.



(b) $\lambda = 100$.



(c) $\lambda = 200$.

FIGURE 8.21 – Propagation d'un solition sur un domaine périodique.

8.2.2.2 Rupture de barrage sur fond humide

Ce cas test a été investigué par exemple dans Hank et al. [123]. Il induit un train d'ondes dispersives non linéaires. Dans la réalité, il est fort probable que des déferlements aient lieu pour certaines vagues générées, mais ce cas test est intéressant pour vérifier le bon comportement de la méthode de résolution. En particulier,

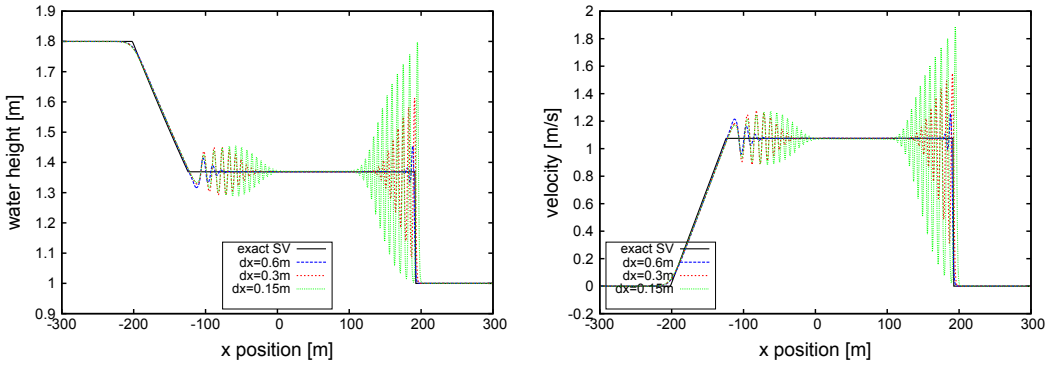
un des points délicats est de retrouver au centre de la rupture de barrage un état constant. Le modèle sans dissipation est utilisé. Un tube 1D de 600m de long est considéré avec deux états différents à droite et à gauche du centre du tube. Ces conditions initiales sont récapitulées dans le tableau 8.4. Le temps final affiché est $t_{fin} = 48$ s. Les maillages utilisés contiennent $N = \{1000, 2000, 3000\}$ cellules uniformément réparties.

Les figures 8.22(a) et 8.22(b) présentent respectivement le profil de hauteur d'eau et de vitesse obtenus avec le modèle de SGN approché pour différents maillages. La solution exacte associée au modèle de Saint-Venant est aussi tracée pour une comparaison des niveaux et des phases des "deux" mouvements principaux. Les résultats obtenus sont relativement similaires à Hank et al. [123] et satisfaisants. On retrouve bien au centre un profil constant. Notons cependant que la hauteur de première onde (celle la plus à droite) est supérieure à celle prédite par la théorie de modulation de Withiam. Des investigations pour clarifier ce point seraient intéressantes.

Ce cas est intéressant pour comprendre pourquoi certains tsunamis induisent des déferlantes à la côte, même si la déformée initiale de surface libre a une grande longueur d'onde. Ici dans un cas extrême où l'amplitude de la déformée est quasiment égale à la profondeur au repos, on voit que des trains dispersifs sont générés. Dans une moindre mesure, une déformée de tsunami peut donc aussi engendrer ce type de train d'onde. On parle parfois de désintégration d'onde. Le lecteur intéressé par ce sujet peut par exemple se référer à Tissier et al. [218].

$h_L[m]$	$u_L[m/s]$	$h_R[m]$	$u_R[m/s]$
1.8	0	1	0

TABLE 8.4 – Conditions initiales du cas test rupture de barrage sur fond humique.



(a) Hauteur d'eau.

(b) Vitesse.

FIGURE 8.22 – Rupture de barrage sur fond humide.

8.2.2.3 Propagation de soliton sur fond variable et déferlement

Ce cas test est basé sur un des essais de l'expérience en grand bassin présenté dans Hsiao et al. [97]. Pour ce cas test, on compare le modèle non dissipatif au modèle dissipatif. On rappelle que pour le modèle dissipatif, la transition du modèle de SGN vers celui de SV est amorcée dès lors que le Froude moyen ($Fr = \overline{u}/\sqrt{gh}$) excède 0.45. Pour plus de détails le lecteur peut se référer au chapitre 3. L'expérience consiste en une onde solitaire qui se propage initialement sur fond plat puis qui rencontre une pente et déferle. On considère un domaine de calcul $\Omega = [0, 200]m$ en 1D. Pour éviter d'avoir à se préoccuper de la transition sec-mouillé, on représente la bathymétrie par : $b(x) = 0m$ pour $x \in [0, 50]m$, $b(x) = (x - 50)/60m$ pour $x \in [50, 175]m$ et $b(x) = 0$ pour $x \in [175, 200]m$. Les conditions aux limites sont supposées être des murs. La condition

initiale est une onde solitaire d'amplitude $a_0 = 0.3344$m, centrée en $x = 24m$ (essai 43 de Hsiao et al. [97]). La hauteur d'eau au repos sur la zone plate est $h_0 = 2.2m$. Comme pour le cas test de l'onde solitaire sur domaine périodique, on utilise le soliton du système exact de SGN. La configuration est présentée en figure 8.23. On dispose de relevés de surface libre, notés $\{S1, S2, S3, S4\}$ sur la figure 8.23, pour comparer les résultats numériques à l'expérience. Leurs positions sont respectivement $x = \{78, 106, 140, 164\}m$. Pour ce cas test on utilise $\lambda = 200$. Les maillages considérés sont uniformes avec $\triangle x = \{0.125, 0.0625, 0.03125\}m$. Les variables sont adimensionnées par : $\tilde{t} = t\sqrt{g/h_0}$ et $\tilde{\eta} = \eta/h_0$.

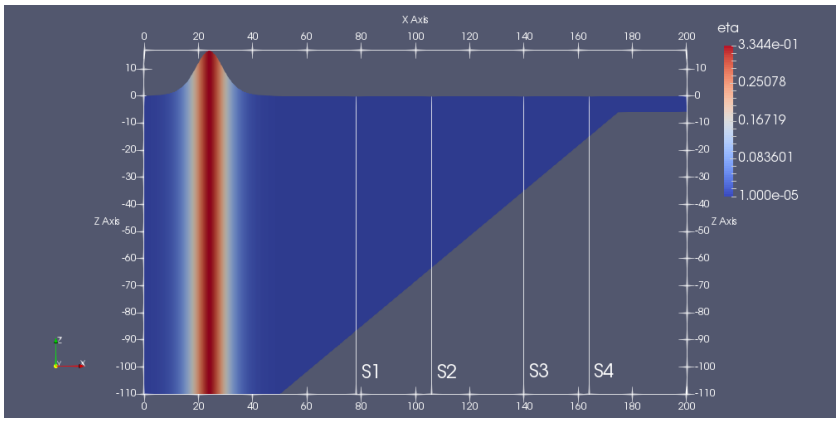
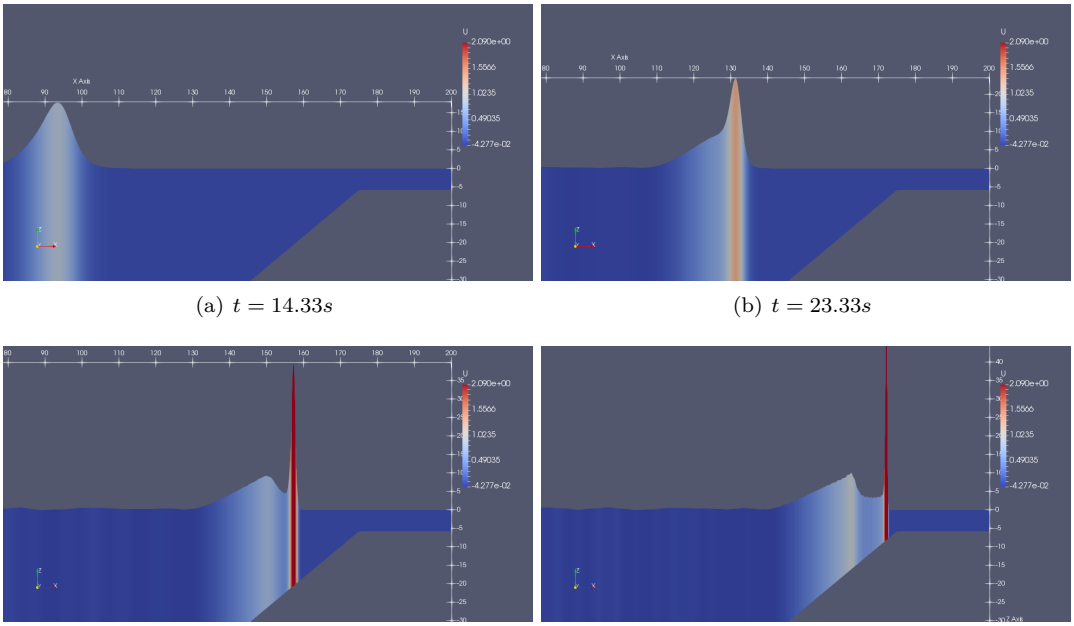


FIGURE 8.23 – Configuration du cas test "Propagation de soliton sur fond variable et déferlement". Les notations $\{S1, S2, S3, S4\}$ correspondent au placement des relevés de surface libre utilisés.

Modèle non dissipatif :

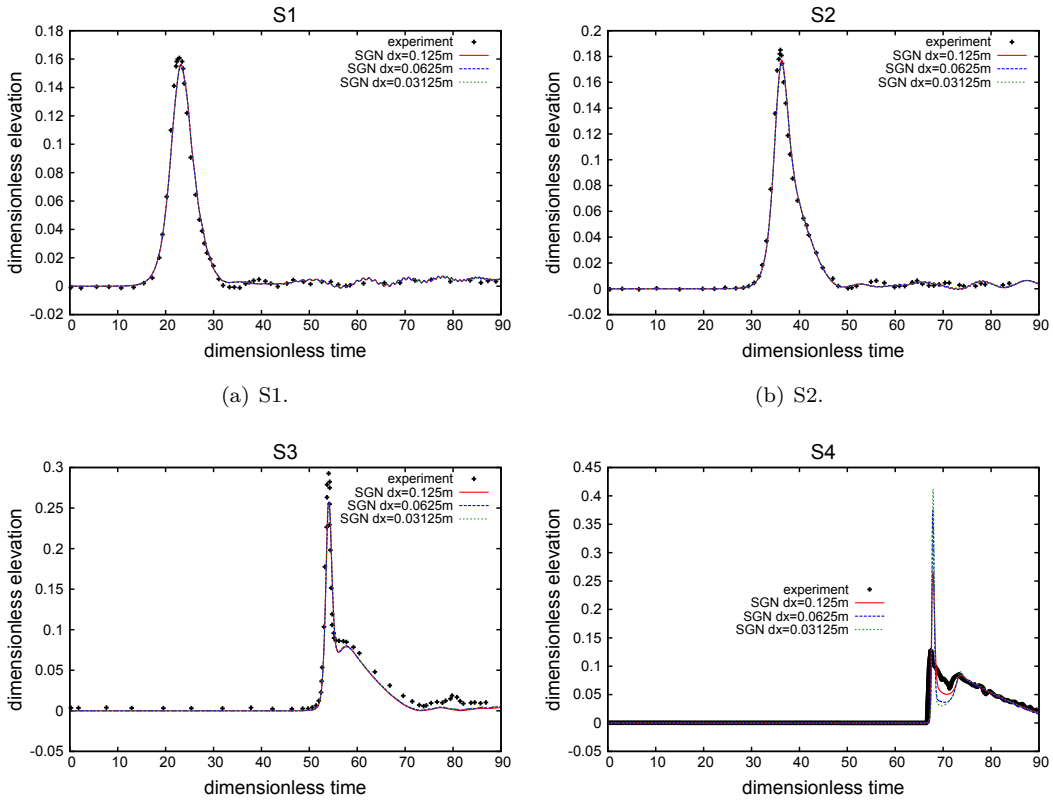
On considère pour commencer le modèle de SGN classique (*i.e.* sans dissipation). Le gonflement de la vague est illustré en figure 8.24(a), 8.24(b), 8.24(c) et 8.24(d). La discrétisation est $\triangle x = \{0.125\}m$. Comme rien ne compense la croissance des non linéarités dans ce modèle, le gonflement n'est pas limité alors que la vague aurait dû déferler et donc transformer de l'énergie mécanique. Les résultats obtenus sont donc loin des expériences comme illustré en figures 8.25(a), 8.25(b), 8.25(c) et 8.25(d). Avant le point de déferlement, les résultats sont convergents en maillage et de qualité. Après cette zone, les non linéarités explosent ce qui rend les résultats de plus en plus incohérents.



(a) $t = 14.33s$ (b) $t = 23.33s$

(c) $t = 14.33s$ (d) $t = 23.33s$

FIGURE 8.24 – Gonflement avec le modèle de SGN “classique” (*i.e.* sans dissipation).



(a) S1.

(b) S2.

(c) S3.

(d) S4.

FIGURE 8.25 – Comparaison entre les résultats du modèle de SGN sans dissipation avec les mesures expérimentales.

Modèle potentiellement dissipatif :

Pour corriger cette modélisation incomplète, on considère maintenant le modèle de SGN dissipatif présenté au chapitre 3. On rappelle que l'idée est de faire basculer le modèle de SGN classique vers le modèle de SV lorsque la vague doit déferler, pour représenter la déferlante par un choc dissipatif. L'introduction des termes qui permettent une bascule, d'un modèle pur à un autre modèle pur, a été faite de sorte qu'il ne soit pas interdit d'utiliser un mixte entre les deux modèles. Même si une étude approfondie serait intéressante, ces solutions mixtes correspondent *a priori* simplement à un modèle non linéaire à pression non hydrostatique réduite.

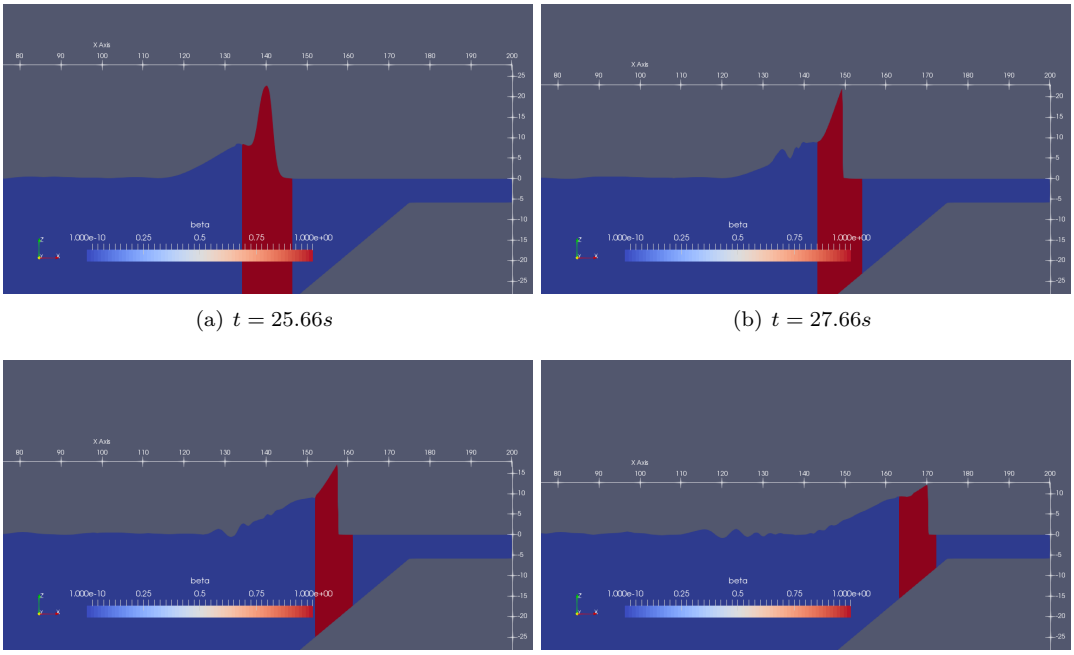
La manière dont on transite d'un modèle pur à un autre est investiguée dans la suite. On considère trois transitions possibles : une transition locale et instantanée (méthode utilisée dans la littérature, noté 1 ici), une transition raide mais avec un stencil très large de sorte d'éviter que les interfaces SGN-SV soient dans les zones où les modèles sont "incompatibles" (*i.e.* par exemple s'il y a un grand écart de pression) (méthode 2) et une transition locale mais continue en temps et en espace (méthode 3). Le lecteur est renvoyé au chapitre 3 pour les détails techniques de ces méthodes.

Les figures 8.26(a), 8.26(b), 8.26(c) et 8.26(d) illustrent la méthode 1, les figures 8.24(a), 8.24(b), 8.24(c) et 8.24(d) la méthode 2, et les figures 8.28(a), 8.28(b), 8.28(c) et 8.28(d) la méthode 3. La variable affichée est la fonction β, avec pour rappel, $\beta = 0 \iff SGN$ et $\beta = 1 \iff SV$. Le maillage correspondant à ces figures est le maillage le plus fin utilisé pour ce cas test : $\triangle x = 0.03125m$. Les figures présentées ne sont pas toutes prises aux mêmes instants, dans le but de montrer les défauts de ces approches.

On voit que, lorsque la transition est raide (méthode 1) en une zone localisée, on observe des fluctuations au niveau de l'interface de "couplage" de gauche. Ceci n'est pas le cas pour la méthode à large stencil (méthode 2) ni pour la méthode à transition progressive. Par contre, aucune de ces approches n'échappent à la génération d'ondulations au centre de la zone traitée par le modèle de SV, juste après la bascule. Ces ondulations se propagent vers l'arrière de la vague. Notons cependant que la méthode à transition progressive tend à réduire ce problème. Il semble que la littérature ne parle que des difficultés à l'interface SV-SGN, mais selon nos résultats il y a une autre difficulté. Ces ondulations générées au centre ne sont pas numériques mais viennent simplement du fait qu'une condition initiale donnée par le modèle de SGN, puis traitée par le modèle de SV, n'a pas de raison de parfaitement continuer sur sa lancée. On touche du doigt le concept de condition "initiale" mal préparée. En soit, ceci n'est pas catastrophique, tant que ces ondulations n'explosent pas et ne faussent pas le résultat obtenu.

En conclusion, les méthodes de transition raide (1 et 2) donnent des résultats assez proches mais il est clair que, plus les interfaces SGN-SV sont dans une zone où les modèles sont compatibles, moins ces interfaces induisent des perturbations. Ensuite, la méthode à transition progressive semble prometteuse car elle est moins sensible à la transition d'un modèle pur vers un autre. Cependant, même avec des maillages très fins comme celui utilisé pour ces illustrations, il semble que les perturbations n'explosent pas. Il est délicat de conclure fermement par rapport à la littérature car il faudrait utiliser exactement la même méthode de basculement sur un même cas test et des schémas les plus proches possibles. Néanmoins, il semble que le fait d'utiliser une méthode numérique unique, basée sur un solveur de type Godunov soit favorable comparée aux méthodes généralement utilisées combinant plusieurs approches (souvent Volumes finis - Différences finis). Des comparaisons fines avec les travaux de Kazolea et Ricchiuto [108], qui ont mis en évidence des problèmes de non convergence avec une méthode assez standard, seraient intéressantes. Cela étant dit, nous avons aussi vu qu'il existe un autre problème que l'action de l'interface SGN-SV. Après la bascule, des ondes sont générées au centre de la zone SV. Il nous semble qu'elles découlent du fait qu'une solution du modèle de SGN est généralement mal préparée pour le modèle de SV. Ceci empêche l'onde initiale de continuer parfaitement sur sa lancée. Sur ce point, la méthode à transition continue améliore les choses. Reste que, même avec les maillages fins utilisés, les autres approches nous semblent également acceptables. Pour finir, en tenant compte de la notion de complexité, du nombre de paramètres, de la stabilité et du coût, il nous semble que la méthode 2 (*i.e.* transition raide à large stencil) soit un bon choix dans notre cas. Pour les méthodes numériques plus standards de la littérature, souffrant semble-t-il de plus d'instabilités, la méthode 3 à transition progressive pourrait être une solution. Dans la suite on utilise la méthode 2.

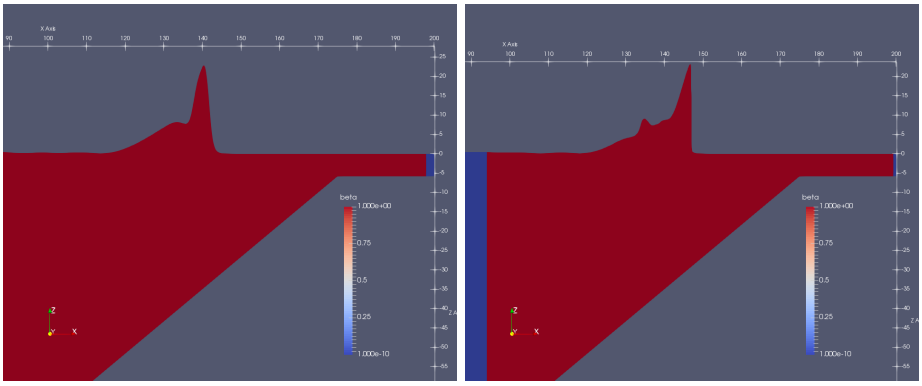
Hors quelques petites oscillations observées sur le maillage le plus fins, les résultats quantitatifs présentés dans la suite sont quasiment identiques. On se restreint donc à l'illustration de la méthode de transition SGN-SV retenue, c'est à dire la méthode 2. Les figures 8.29(a), 8.25(b), 8.25(c) et 8.25(d) comparent les résultats numériques avec différents maillages avec les mesures expérimentales. Les résultats convergent en maillage et sont de qualité. Contrairement au modèle non dissipatif, la perte d'énergie mécanique est ici bien prédite. On rappelle que la méthode finalement sélectionnée ne contient aucun paramètre hors un critère de déferlement très simple et une largeur de stencil de la zone "déferlante". Les petites oscillations à la fin des profils des figures 8.29(a) et 8.29(b) sont dues à la bascule entre les deux modèles purs.



(a) $t = 25.66s$ (b) $t = 27.66s$

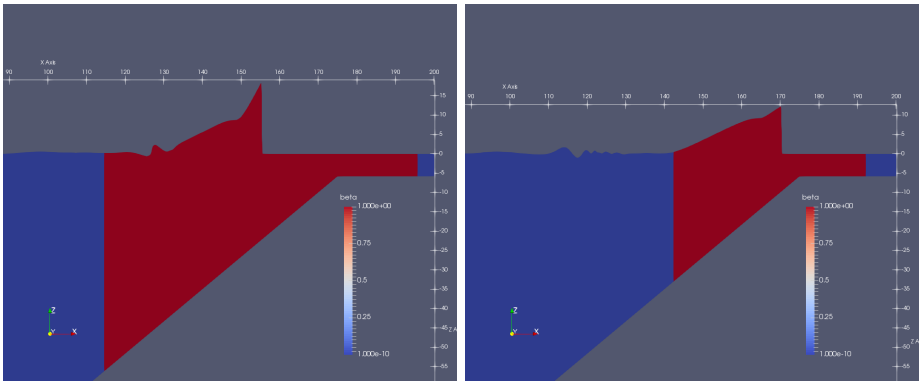
(c) $t = 29.99s$ (d) $t = 34.33s$

FIGURE 8.26 – Gonflement avec le modèle de SGN dissipatif à transition raide (méthode 1).



(a) $t = 25.66s$

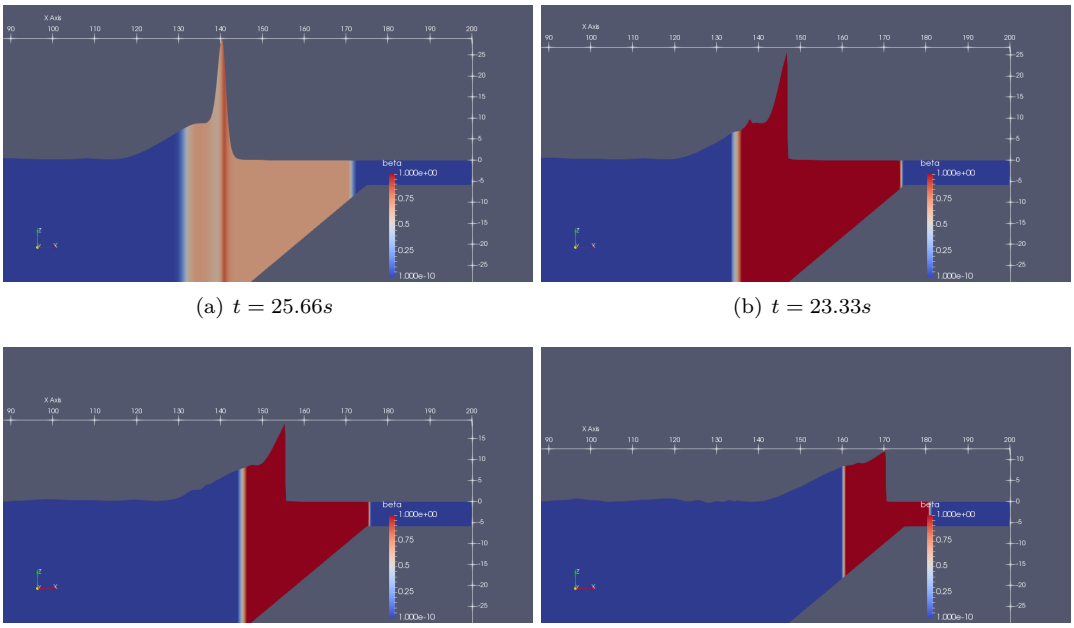
(b) $t = 26.99s$



(c) $t = 29.33s$

(d) $t = 34.33s$

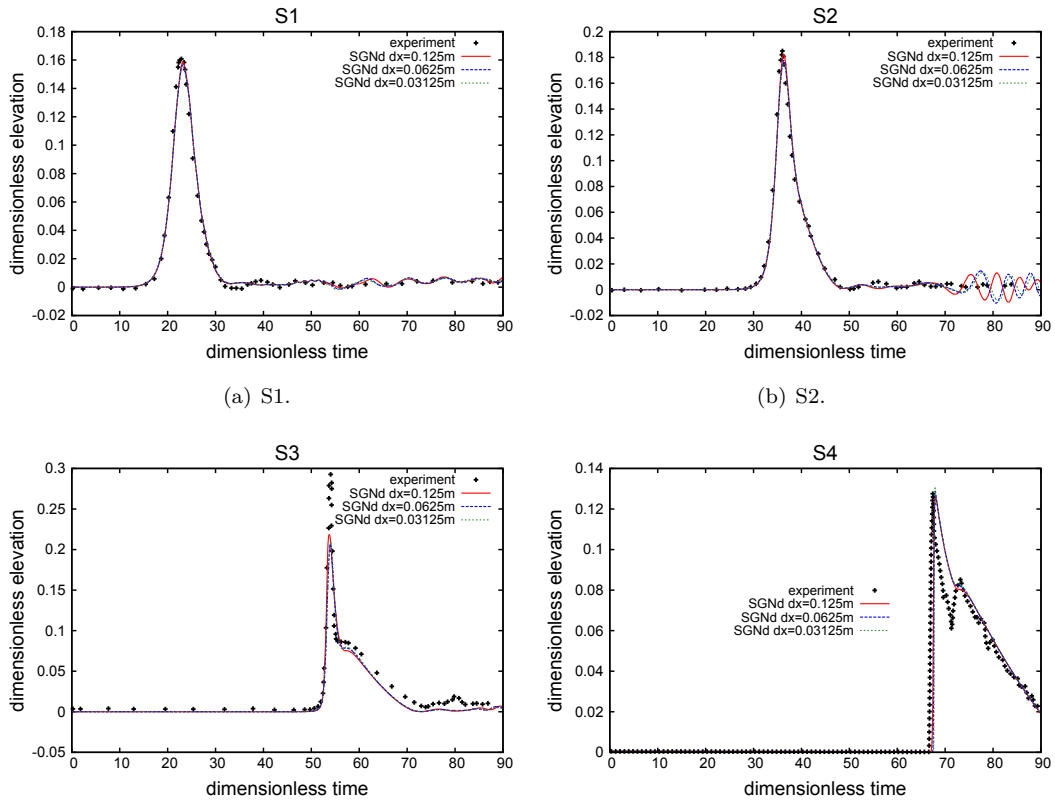
FIGURE 8.27 – Gonflement avec le modèle de SGN à transistion raide mais large (méthode 2).



(a) $t = 25.66s$ (b) $t = 23.33s$

(c) $t = 29.33s$ (d) $t = 34.33s$

FIGURE 8.28 – Gonflement avec le modèle de SGN dissipatif à transition progressive en temps et en espace (méthode 3).



(a) S1.

(b) S2.

(c) S3.

(d) S4.

FIGURE 8.29 – Comparaison entre les résultats du modèle de SGN dissipatif avec les mesures expérimentales.

8.2.3 Bilan

Le “modèle” de SGN approché permet de prévoir plus de phénomènes que le modèle de SV en dehors des zones de surf. Comme le système d’équations est hyperbolique, contrairement au modèle exact, sa résolution peut être effectuée par des méthodes robustes et efficaces. Lorsque des effets dispersifs importants sont attendus, ce modèle est à privilégier face à celui de Saint-Venant. Des cas tests académiques ont permis de valider la méthode numérique employée. Cependant, lorsque pour une raison ou une autre une vague gonfle, ce modèle ne donne pas de limite à la croissance des non linéarités car il ne contient aucun terme dissipatif. Il est donc par construction inapte à prévoir un phénomène tel que le déferlement.

Pour étendre le domaine d’application du modèle, des termes permettant une transition vers le modèle de SV en zone de surf ont été ajoutés. Trois méthodes de transition ont été évaluées. La première, utilisée dans la littérature, consiste à changer de modèle dans une zone donnée, d’une taille un peu plus grande que la longueur du rouleau. Spatialement la transition est raide. Cette méthode, comme le souligne Kazolea et Ricchiuto [108] implique des oscillations importantes, voire une explosion sur les limites des zones SGN-SV avec une résolution “standard” du modèle hybride exact. Un tel comportement est retrouvé, mais il semble que la méthode employée dans cette thèse soit tout de même beaucoup moins sensible à ce problème. Cela vient sans doute du fait qu’un schéma unique peut être employé pour résoudre le modèle dissipatif approché. Nous avons également mis en évidence un autre problème qui n’est pas dû aux interfaces de transition, mais qui vient *a priori* du caractère mal préparé des solutions qui sont générées par le modèle de SGN, puis traitées par le modèle de SV. En effet, juste après la bascule d’un modèle à un autre, des ondulations sont générées au centre de la zone traitée par le modèle de SV. Il nous semble que ceci n’est pas anormal car rien n’oblige le modèle de SV à faire parfaitement continuer une onde initialement solution des équations de SGN sur sa lancée, d’où ces perturbations “parasites”.

Pour essayer de traiter ces deux difficultés d’autres méthodes de transitions, proposées au chapitre 3, ont été testées. La seconde méthode évaluée est de procéder de la même manière que précédemment mais d’agrandir la zone de “rouleau” de sorte qu’aux limites de transition, le modèle de SGN et de SV soient compatibles. Cette approche est légèrement plus robuste et semble à privilégier dans les cas délicats. Cependant, comme pour respecter cette contrainte de compatibilité il faut souvent élargir la zone d’utilisation du modèle de SV à l’ensemble de la vague, certains effets dispersifs qui existent en aval de la déferlante peuvent être perdus. Pour réduire cette perte d’information tout en préservant la robustesse, une dernière méthode a été évaluée. L’idée est de conserver une taille de rouleau réduite (*i.e.* zone résolue par le modèle de SV), mais d’avoir une transition spatiale et temporelle graduée entre chaque limite du modèle dissipatif (SGN et SV). Rappelons que cela est possible car *a priori* rien n’oblige à avoir dans le domaine, soit le modèle de SV, soit celui de SGN. Les solutions du modèle intermédiaire ont une énergie comprise entre celle du modèle de SGN et celle du modèle de SV. Notons cependant que ce point est assez délicat. Cette méthode a permis de réduire les oscillations engendrées par la méthode raide localisée employée dans la littérature, tout en conservant une certaine localité de transition permettant de continuer à prévoir les effets dispersifs en zone proche du rouleau. Néanmoins, cette dernière approche comporte un certain nombre de paramètres ad-hoc qui la rend critiquable. Comme nous n’avons pas rencontré d’instabilités (ou d’ondes parasites) critiques avec les méthodes simples à transitions raides, nous pensons qu’avec la méthode numérique employée dans cette thèse, ces dernières peuvent être privilégiées. Notre choix se porte donc sur la méthode à transition raide à large stencil, qui est la moins sensible des deux. A l’inverse, pour les méthodes classiques de la littérature (*i.e.* résolution du système hybride SGN-SV exact par des combinaisons de méthodes numériques), l’utilisation de la méthode de transition “continue” pourrait *a priori* permettre de limiter ou même supprimer, avec une bonne paramétrisation, les difficultés rencontrées.

De manière générale, comme de bons résultats convergés en maillage ont pu être obtenus avec le modèle hyperbolique SGN dissipatif, cette approche semble être une voie intéressante pour simuler efficacement un tsunami du large à la côte.

Un point important, qui n’a pas été traité dans cette thèse avec le modèle de SGN, est le traitement du vide. Il est connu que la transition sec-mouillé est délicate avec les modèles dispersifs. On a généralement recours à des méthodes ad-hoc introduisant un “cut-off” sur la vitesse dès que la hauteur d’eau devient

petite. A la différence du modèle de SV, où ce cas peut être traité rigoureusement avec une résolution exacte du problème de Riemann associé, ces approches sont délicates à calibrer. Une autre solution souvent employée est donc de basculer sur le modèle de SV dans ces zones. De la même manière que pour traiter le déferlement, des instabilités sont à prévoir pour des transitions raides. Il serait intéressant d'investiguer, là aussi, différentes méthodes de transition. Une autre approche plus rigoureuse qui semble possible avec le système de SGN approché étudié dans cette thèse, serait de formuler de la même manière que pour le modèle de SV, la résolution exacte du problème de Riemann car ce système est hyperbolique. Cependant, le problème est beaucoup plus compliqué car ce modèle comporte des termes sources dont il faut tenir compte. Il serait intéressant d'investiguer la méthode proposée par Vázquez-Cendón et Toro [226] pour résoudre un problème de Riemann pour des équations avec termes sources. Notons que cela n'est intéressant que si le problème est bien numérique. Il est aussi possible que, comme pour le déferlement, le modèle de SGN soit tout simplement inapte à traiter une transition sec-mouillé.

Chapitre 9

Applications numériques des modèles bi-phases

Sommaire

9.1 Introduction **188**
9.2 Méthodes numériques **189**
9.3 Discussion sur les cas incompressibles **190**
9.4 Cas tests **191**
9.4.1 Tube à choc avec mélange 191
9.4.2 Tube à cavitation 194
9.4.3 Piston air-eau 195
9.4.4 Explosion sous marine 196
9.4.5 Déferlement sur une pente 198
9.4.6 Impact sur un mur par rupture de barrage 201
9.4.6.1 Cas de phase pures 202
9.4.6.2 Cas d'un mélange 207
9.4.7 Impact normal sur une plaque 209
9.5 Bilan **211**

Le but de ce chapitre est de valider et d'utiliser les modèles diphasiques isentropiques (et barotropiques dans la majorité des cas traités) sélectionnés dans le chapitre 9. Des validations sur des cas tests académiques sont effectuées puis des applications sur des cas réels sont présentées, avec notamment de études d'impacts de fluides purs et milieux aérés sur des structures.

9.1 Introduction

Comme on l'a vu au chapitre 4, deux formulations sont possibles pour modéliser les écoulements qui nous intéressent (les écoulements à phases séparées et les "mélanges") : le modèle isentropique à l'équilibre mécanique et la version "à relaxation" de pression. Le modèle à relaxation tend vers le modèle à l'équilibre pour une relaxation instantanée. Mais alors pourquoi résoudre le modèle à relaxation ? En fait, on verra que sur des cas tests compliqués la résolution du modèle à l'équilibre pose problème. En l'occurrence avec le solveur utilisé, nous n'avons pas réussi à préserver la positivité de la fraction volumique. Ceci nous a conduit à exclure ce système et à considérer au final le modèle à relaxation raide. Pour plus de détails sur ces modèles le lecteur est renvoyé au chapitre 4. On les rappelle cependant ci dessous :

Modèle isentropique à l'équilibre (noté ME) : (9.1.1)

$$\frac{\partial \alpha_1\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1\rho_1 u}{\partial x} = 0 \tag{9.1.2}$$

$$\frac{\partial \alpha_2\rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2\rho_2 u}{\partial x} = 0 \tag{9.1.3}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0 \tag{9.1.4}$$

$$P = P(\rho_g) = P(\rho_l) \tag{9.1.5}$$

Modèle isentropique à relaxation (noté MR) :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{P_1 - P_2}{\mu}$$

$$\frac{\partial \alpha_1\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1\rho_1 u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_2\rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2\rho_2 u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0$$

Avec α_k la fraction volumique, ρ_k la masse volumique, u la vitesse et P_k la pression de la phase k. Pour le modèle "hors" équilibre de pression, la relaxation instantanée vers l'équilibre donne évidemment $P = P_1 = P_2$. Il existe une unique fraction volumique satisfaisant cette égalité de pressions. Dans la plupart des cas tests effectués on se place dans le cas barotrope avec comme lois d'états :

$$P_l - P^{ref} = c_l^2(\rho_l - \rho_l^{ref}) \qquad\qquad P_g - P^{ref} = c_g^2(\rho_g - \rho_g^{ref})$$

On se placera parfois aussi dans le cas isentropique en utilisant des lois plus élaborées comme une loi des gaz parfaits isentropiques pour l'air :

$$P_g(\rho_g) = P_0\big(\frac{\rho_g}{\rho_g^{ref}}\big)^{\gamma_g} \tag{9.1.6}$$

γ_g, ρ_g^{ref} et P_0 correspondent respectivement au ratio de chaleur spécifique, à la masse volumique de référence et à la pression de référence. Pour l'eau liquide la loi isentropique approchée de Tait sera aussi utilisée (voir par exemple Bernard et al. [25]) :

$$P_l(\rho_l) = (P_0 + P_0K)\big((\frac{\rho_l}{\rho_l^{ref}})^{\gamma_l} - 1\big) \tag{9.1.7}$$

$K = \dfrac{\rho_l^{ref}(c_l^{ref})^2}{\gamma_l P_0}$ correspond au module de compressibilité du liquide avec c_l^{ref} la vitesse du son de référence du liquide.

Pour des conditions normales de température et de pression (*i.e.* $T \approx 300K$, $P \approx 10^5 Pa$), les paramètres des lois d'état choisis pour l'air et l'eau peuvent être pris à : $\rho_l^{ref} = 1000kg/m^3$, $\rho_g^{ref} = 1.2kg/m^3$, $P_0 = 10^5 Pa$, $c_g^{ref} = 340m/s$, $c_l^{ref} = 1500m/s$, $\gamma_g = 1.4$ et $\gamma_l = 7$. Sauf indication contraire, ces paramètres sont utilisés dans les cas tests ci-dessous.

On rappelle que considérer un modèle multiphases est intéressant pour essayer d'avancer dans la compréhension et la prévision d'impacts violents, plus ou moins aérés, que l'on rencontre par exemple avec certains tsunamis mais plus généralement avec les vagues. Les modèles considérés sont suffisamment généraux pour traiter les écoulements à phases séparées et des zones de mélanges. Ceci permet d'envisager l'analyse de quasiment tous les types d'impact (*cf.* le chapitre 1 pour le détail de ces interactions). Nous verrons que même pour des cas induisant des ondes de choc ou de détente intenses, dans la majorité des cas, il est difficile de faire la différence entre les résultats obtenus entre le cas barotrope et isentropique. Comme dans le cas isentropique l'équation à résoudre pour trouver la fraction volumique d'équilibre est complexe, il est utile de privilégier le cas barotrope pour lequel une solution analytique peut être trouvée.

En dehors de la validation de l'implémentation de ces modèles, la plus value principale de ce chapitre est l'investigation d'impacts pour un mélange air-eau *a priori* représentatif de la physique principale de l'impact d'un rouleau sur une structure. Certains cas tests présentés pourront paraître hors sujet, comme le cas de l'explosion sous marine, mais permettent de valider le modèle dans des conditions très raides. Cela permet de montrer que le modèle diphasique considéré et la méthode de résolution employée sont capables de représenter les phénomènes de cavitation, dès lors que seuls les effets mécaniques sont prépondérants. On rappelle que, comme montré par Ma et al. [143], lors d'impacts particuliers il est possible de rencontrer ce phénomène ce qui nous a encouragé à effectuer de tels cas tests.

La section qui suit présente la méthode numérique employée pour résoudre ces modèles. Également, avant de présenter les cas tests, une discussion sur la notion d'incompressibilité d'un écoulement est donnée.

9.2 Méthodes numériques

La méthode de résolution employée est basée sur le schéma explicite du second ordre en temps de Runge-Kutta, le solveur HLLC et une montée en ordre spatiale basée sur le formalisme non structuré de Barth et Jespersen avec le limiteur Minmod ou Superbee. L'avantage de ce dernier est d'être légèrement compressif, ce qui réduit la diffusion de l'interface entre les différents fluides. Le lecteur est renvoyé au chapitre 5 où ces méthodes sont présentées. Le préconditionnement Tous Mach à oscillations limitées proposé au chapitre 6 est utilisé sauf indication contraire. La seule différence de résolution entre les deux modèles réside dans l'expression de la vitesse acoustique à considérer dans le solveur de Riemann. Pour le modèle à relaxation la célérité est $c_{frozen} = \sqrt{\dfrac{\alpha_1\rho_1}{\rho}{c_1}^2 + \dfrac{\alpha_2\rho_2}{\rho}{c_2}^2}$ alors que pour le modèle à l'équilibre $\dfrac{1}{\rho c^2} = \dfrac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \dfrac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2}$. On rappelle que, pour le système à relaxation, la relaxation des pressions fait que l'on retrouve bien au final la vitesse acoustique de mélange de Wood (correspondant à celle du modèle à l'équilibre). La considération du modèle à relaxation induit donc ici simplement plus de diffusion (et donc plus de stabilité, $c_{frozen} \geqslant c_{Wood}$) dans le solveur de Riemann. En pratique, la résolution consiste dans tous les cas à résoudre dans un premier temps la partie homogène du système, puis dans une seconde étape de trouver la fraction volumique correspondant à l'équilibre des pressions. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à Chanteperdrix [40] et Saurel et al. [197].

Sauf contre indiqué, on impose dans les phases "pures" une fraction volumique d'air de $\alpha = 10^{-6}$ dans l'eau et $\alpha = 1 - 10^{-6}$ dans l'air.

9.3 Discussion sur les cas incompressibles

Une façon de caractériser la compressibilité d'un fluide est de regarder la vitesse de propagation de petites perturbations de pression en son sein. Monaghan [160] explique que l'équation de quantité de mouvement implique que les variations relatives de densité dans un écoulement sont de l'ordre de :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = O(\frac{U * L}{c^2 T}) \tag{9.3.1}$$

T est l'échelle de temps caractéristique du phénomène étudié, L sa longueur, U sa vitesse et c correspond à la vitesse de propagation des ondes acoustiques. Pour des problèmes à bas nombre de Mach, $U = O(L/T)$, ce qui implique d'après l'équation ci-dessus :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = O(M^2) \tag{9.3.2}$$

La méthode qu'il propose pour résoudre des écoulements incompressibles est de rester dans le cadre d'un modèle compressible, pour sa simplicité de résolution. Afin de relaxer la contrainte d'intégration en temps des schémas explicites (dictée par $\triangle t \approx O(M\triangle x) << 1$ à bas Mach), il propose de modifier artificiellement la vitesse acoustique. Il est cependant nécessaire d'autoriser seulement de très faibles variations relatives de densité ($\approx 1\%$) pour rester proche de la physique. Compte tenu de l'équation précédente, cela revient à vérifier un Mach artificiel proche de $M_a \lessapprox 0.1$. En fixant c en début de la simulation sous cette contrainte, il obtient des résultats cohérent avec ceux obtenus avec un modèle incompressible. Cette approche est aussi utilisée dans un cadre eulérien dans par exemple, Chanteperdrix [40], Plumerault [173] ou Golay et Helluy [81]. Un des défauts de cette approche est qu'il faille connaître la vitesse (particulaire) de l'écoulement pour estimer la bonne borne de vitesse acoustique artificielle à utiliser.

Cette méthode attractive se comprend assez bien intuitivement et est d'une grande simplicité comparée à l'utilisation de méthode implicite ou encore à l'utilisation d'un modèle incompressible (nécessitant la résolution d'un système linéaire). On peut cependant se demander si l'ordre de grandeur des variations de densité est toujours quantifié de la sorte à bas Mach. En toute rigueur on sait que le modèle d'Euler compressible converge bien vers sa variante incompressible lorsque le Mach tend vers 0 (*cf.* chapitre 6) mais ceci correspond à une limite mathématique. Nulle borne n'est donnée.

Morris utilise l'idée de Monaghan dans [164] pour simuler un écoulement incompressible et précise les contraintes à respecter pour "assurer" de faibles variations de densité. Prenons l'équation de quantité de mouvement d'Euler avec une loi d'état du type $P - P_0 = c_0^2(\rho - \rho_0)$ et une force volumique, puis substituons des grandeurs caractéristiques $L_0, U_0, F_0, \rho_0, T_0$:

$$\frac{du}{dt} + \frac{c_0^2}{\rho}\nabla(\rho - \rho_0) = \frac{F}{\rho}$$
$$\Longrightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} = O(\frac{U_0 L_0}{c_0^2 T_0}, \frac{F_0 L_0}{\rho_0 c_0^2})$$

Ce type de raisonnement est intéressant mais est cependant partiel.

Regardons par exemple un lac au repos. L'équation de quantité de mouvement selon la verticale (noté z) avec une vitesse nulle donne pour la loi de pression précédente :

$$c_0^2 \frac{\partial\rho}{\partial z} = -\rho g$$
$$\Longrightarrow \rho = \rho_{ref} e^{\frac{-g(z - z_{ref})}{c_0^2}}$$

En conséquence, la variation de densité est loin d'être caractérisée par $\frac{\delta\rho}{\rho} = O(\frac{F_0 L_0}{\rho_0 c_0^2})$ dû à la "force" de la fonction *exponentielle*. Par exemple, en considérant une colonne d'eau et en prenant $c_0 = 10m/s$, on a déjà à 10 m de profondeur une variation de plus de 250% de la masse volumique de référence. Ici évidemment une force est présente due à la gravité, mais cela montre que dans ce cas simple la fameuse limite $M_{articiel} \approx 0.1$ n'est pas toujours acceptable.

Selon nous, cette approche demeure très attractive mais il faut être très méfiant en l'employant. Comme dans le cas général il est impossible de lier analytiquement variation de densité et variation de vitesse, les seules approches qui nous semblent valables sont de procéder de la manière suivante. Il faut soit pour un calcul donné postraiter les variations de densité dans toutes les zones du domaine et montrer que *in fine* on a bien $\rho \approx cste$, soit faire *a minima* deux calculs avec deux $M_{artificiel}$ différents et montrer qu'ils donnent les mêmes résultats. D'un point de vue numérique, l'utilisation d'un schéma qui préserve l'asymptotique à bas Mach est donc primordiale pour ce genre de méthodes, sous peine de devoir changer le maillage pour chaque $M_{artificiel}$ testé pour espérer obtenir des résultats similaires lorsque c'est possible physiquement.

9.4 Cas tests

9.4.1 Tube à choc avec mélange

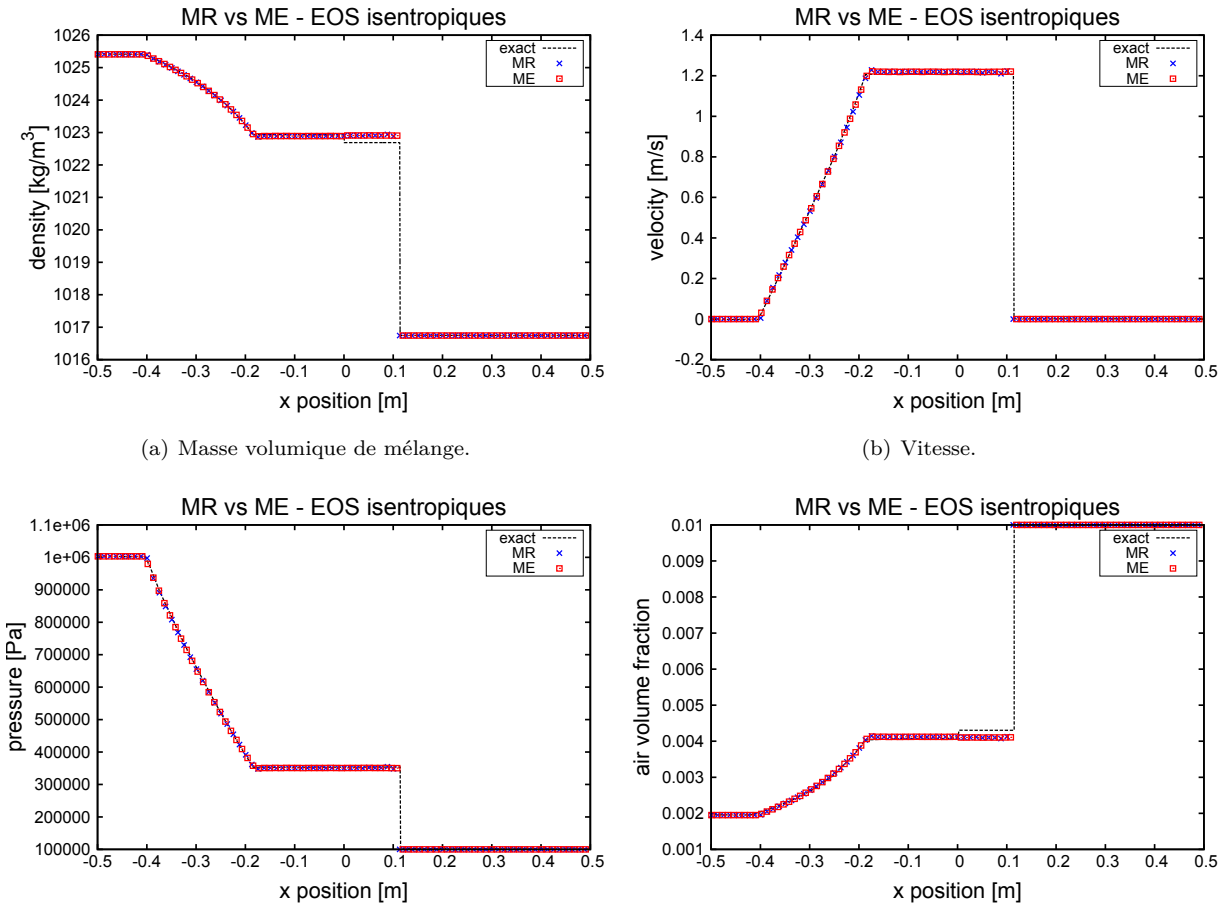
Ce cas test permet d'évaluer la résolution des modèles dans des conditions raides, avec une forte détente et un choc intense dans un mélange. Un tube de $1m$ est considéré. On se donne un état à droite et un état à gauche du centre du tube récapitulé dans le tableau 9.1. Notons que les pressions ne sont pas précisées car elles sont la conséquence directe du choix des vitesses acoustiques et masses volumiques de référence avec les EOS utilisés. Le maillage est composé de $N = 800$ cellules uniformes. Le temps final est $t_{fin} = 551.37\mu s$. La condition CFL est $CFL = 0.8$. Les masses volumique de référence de l'air et de l'eau sont respectivement fixées à $\rho_a^{ref} = 1.33kg/m^3$ et $\rho_w^{ref} = 1027kg/m^3$.

Les modèles MR et ME sont comparés. On commence par utiliser les lois de pression isentropiques. Les figures 9.1(a), 9.1(b), 9.1(c) et 9.1(d) présentent respectivement la masse volumique de mélange, la vitesse, la pression et la fraction volumique d'air en fonction de la solution exacte. Les résultats sont de qualités. Il est intéressant de noter que les résultats obtenus sont quasi identiques entre le modèle MR et ME, ce qui confirme que MR est une bonne approximation de ME. Aussi si on compare les résultats obtenus avec la littérature, nous n'obtenons pas les oscillations parasites rencontrées par Plumerault et al. [173] qui utilisent un modèle plus élaboré. Nos résultats sont quasi identiques à ceux de Ma et al. [142] qui résolvent également un modèle plus avancé (modèle de Kapila avec EOS des gaz raides). Compte tenu de la différence de simplicité entre ces approches, il est clair qu'un gain d'efficacité doit être atteint par les modèles utilisés ici.

On fait ensuite de même avec les EOS barotropes linéarisées. Il est clair que ces lois ne sont pas valides à ces niveaux de pression. Il est cependant instructif de voir si le comportement est similaire. Les figures 9.2(a), 9.2(b), 9.2(c) et 9.2(d) présentent respectivement la masse volumique de mélange, la vitesse, la pression et la fraction volumique d'air en fonction de la solution exacte. Le comportement est assez similaire au cas isentropique, bien que certains niveaux soient erronés car ces lois d'état ne sont plus valides à ces hautes pression.

$\rho_{a,L}[kg/m^3]$	$\rho_{w,L}[kg/m^3]$	$u_L[m/s]$	α_L	$\rho_{a,R}[kg/m^3]$	$\rho_{w,R}[kg/m^3]$	$u_R[m/s]$	α_R
6.908	1027	0	0.00195	1.33	1027	0	0.01

Table 9.1 – Conditions initiales du cas test tube à choc de mélange.



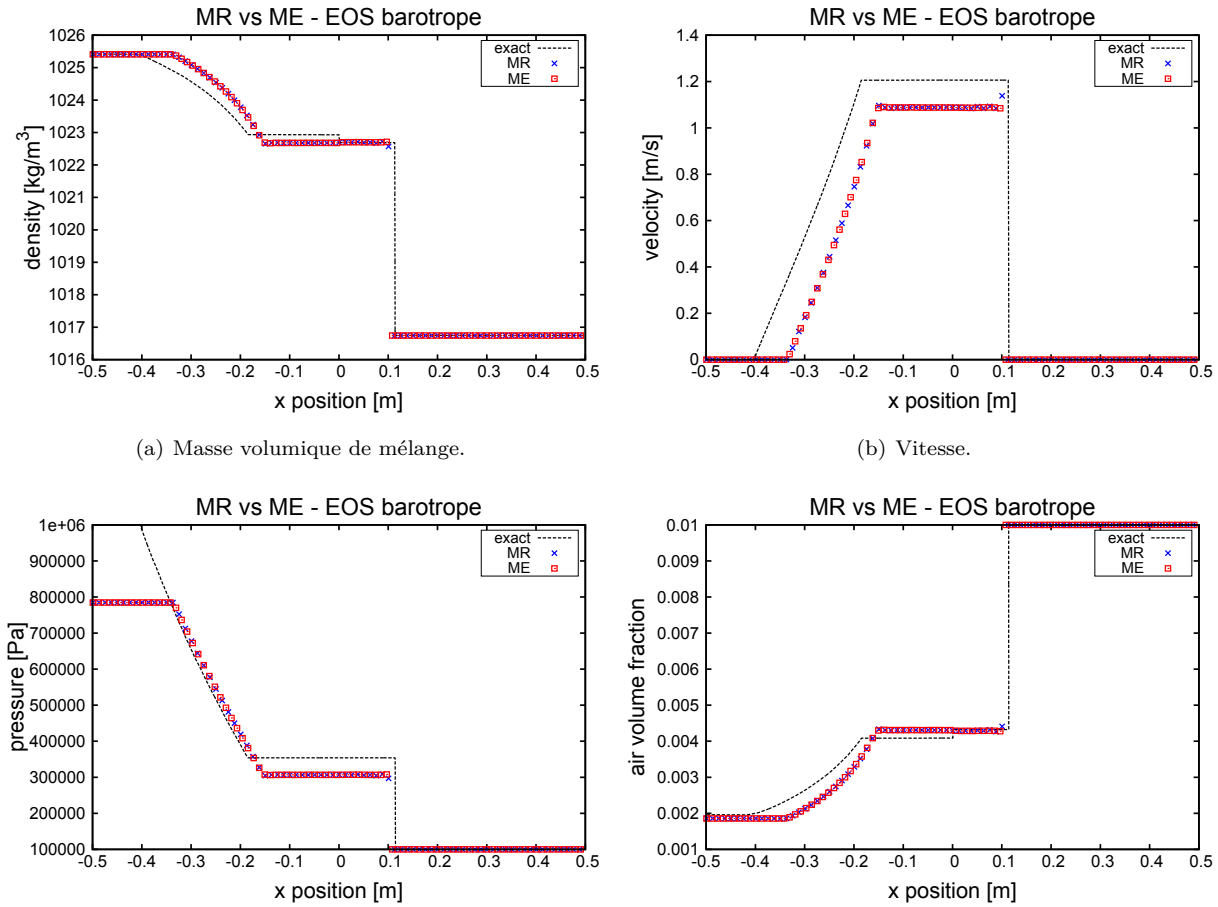
(a) Masse volumique de mélange.

(b) Vitesse.

(c) Pression.

(d) Fraction volumique d'air.

FIGURE 9.1 – Tube à choc avec mélange avec des EOS isentropiques. La solution exacte a été extraite de Plumerault [173].



(a) Masse volumique de mélange.

(b) Vitesse.

(c) Pression.

(d) Fraction volumique d'air.

FIGURE 9.2 – Tube à choc avec mélange avec des EOS barotropes linéarisées. La solution exacte a été extraite de Plumerault [173].

9.4.2 Tube à cavitation

Ce cas test permet d'évaluer la résolution des modèles dans des conditions raides, menant à de la cavitation. Un tube $1m$ est considéré. On se donne un état à droite et un état à gauche du centre du tube récapitulé dans le tableau 9.2. Le maillage est composé de $N = 800$ cellules uniformes. Le temps final est $t_{fin} = 1.85\mu s$. La condition CFL est $CFL = 0.8$.

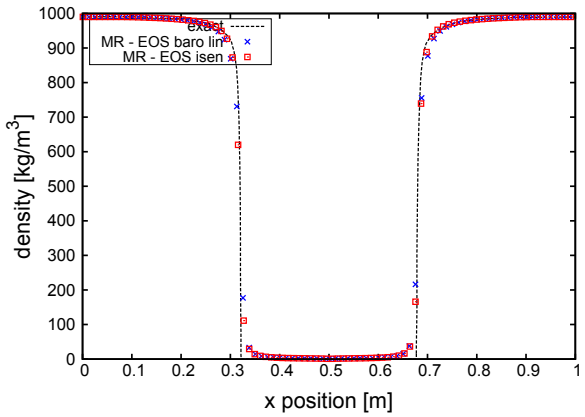
Ce cas test mène à l'échec de la résolution du modèle ME. Au bout de quelques pas de temps la fraction volumique d'air, ou plutôt de vapeur d'eau ici, sort des bornes physiques. L'utilisation d'une CFL très réduite ne change pas le problème. Pour des cas impliquant de la cavitation, ce modèle (avec la résolution actuelle) est donc à exclure. Pour le modèle MR, ce cas test ne pose en revanche pas de difficultés. Les lois d'état isentropiques et barotropes linéarisées sont comparées sur ce cas test. Les figures 9.3(a), 9.3(b), 9.3(c) et 9.3(a) présentent respectivement la masse volumique de mélange, la vitesse, la pression adimensionnée par la pression de référence et la fraction volumique de vapeur d'eau en fonction de la solution exacte extraite de Saurel et al. [197]. Les résultats sont de qualités. Le comportement avec les deux type de lois d'état est similaire. Cependant, avec les lois d'états linéarisées on peut s'interroger sur la pression négative, et donc non physique, obtenue.

Précisons un point important. A l'état initial, on a de l'eau en équilibre avec un petit pourcentage de vapeur d'eau. La mise en tension de ce mélange faible fait gonfler la phase légère jusqu'à créer une poche d'air. D'une manière rigoureuse, la cavitation vient certes d'un effet mécanique, mais implique en toute rigueur un changement d'état et non un gonflement. Cependant c'est une modélisation qui est relativement représentative car d'une part, les échanges d'énergie interne dus au changement d'état ne sont pas de première importance sur la dynamique et d'autre part, le travail demandé pour le gonflement est représentatif du travail nécessaire à la "vrai" cavitation (*i.e.* changement d'état sous tension). Comme les propriétés de la vapeur d'eau sont, dans les gammes et les problèmes qui nous concernent, relativement similaires à l'air, il est donc possible en modélisant des phases air-eau avec cette méthode de prévoir de manière approchée la cavitation de l'eau en vapeur d'eau (assumée comme de l'air). Cette capacité de la méthode est utile pour les impacts violents qui peuvent induire ce type de phénomène.

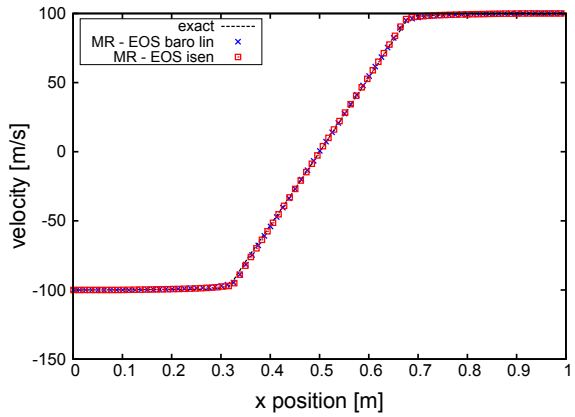
En conclusion, on se restreint dans la suite à l'utilisation du modèle MR qui, associé à une résolution standard (*i.e.* schéma de type Godunov) et la correction TVB-limité Tous Mach proposée au chapitre 6, est très robuste dans les cas à haut Mach et permet de représenter la physique qui nous intéresse.

$\rho_{a,L}[kg/m^3]$	$\rho_{w,L}[kg/m^3]$	$u_L[m/s]$	α_L	$\rho_{a,R}[kg/m^3]$	$\rho_{w,R}[kg/m^3]$	$u_R[m/s]$	α_R
1	1000	-100	0.01	1	1000	100	0.01

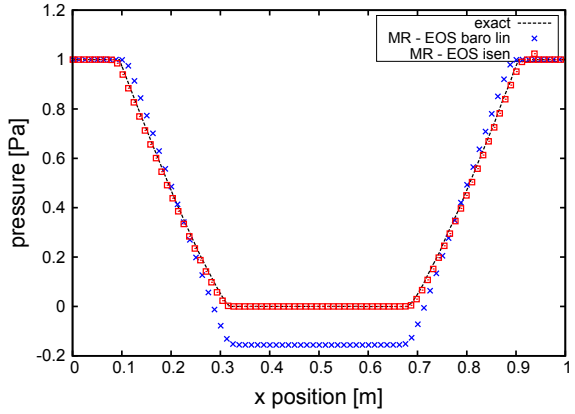
Table 9.2 – Conditions initiales du cas test tube à cavitation.



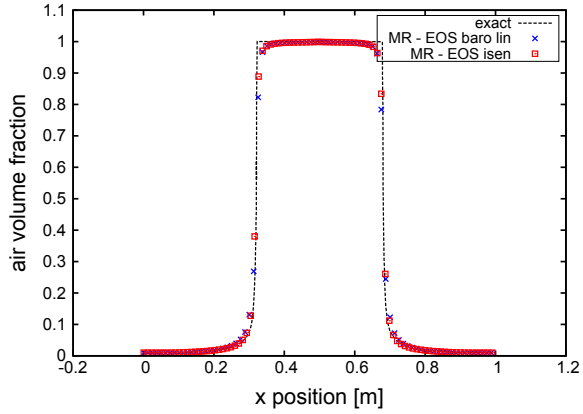
(a) Masse volumique de mélange.



(b) Vitesse.



(c) Pression.



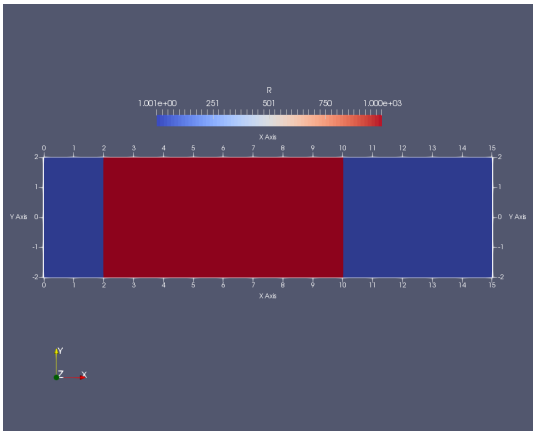
(d) Fraction volumique de vapeur d'eau.

FIGURE 9.3 – Tube à cavitation. La solution exacte a été extraite de Saurel et al. [197].

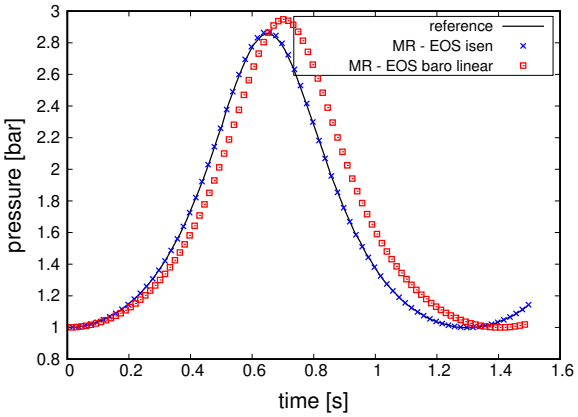
9.4.3 Piston air-eau

Ce cas test 1D consiste à comprimer puis à détendre un volume d'air. Il permet d'évaluer les lois d'états dans des conditions moins extrêmes que le cas du tube à choc et en condition de phases séparées. Les conditions initiales sont illustrées en figure 9.4(a) avec à gauche de l'air, au milieu de l'eau et à droite de l'air à nouveau. Les conditions aux limites sont de type mur. La gravité ($g = 9.81 m/s^2$) est orientée selon les x décroissants. Le maillage est composé de $N = 400$ cellules uniformes. On évalue la pression au cour du temps en $x = 0$

Le modèle MR est utilisé compte tenu des résultats précédents. On teste les deux types de lois d'états, isentropiques et barotropes linéaires. Les EOS barotropes linéarisées donnent de moins bons résultats que les lois isentropiques, mais peuvent être acceptables suivant la précision que l'on veut atteindre. Même si la pression atteinte n'est pas si élevée, elle est sans doute représentative de beaucoup d'impacts de vague (le lecteur est renvoyé à Bullock et al. [35], où des expériences d'impacts sont présentées). Il est donc utile de noter qu'à ces niveaux de contraintes, les lois barotropes linéaires peuvent suffire, même si les résultats avec les lois isentropiques sont plus précis. Ceci peut permettre un gain en temps de calcul non négligeable ; par exemple, dans ce cas test on passe du simple au double.



(a) Configuration.



(b) Profil de pression.

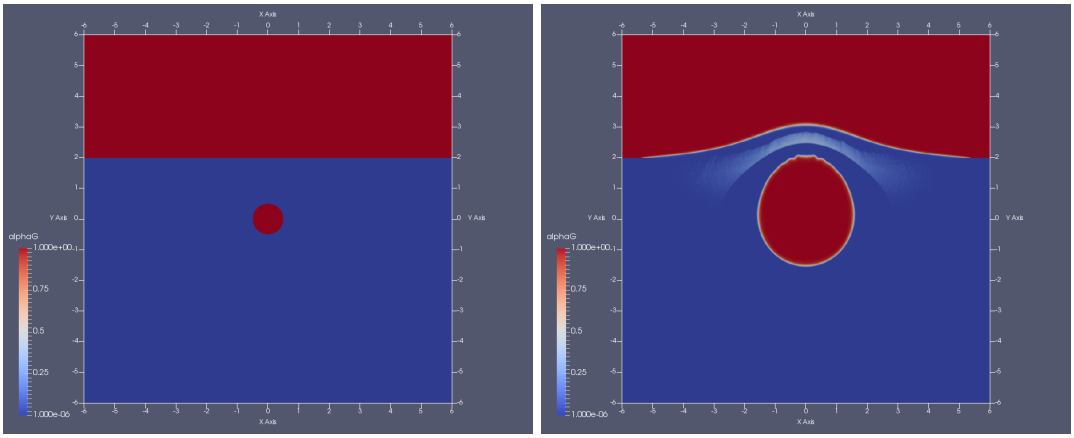
FIGURE 9.4 – Piston air-eau. La solution de référence a été extraite de Ma et al. [142] qui résolvent le modèle de Kapila avec des lois d'état des gaz raides.

9.4.4 Explosion sous marine

Pour finir sur l'illustration de la robustesse de la méthode employée avec le modèle MR, le cas d'une explosion sous marine est traité. On considère un disque sous le niveau de surface libre centré en $(x, y) = (0, 0)$, de rayon $0.5m$, contenant les produits de détonation à masse volumique $\rho_a = 1250kg/m^3$. La réaction chimique des produits détonant est supposée déjà effectuée. Le changement d'état non modélisé de ces produits (souvent solides) donne un gaz à très haute pression de l'ordre de $P \approx 10^9 Pa$, suivant l'EOS utilisée. Ce gaz est modélisé par de l'air. On considère un domaine $\Omega = [-6, 6] * [-6, 6]m^2$, discrétisé par un maillage uniforme tel que $\triangle x = \triangle y = 1.5cm$. La CFL utilisée est égale à 0.5. Compte tenu de la pression initiale dans le volume d'air, les lois d'états isentropiques sont considérées. Les conditions initiales sont illustrées en figure 9.5(a). Les conditions aux limites sont de type mur en bas et ouverte ailleurs. Sur les échelles de temps considérées la prise en compte de la gravité n'est pas nécessaire.

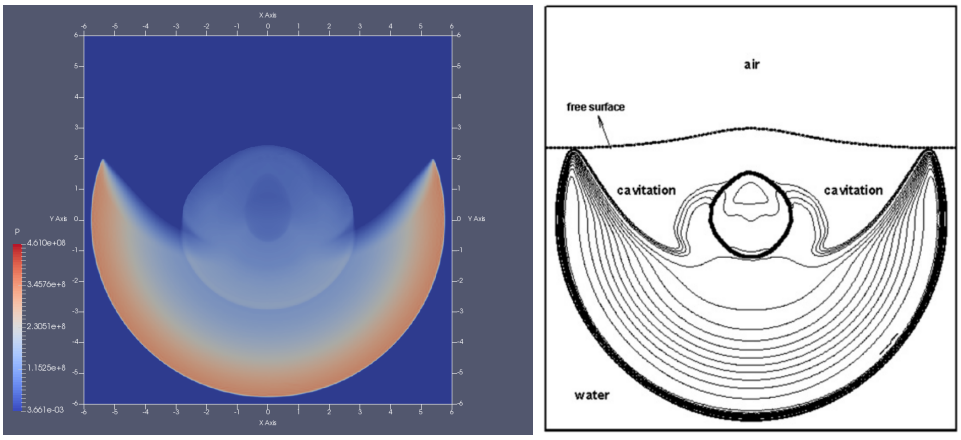
Remarque 36. *Ce cas test est clairement effectué pour montrer la robustesse de l'approche employée et sa capacité à gérer des phénomènes complexes. On peut cependant se poser la question suivante : peut on générer un tsunami important avec une explosion sous marine d'ampleur ? En comparant l'énergie potentielle d'une tsunami sérieux (par exemple d'amplitude* $1m$ *sur une longueur d'onde de* $100km$*) il est clair que même si l'explosion transmettait toute son énergie à la colonne d'eau, on serait plusieurs ordres de grandeur en dessous d'un tel cas même en considérant plusieurs bombes de "type Hiroshima". Le lecteur est renvoyé au chapitre 1 où les ordres de grandeurs sont donnés.*

On compare qualitativement les résultats obtenus avec ceux de Xie et al. [233] qui utilisent un modèle avec énergie spécialement conçu pour traiter les phénomènes de cavitation. Notons que les conditions initiales sont légèrement différentes des nôtres. Les résultats obtenus rendent bien compte de la physique majeure de ce cas test et sont qualitativement cohérents avec ceux de Xie et al. [233]. On observe d'abord le passage d'une onde de choc à travers la surface libre, qui se réfléchit légèrement et induit une détente menant à la génération d'une région cavitante sous la surface libre. En temps plus long, la poche contenant les produits de détonation s'étend et va finir par s'échapper de la zone sous marine.



(a) Configuration initiale. (b) Fraction volumique de gaz à $t = 2.5\mu s$.

FIGURE 9.5 – Expansion de la poche de produits détonnés initiale et cavitation sous la surface libre.



(a) Pression avec échelle ajustée à $t = 2.5\mu s$. (b) Pression extraite de Xie et al. [233].

FIGURE 9.6 – Champs de pression à $t = 2.5\mu s$.

9.4.5 Déferlement sur une pente

Dans ce cas test on se concentre sur la première phase du déferlement d'une vague : le retournement et le premier rebond. Ce cas montre la capacité de la méthode à gérer la coalescence d'interfaces. Il est basé sur les expériences de Li et Raichlen [130]. Le dispositif expérimental est présenté en figure 9.7. On se concentre sur l'expérience avec $H/h = 0.4$. Le soliton est initialisé par la solution au premier ordre des équations de Boussinesq. Les conditions initiales à appliquer pour une reproduction numérique de ce cas test sont délicates à cerner car le batteur utilisé dans l'expérience n'a pas exactement généré une onde solitaire (au sens de solution des équations d'Euler). On se contente donc de cette condition initiale, suffisante pour une comparaison quantitative. La vague est initialisée sur la zone plate.
Pour ce cas test, le schéma Tous Mach utilisé est d'une importance capitale pour arriver à obtenir des résultats convergeants avec des maillages raisonnables. On utilise la méthode AMR présentée au chapitre 7. Comme pour ce problème le plus important est de bien capter la surface libre, on utilise un critère de raffinement simple basé sur le gradient de densité. Le seuil de raffinement, basé sur la moyenne de ce gradient sur le domaine, est ici suffisant. En conséquence, la méthode de seuil automatique proposée n'est pas utilisée. Pour bien capter le rebond au déferlement, les cellules les plus petites autorisées font $1.5mm$ tandis que les plus grossière mesurent $5cm$. Pour obtenir des temps de calcul raisonnables, les vitesses acoustiques des deux fluides sont abaissées à $50m/s$. Ceci permet de passer ce calcul en environ $24h$ sur une machine avec 16 cœurs de puissance assez standard. Pour ce cas test, nous ne démontrons pas qu'une telle réduction de vitesse acoustique n'affecte pas les résultats, cependant un postraitement du champ de densité au cours du temps nous a permis de vérifier (au moins grossièrement) que celle ci ne variait quasiment pas avec ce choix de célérité, ce qui permet d'avoir confiance dans les résultats présentés.

Pour simplifier la génération du maillage, une "pénalisation fixe" est implémentée de sorte d'imposer une condition de réflexion sur toutes les cellules souhaitées. On considère donc un domaine de calcul rectangulaire dans lequel certaines cellules sont "gelées" et réfléchissent toutes les ondes. Cela induit un maillage plus gros que si le domaine était restreint à la zone fluide mais ceci reste négligeable car la méthode AMR permet de ne mettre que très peu de cellules dans cette zone où le calcul est inutile. L'avantage de cette approche est que la génération du maillage est très simple.

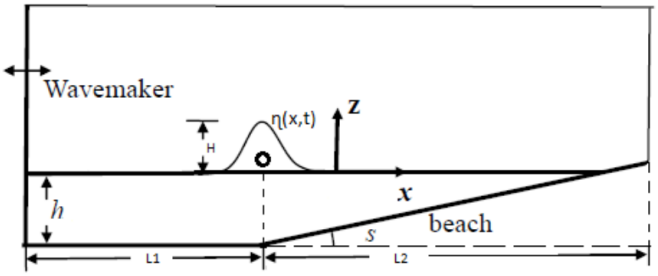


FIGURE 9.7 – Schéma du dispositif expérimental. La pente est de 1 : 15 et la hauteur d'eau au repos est de $h_0 = 0.3048m$

On compare qualitativement en figures 9.8, 9.9, 9.10, 9.11, 9.12, 9.13, 9.14 et 9.15 les résultats numériques avec des photographies de l'expérience. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. Bien que le limiteur Superbee utilisé ici induise un faible diffusion de l'interface air-eau, il serait intéressant d'utiliser une méthode d'anti-diffusion pour pouvoir considérer un maillage légèrement plus grossier.

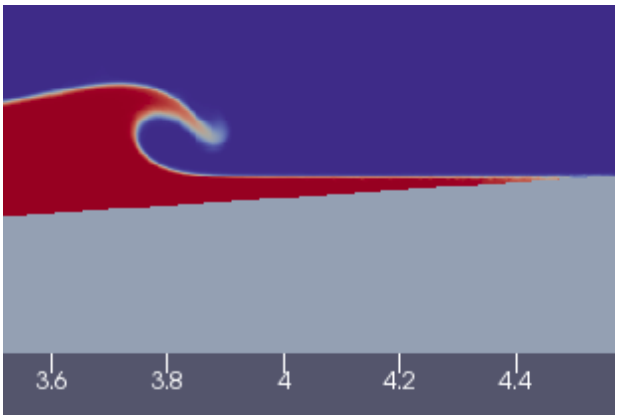


Figure 9.8 – Numérique.

Figure 9.9 – Expérience.

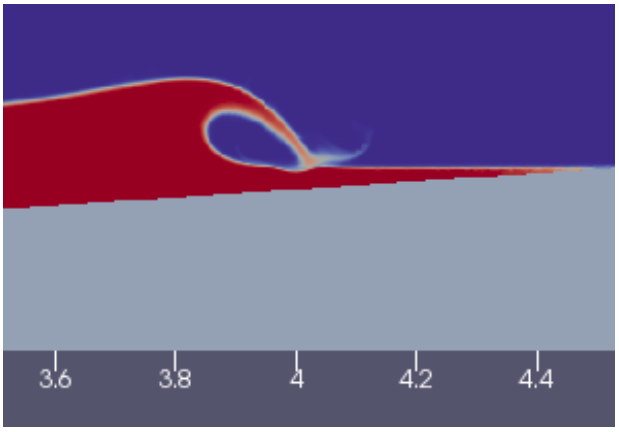


Figure 9.10 – Numérique.

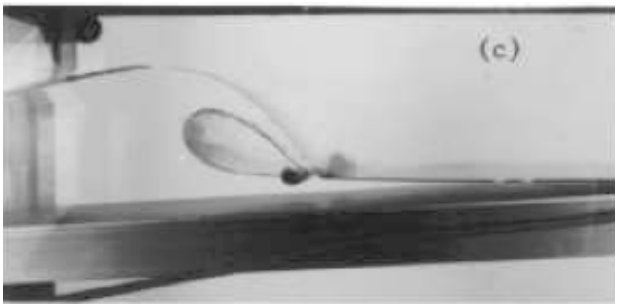


Figure 9.11 – Expérience.

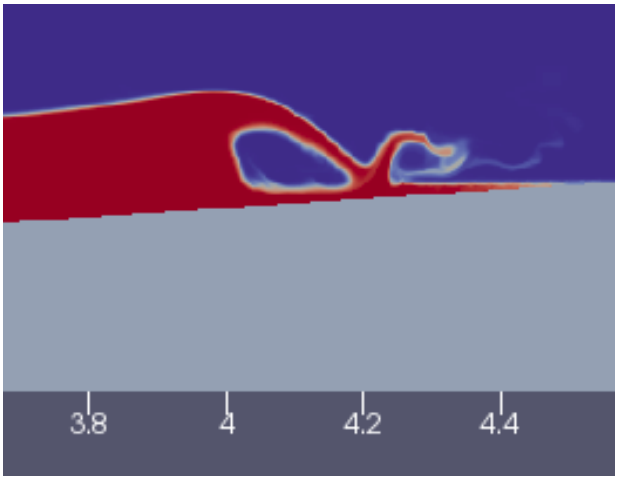


Figure 9.12 – Numérique.

Figure 9.13 – Expérience.

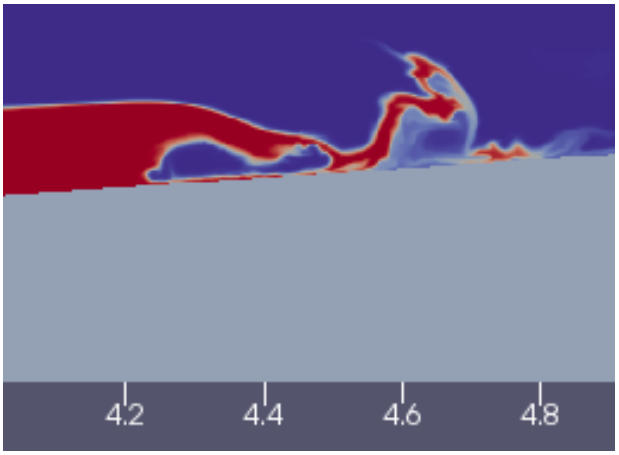
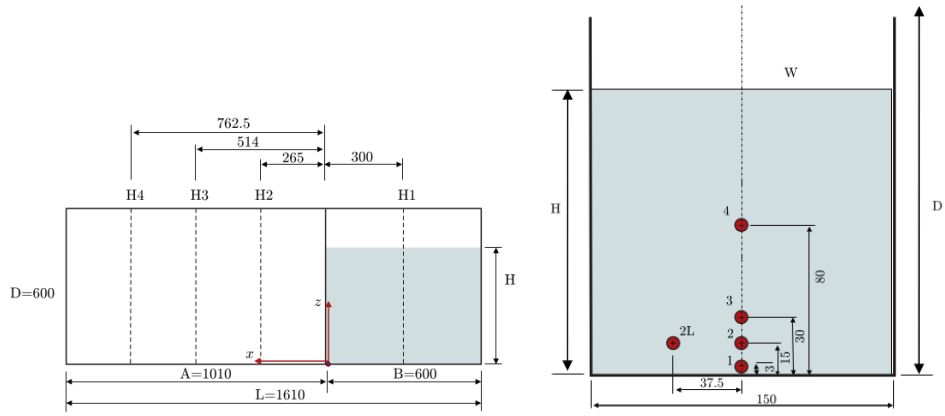


Figure 9.14 – Numérique.

Figure 9.15 – Expérience.

9.4.6 Impact sur un mur par rupture de barrage

Ce cas d'application concerne l'impact d'une lame d'eau sur un mur. La lame est générée par une rupture de barrage sur fond sec. Il existe une littérature assez abondante sur la modélisation expérimentale de ce type de cas. On se base sur le travail de Lobovsky et al. [133] qui fournit des données très complètes notamment en terme de pression d'impact. Le dispositif expérimental est un bac muni d'une porte amovible permettant le lâché de barrage. Sur la paroi opposée au barrage, des capteurs de pression sont disposés. Le dispositif expérimental et le placement des capteurs de pression sont illustrés respectivement en figure 9.16(a) et 9.16(b).



(a) Dimensions données en mm.

(b) Position des capteurs de pression sur le mur de gauche.

FIGURE 9.16 – Schéma du dispositif expérimental. Images extraites de Lobovsky et al. [133].

Ce type d'impact peut être considéré comme représentatif de ce qui se passe généralement quand un tsunami finit par envahir une côte et impacte des structures. Les expériences effectuées par Lobovsky et al. [133] considère de l'eau pure mais il est possible, dans le cas de tsunami, d'avoir une certaine aération du milieu à cause de sa structure non parfaite et des objets qu'il rencontre. Nous allons dans les paragraphes qui suivent essayer dans un premier temps de reproduire les résultats de l'expérience, puis dans un second temps, considérer que la lame est un milieu aéré.

Avant cela, il convient de préciser qu'obtenir des données expérimentales reproductibles dans ce type de cas est une tâche compliquée pour les expérimentateurs. On illustre en figure 9.17 les mesures de pressions obtenues au niveau du capteur 1 pour 100 essais avec une hauteur d'eau initiale $H = 300mm$. Dans tous ces cas, la seule certitude est la constance de l'énergie potentielle disponible avant le laché du barrage. Ensuite certains processus, comme l'ouverture de la porte, peuvent varier même très finement et induire à la fin une pression d'impact assez différente. Ce point implique donc des difficultés d'analyse des résultats expérimentaux dont peut s'affranchir une simulation numérique. Pour les comparaisons avec nos résultats numériques, nous sélectionnons les résultats de mesures médians pour tous les capteurs considérés.

Dans tous les essais numériques présentés ci-dessous, ce cas est supposé parfaitement 2D et la hauteur d'eau au repos considérée est $H = 300mm$. Le modèle MR est résolu. Pour les cas purs, comme les pressions d'impact expérimentales sont mesurées, on considère les lois d'état linéarisées. Dans les cas aérés, les deux types de lois (linéarisées et isentropiques) ont été testées mais donnent, là aussi, les mêmes résultats. Le limiteur Minmod est utilisé. La méthode AMR est utilisée avec des cellules carrées variants entre 80 et 1.25 mm pour le maillage le plus fin employé. Les variables présentées sont adimensionnées : $\tilde{P} = \dfrac{P}{\rho g H}$ et $\tilde{t} = t(g/H)^{0.5}$.

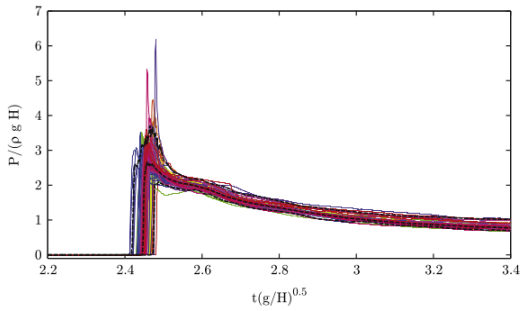
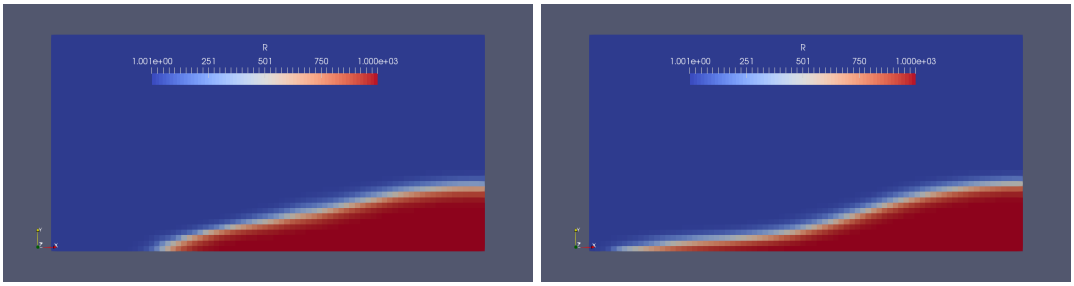


FIGURE 9.17 – Variabilité des mesures de pression obtenues pour une même expérience. Images extraites de Lobovsky et al. [133]. Les mesures médianes correspondent à la courbe noires au centre des mesures.

9.4.6.1 Cas de phase pures

On se concentre pour commencer sur le cas correspondant exactement à l'expérience où l'eau est pure. Dans ce cas, on s'attend à ce que la compressibilité des fluides ne soit pas ou quasiment pas sollicitée. On décide donc d'abaisser la vitesse du son de chaque phase pour réduire les temps de calcul. On rappelle que ces vitesses ne doivent pas être trop abaissées sous peine de générer des effets compressibles artificiels.

Avant de présenter des résultats fins, on illustre l'intérêt d'utiliser un schéma préconditionné pour tous les régimes en comparant sur un maillage grossier les premiers instants de la rupture de barrage avec le schéma "Tous Mach limité" proposé dans le chapitre 6 et le schéma de base sans correction "Tous Mach" (*i.e.* HLLC standard). Le maillage est ici uniforme avec $\triangle x = \triangle y = 2cm$ et les vitesses acoustiques sont fixées à $150m/s$. Les résultats sans préconditionnement sont en retard sur ceux obtenus avec le solveur corrigé. Plus on augmente la vitesse des ondes, plus ce phénomème est marqué avec une très faible sensibilité pour le solveur corrigé, à l'inverse du solveur non corrigé pour lequel la lame d'eau est de moins en moins avancée contrairement à la réalité.

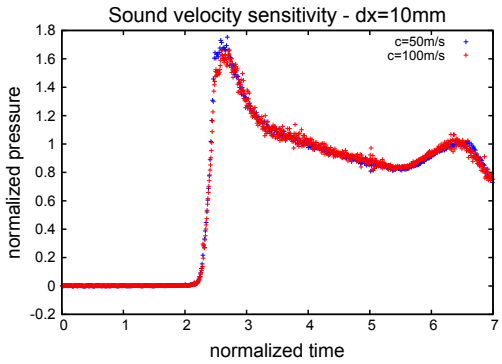


(a) Sans préconditionnement "Tous Mach". (b) Avec préconditionnement "Tous Mach".

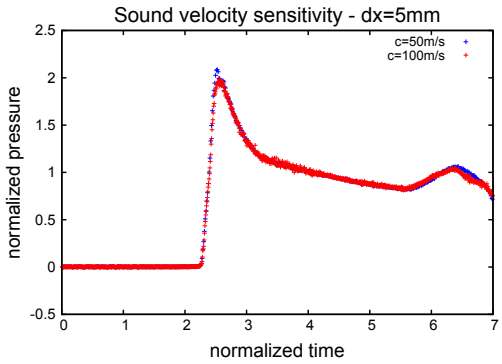
FIGURE 9.18 – Comparaison qualitative à $t = 0.375s$ entre la simulation utilisant le schéma "Tous Mach limité" et la simulation avec le solveur de base (*i.e.* sans préconditionnement).

Comme pour tous les cas tests présentés jusqu'à maintenant, le solveur "Tous Mach limité" est utilisé. On effectue deux types de calculs : l'un avec des vitesses acoustiques à $50m/s$ et l'autre avec des vitesses de $100m/s$. Pour ces deux types de simulations, des maillages de plus en plus fins sont utilisés avec des cellules minimales telles que $\triangle x = \triangle y = 10mm$ pour le plus grossier et $\triangle x = \triangle y = 1.25mm$ pour le plus fin. Grâce à la méthode AMR, les cellules loin des zones d'intérêt sont beaucoup plus grossières ($8cm$). On illustre pour commencer la sensibilité des résultats aux vitesses acoustiques pour différents maillages. Les figures

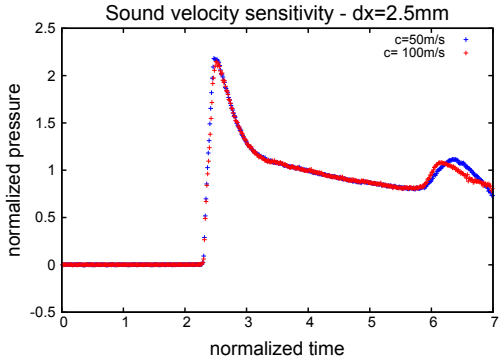
9.19(a), 9.19(b) et 9.19(c) montrent respectivement les résultats associés aux maillages avec les cellules de taille minimum telles que $\triangle x_{min} = 10mm$, $\triangle x_{min} = 5mm$ et $\triangle x_{min} = 2.5mm$. On observe que les résultats ne dépendent quasiment pas du choix des vitesses acoustiques. Ceci confirme que cet écoulement peut être considéré comme incompressible et que le schéma Tous Mach limité est performant.



(a) Maillage $\triangle x_{min} = 10mm$.



(b) Maillage $\triangle x_{min} = 5mm$.

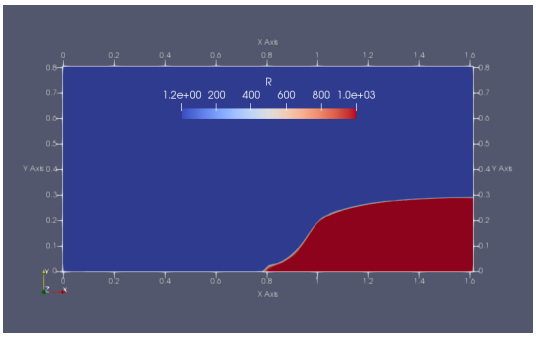


(c) Maillage $\triangle x_{min} = 2.5mm$.

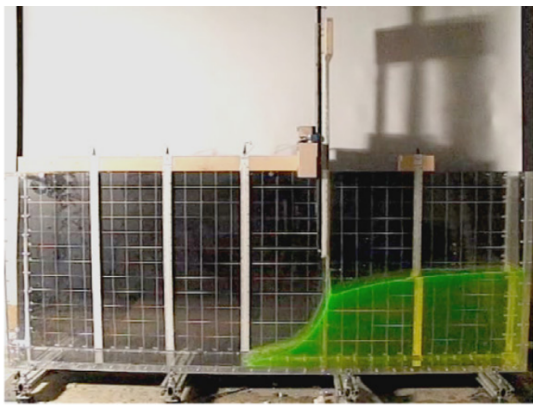
FIGURE 9.19 – Sensibilité des résultats aux vitesses acoustiques artificielles sélectionnées pour différents maillages sur le capteur de pression 1.

Comme les résultats sont quasi insensibles à ces vitesses artificielles, on se concentre sur le cas avec $c_g = c_l = 50m/s$. Avant de comparer ces résultats aux valeurs mesurées par Lobovsky et al. [133], on présente une comparaison qualitative de la dynamique de l'écoulement avec l'expérience en figures 9.20 et 9.21. Le maillage associé à ce calcul contient des cellules variants entre $\triangle x = \triangle y = 1.25mm$ et $8cm$. Les résultats sont très satisfaisants.

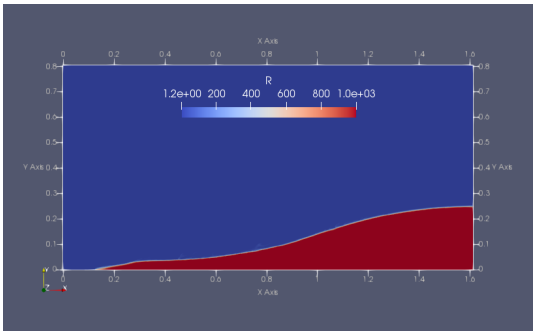
La figure 9.22 illustre la convergence en maillage sur les capteurs de pression 1 et 3 ainsi qu'une comparaison avec les mesures expérimentales. On voit que, même avec le maillage le plus fin ($\triangle x_{min} = 1.25mm$), il est assez délicat de statuer sur la convergence totale en maillage des résultats pour le capteur 1. Cependant les variations sont relativement mesurées et les résultats au capteur 2 semblent, à l'inverse, bien convergés. En conséquence, il serait utile de travailler sur des schémas d'ordres plus élevés pour accélérer et rendre accessible la convergence, en des temps de calculs raisonnables. Globalement la dynamique des pics de pression est relativement bien prédite mais la redescente n'est pas bien captée.



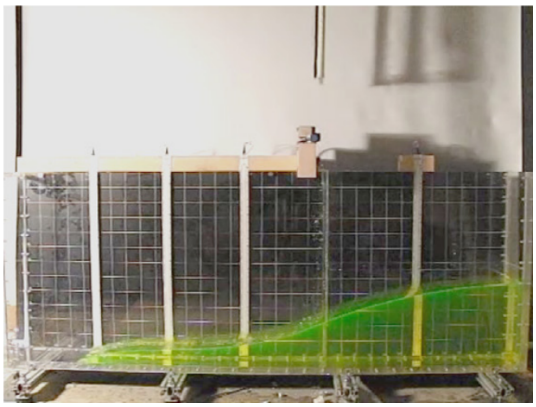
(a) Numérique.



(b) Expérience.

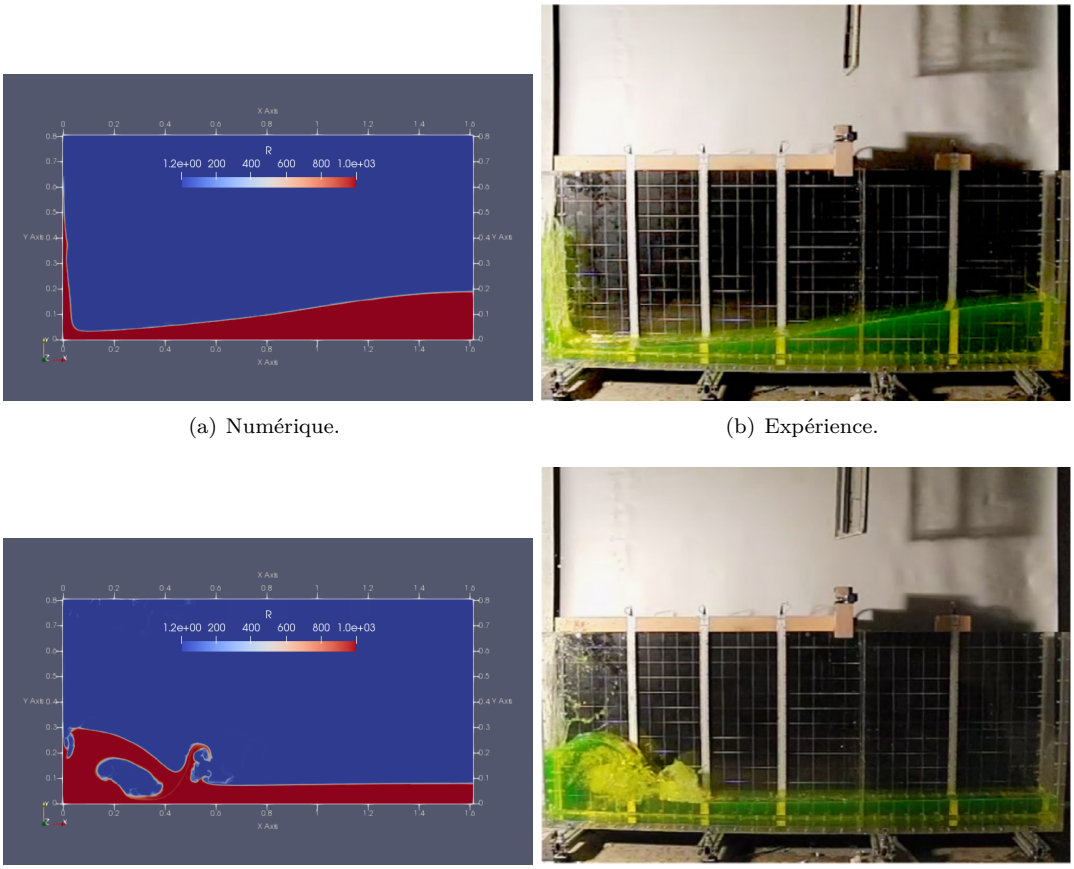


(c) Numérique.



(d) Expérience.

FIGURE 9.20 – Comparaison qualitative entre la simulation avec modèle MR et l'expérience. Les temps correspondent approximativement à $t = \{160, 373\}ms$.



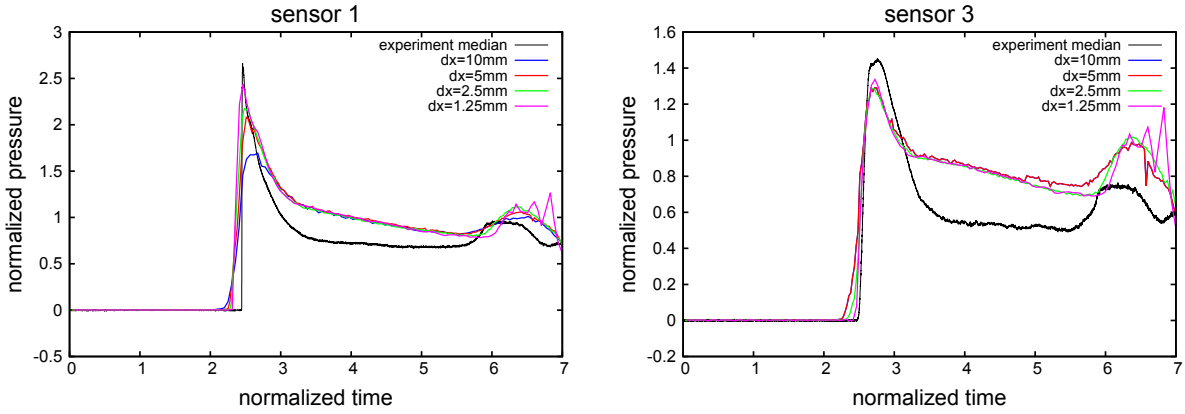
(a) Numérique.

(b) Expérience.

(c) Numérique.

(d) Expérience.

FIGURE 9.21 – Comparaison qualitative entre la simulation avec modèle MR et l'expérience. Les temps correspondent approximativement à $t = \{573, 1166\}ms$.



(a) Capteur 1.

(b) Capteur 3.

FIGURE 9.22 – Convergence en maillage et comparaison avec les mesures expérimentales pour la simulation avec $c_g = c_l = 50m/s$.

9.4.6.2 Cas d'un mélange

Même si nous ne disposons d'aucune mesure d'impact de ce type avec un milieu aéré, les résultats précédents peuvent servir de référence pour essayer de comprendre l'effet de l'aération. Un des avantages par rapport à l'étude de l'impact d'un rouleau (déferlante) est que, comme la géométrie de la lame à l'impact est plus simple, on peut plus facilement se focaliser sur l'analyse de l'effet du mélange. Néanmoins, si ce type de lame peut sans doute être légèrement aérée lors de l'entrée d'un tsunami sur un rivage, elle le sera moins qu'une déferlante. Comme l'idée de ce paragraphe est d'analyser l'impact de mélanges, on remplace l'eau pure du barrage par deux mélanges possibles : une fraction volumique d'air $\alpha = 0.1$ et un second cas avec $\alpha = 0.3$. Ces valeurs sont cohérentes avec les mesures de Mori et al. [163] et [162] (*cf.* chapitre 1 pour plus de détails) pour une déferlante.

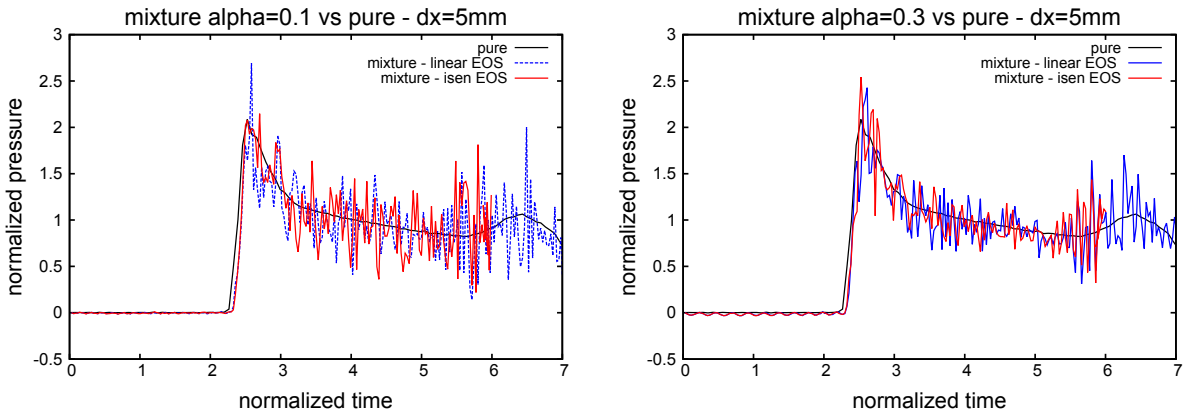
Comme nous utilisons un schéma en temps explicite, ces calculs sont coûteux. On se restreint donc à un maillage intermédiaire donnant déjà de bons résultats dans le cas pur précédent. Les plus petites cellules font $\triangle x = \triangle y = 5mm$. Le calcul effectué sur le même maillage en phase pure présenté précédemment sert de référence. Pour ce calcul, nous avions utilisé $c_g = c_l = 50m/s$ et montré que ce choix était valide. Dans le cas des mélanges, comme les effets compressibles sont faciles à solliciter ($c_{melange} = c_{Wood} \leq c_{pure}$), il faut considérer les vraies vitesses acoustiques sous peine d'exagérer les effets compressibles réels. On teste aussi les deux types de lois d'état considérées de cette thèse : les lois barotropes linéarisées et les lois isentropiques.

Les figures 9.23(a) et 9.23(b) présentent les profils de pressions au niveau du capteur 1 pour le cas pur et les cas avec mélanges, avec d'une part $\alpha = 0.1$ et d'autre part $\alpha = 0.3$. Ces résultats montrent que prendre les vraies vitesses acoustiques induit des oscillations numériques importantes. On a montré dans le chapitre 6 que le schéma "Tous Mach limité" proposé était moins sujet aux oscillations que les corrections de la littérature mais qu'il n'était pas, pour autant, exempt de ce problème. On rappelle qu'un des résultats du chapitre 6 est qu'il n'est *a priori*[1] pas possible d'obtenir un schéma de type Godunov explicite Tous Mach et TVD. Précisons que nous parlons de schémas TVD simplement en 1D. Il n'est donc, en soit, pas surprenant d'obtenir ces oscillations même s'il est difficile de trouver l'origine de ce problème. Le fait de considérer un mélange n'a rien à voir avec cette difficulté. Si on avait effectué le calcul avec les phases pures et les vraies vitesses acoustiques, nous aurions rencontré le même problème. Évidemment sans préconditionnement la diffusion est telle que les oscillations sont moins présentes mais les résultats sont désastreux. Dans le cas 2D, Leveque a montré que les schémas de type Godunov (*i.e.* sans préconditionnement) ne sont pas TVD (*cf.* [128]). Néanmoins en pratique, dans leur régime de prédilection, ces schémas donnent tout de même des bons résultats en multi-D. Dans le chapitre 6 on a estimé les variations totales d'un schéma préconditionné Tous Mach en 1D pour essayer de réduire les oscillations. Il serait semble t-il intéressant de reprendre le raisonnement en 2D pour voir ce que l'on obtiendrait. Compte tenu de nos résultats numériques ici, il y a fort à parier que la borne des variations totales "explose" dans ce cas...

En toute rigueur, il faut s'arrêter ici dans l'analyse compte tenu de ces oscillations numériques. Notons cependant que la dynamique de la rupture de barrage et de l'impact est très similaire au cas considérant les phases pures (calculs avec (c_l, c_g) réduits), ce qui montre que les oscillations observées ne sont pas catastrophiques pour observer le mouvement moyen de l'écoulement. En moyenne, plus le milieux est aéré, plus l'impact est réduit (les figures présentées utilisent en ordonné une pression adimensionnée par l'énergie potentielle initiale ce qui explique les niveaux similaires affichés). Les deux types de lois d'état donnent des résultats similaires.

Pour finir, on présente une comparaison de la force exercée sur le mur. Notons que dans la littérature, c'est souvent la pression qui est considérée. Nous imaginons que cela vient du fait que c'est une variable "plus facile" à mesurer que la force totale sur une structure. Cependant, si on considère la résistance d'un mur ou d'une digue face à un impact, la priorité est de savoir si la tenue est garantie. Dans ce cas, seule la force est importante, et éventuellement le moment si un basculement est possible. Il est donc instructif de

1. Plus précisément le résultat que l'on évoque n'a été démontré que pour un schéma de type Godunov particulier : celui de Lax-Friedrichs.



(a) Mélange air-eau avec $\alpha_a = 0.1$.

(b) Mélange air-eau avec $\alpha_a = 0.3$.

FIGURE 9.23 – Profils de pression au niveau du capteur 1 pour l'impact en phase pure (incompressible), et compressible pour les deux mélanges à 10 et 30% d'air dans l'eau (repectivement à gauche et à droite).

regarder ce que donne le profil de force en fonction du temps lors de l'impact. Ces profils pour les phases pures et aérées sont présentés en figure 9.24. De la même manière que pour les pressions d'impacts, les profils de forces indiquent une légère réduction de l'effort sur le mur pour les milieux aérés. Il est intéressant de voir que la force maximale est atteinte bien après le début de l'impact.

Ce cas test est instructif mais il est assez difficile de conclure fermement sur l'effet d'un milieu aéré compte tenu des difficultés numériques rencontrées. Il est clair que du travail reste à faire pour obtenir un solveur Tous Mach parfaitement fiable dans ces conditions. Le fait d'obtenir de très bons résultats sur des cas simples, comme nous l'avons montré au chapitre 6, n'est hélas pas gage de réussite dans tous les cas. Nous n'avons pas trouvé de travaux présentant des impacts avec une rupture de barrage résolu avec un modèle compressible avec ce type d'approche nommée "density-based". Certains travaux montrent simplement que la dynamique de l'écoulement est correcte, ce qui est notre cas aussi, mais ne présentent pas de profil de pression. Des travaux dans des conditions de résolutions similaires sont par contre présentés par Drui [61], dans le cas d'une bulle d'air qui remonte dans de l'eau. L'auteur observe aussi des oscillations numériques. Les difficultés générales pour choisir la bonne approche pour résoudre de tels problèmes sont évoquées dans Ma et al. [141]. Il semble que, d'un point de vue numérique, résoudre parfaitement un problème Tous Mach reste un sujet ouvert. Certaines approches, comme celle que nous avons investiguées, sont très robustes pour traiter des phénomènes violents comme les ondes de choc mais se retrouvent mises en difficulté à bas Mach et à l'inverse, les méthodes dites "pressure-based" sont réputées performantes à bas Mach, mais parfois inadaptées dans des cas violents.

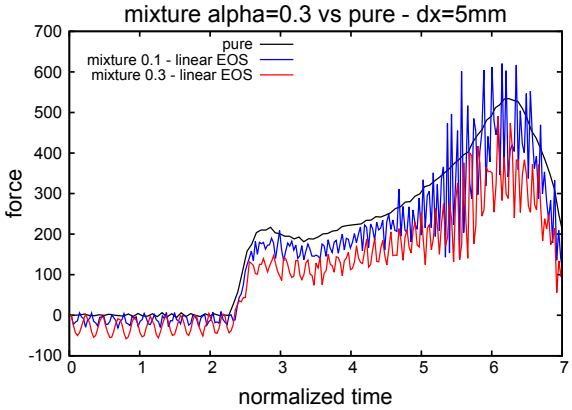


FIGURE 9.24 – Profils de force exercée sur le mur durant l'impact dans le cas "incompressible" en phase pure, et compressible pour les deux mélanges à 10 et 30% d'air dans l'eau.

9.4.7 Impact normal sur une plaque

Compte tenu des difficultés rencontrées dans le cas précédent, on propose d'étudier un problème plus simple où l'impact a lieu en temps beaucoup plus court. Ceci semble important pour ne pas laisser se développer les "fluctuations numérique Bas Mach", lorsqu'on doit considérer les vraies vitesses du son. Ce cas est basé sur les travaux de Ma et al. [143]. Le cas test consiste à faire impacter une plaque sur une surface libre. Ma et al. ont simulé ce problème avec le modèle évolué de Kapila et présente dans leur papier une série d'expériences avec des impacts sur un milieu d'eau pure et un milieu aéré. Ce cas est donc très intéressant pour comprendre l'effet d'un milieu aéré lors d'un impact. On considère l'essai où la plaque impacte la surface libre à $5.5m/s$. Cette vitesse est représentative de celle d'une déferlante. Ce type d'impact "parfait" est cependant peu probable dans le monde des vagues, mais est instructif. La figure 9.25 présente l'expérience numérique. L'eau en bas du domaine va impacter la plaque à $5.5m/s$. Dans la réalité l'expérience est évidemment 3D mais le problème peut être, en première approximation, simplifié par symétrie. La plaque est épaisse de $12cm$ et sa demi largeur représentée est de $12.5cm$. Les deux sondes de pression considérées (S1 et S2) sont placées sur la face de la plaque impactée en $x_{S1} = 0m$ et $x_{S2} = 0.11m$. Les conditions aux limites sont imposées ouvertes en haut et en bas du domaine et en mur sur les limites latérales. Comme nous ne pouvons pas faire bouger de solide dans notre code de calcul, on choisit de se placer dans le référentiel de la plaque en imposant à l'eau de venir impacter la plaque. Cette approche est utilisée par Ma et al. [143] et est valable en temps court.

Compte tenu du coût de calcul avec un schéma explicite en temps nous n'avons pas effectué d'étude de convergence en maillage. Le maillage est tel que $\triangle x = 2\triangle y = 5mm$ partout, sauf en $(x, y) \in [0, 0.22] \cdot [0, 0.22]m^2$ où $\triangle x = 2\triangle y = 2.5mm$. Les résultats présentés sont donc à analyser qualitativement.

Pour ce cas test, comme les pressions attendues sont élevées, les lois d'états isentropiques ont été considérées. Les figures 9.26(a) et 9.26(b) présentent les profils de pressions au niveau des capteurs $S1$ et $S2$ pour un impact en eau pure, un mélange air-eau avec $\alpha_{air} = 0.05$ et un autre avec $\alpha_{air} = 0.15$.

Plus l'aération est élevée, moins le pic de pression atteint est élevé mais plus l'impact dure longtemps. Ceci est en accord avec la littérature sur le sujet (*cf.* par exemple Bullock et al. [35] et Ma et al. [143]). On observe aussi, qu'après l'impact, une onde de détente intense est générée et fait chuter la pression au niveau du capteur $S1$. Il est possible qu'une poche de cavitation se forme.

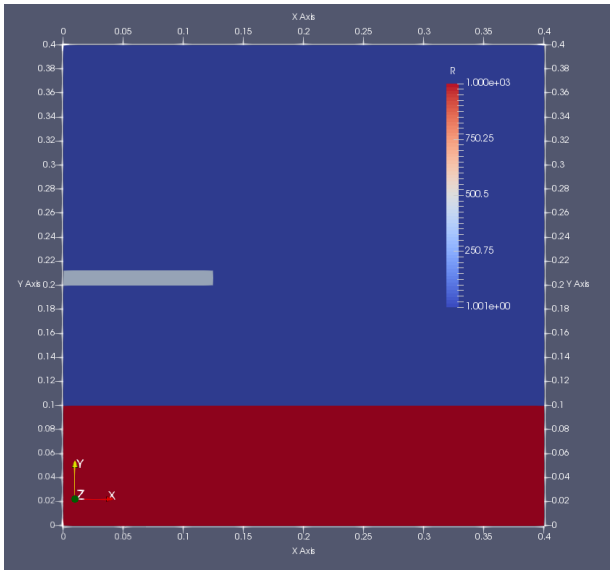
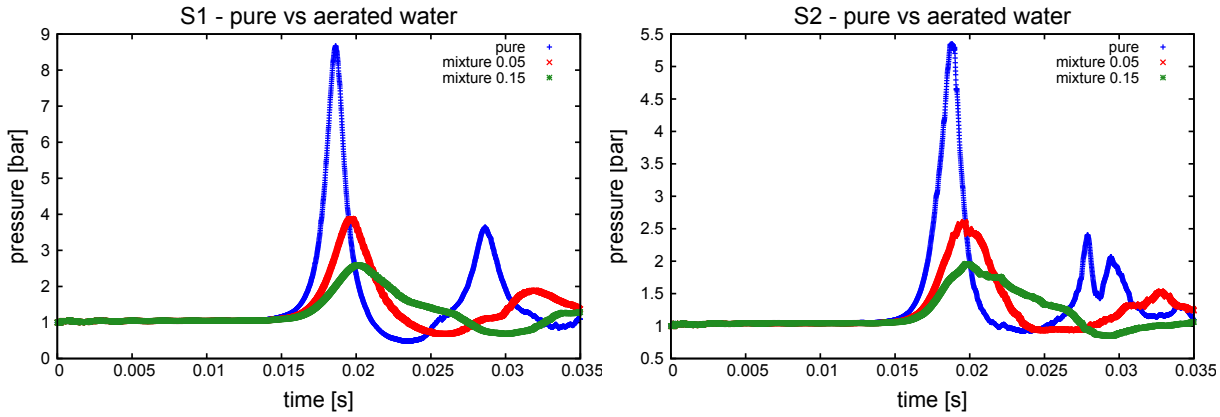


FIGURE 9.25 – Configuration du cas test d'impact sur une plaque plane.



(a) Capteur $S1$.

(b) Capteur $S1$.

FIGURE 9.26 – Profils de pression au niveau des capteurs $S1$ et $S2$ pour l'impact en phase pure et pour les deux mélanges à 5 et 15% d'air dans l'eau.

9.5 Bilan

Ce chapitre a permis, dans un premier temps, d'étudier la différence de comportement entre la résolution du modèle diphasique isentropique à l'équilibre (ME) et le modèle à relaxation (MR). On a vu que le modèle MR tend bien vers le modèle ME. On a également vu qu'avec les mêmes schémas de résolution, la discrétisation du modèle MR est plus robuste et permet de passer des cas où la discrétisation du modèle ME échoue. Ce résultat est cohérent avec Saurel et al. [197]. Le modèle MR a donc été finalement retenu pour poursuivre les applications numériques. On a pu vérifier qu'il est capable de prévoir la propagation d'onde de choc et de détente dans des milieux aérés et dans des milieux purs, mais aussi, dans certaines conditions de traiter, avec un solveur adéquat, des écoulements quasi incompressibles.
Il est aussi possible de modéliser des écoulements incompressibles en des temps très acceptables, grâce au schéma "Tous Mach limité" proposé dans le chapitre 6 et à la relaxation des vitesses acoustiques. Nous rappelons que cette réduction artificielle du nombre de Mach est très intéressante, mais à manier avec précaution. En l'occurrence, seule la preuve que les résultats ne dépendent de ce choix numérique ou que la densité dans le domaine de calcul admet des variations négligeables, est un gage de confiance.
Cependant les bons résultats obtenus avec le schéma Tous Mach n'ont pas été confirmés par le cas test de rupture de barrage. Pour ce cas, le fait de considérer les vraies vitesses acoustiques de l'air et de l'eau implique l'observation d'oscillations numériques. Ceci est cohérent avec les résultats numériques de Drui [61]. Le schéma "Tous Mach" validé dans des conditions similaires en terme de nombre de Mach au chapitre 6 trouve donc ses limites sur des cas plus délicats. Notons que si ce schéma corrigé n'est pas employé, les oscillations sont réduites, mais évidemment les résultats sont catastrophiques.
En l'état on peut cependant tout de même effectuer des calculs d'écoulements compressibles à tout régime avec le schéma proposé (qui induit moins d'oscillations que les schémas préconditionnés classiques) mais suivant les cas, il faut s'attendre à observer des oscillations numériques. Un travail reste donc à être effectué pour essayer de comprendre et amortir ces effets parasites.
Les résultats obtenus en termes d'impact indiquent que l'aération d'un milieu à tendance à réduire le pic de pression maximale, mais que la durée de l'impact augmente, ce qui est conforme à la littérature sur le sujet (*cf.* par exemple Bullock et al. [35]). Des analyses de forces dans différentes conditions seraient intéressantes car une réduction locale de pression n'implique pas nécessairement un effort global réduit.

Chapitre 10

Couplage de modèles hétérogènes

Sommaire

10.1 Introduction **214**
10.2 Revue des couplages **214**
10.2.1 Couplage à un sens 215
10.2.2 Couplage à deux sens 216
10.3 Une méthode de couplage totalement explicite **217**
10.4 Application **218**
10.4.1 Opérateur de couplage à l'interface 218
10.4.1.1 Dérivation 218
10.4.1.2 Consistance des variables à l'interface 219
10.4.2 Cas tests 222
10.5 Bilan **226**

Le but de ce chapitre est d'étudier le couplage de modèles. Après une revue des méthodes employées dans la littérature, un approche simple est proposée puis validée en considérant le couplage entre un modèle en couche mince et un modèle diphasique.

10.1 Introduction

Beaucoup de phénomènes impliquent une multitude de processus physiques. Pour modéliser cela avec précision il faut, *a priori*, considérer un modèle capable de bien représenter toute la physique importante sur l'ensemble du domaine. Cependant, il arrive que localement certains processus soient négligeables. Il est alors inutile de bien les prédire dans ces zones. Une solution possible, pour éviter d'utiliser un modèle trop élaboré localement, est de considérer plusieurs modèles chacun dans leurs zones d'intérêts. Pour résoudre le problème dans son ensemble, il faut coupler les modèles de chaque zone, comme si un seul modèle était résolu. On parle alors de couplage de modèle. Le but de ce chapitre est d'investiguer cette voie dans le cadre des tsunamis avec un modèle adapté à sa phase de propagation sur de grandes échelles et un modèle capable de prévoir finement des impacts sur des structures.

Comme on l'a vu dans le chapitre 1, les tsunamis ont une vie qui peut se décomposer en trois étapes relativement distinctes : la génération, la propagation et l'impact et/ou l'inondation. La propagation loin des côtes peut être modélisée avec des modèles de type eau peu profonde, comme le modèle de SV ou celui de SGN. La partie impact, à laquelle on peut associer un éventuel déferlement antérieur, demande des modèles plus élaborés pour être représentée avec précision. Dans un cadre général, il faut considérer un modèle bifluide compressible. Pour simplifier la résolution des milieux aérés, on peut les considérer comme des mélanges et alors considérer un modèle diphasique compressible. A l'inverse, s'il n'y a pas de mélange et que les impacts sont suffisamment "faibles", un modèle bifluide incompressible est un bon choix.

Dans tous les cas, il faut *a minima* que les modèles considérés localement soient compatibles en zone de raccord. Nous allons considérer dans ce travail le couplage entre un modèle de type eau peu profonde 1DV ou 2DV (SV ou SGN par exemple) et un modèle biphase (ou bifluide) 2D ou 3D. En première partie, une revue des méthodes de couplage est donnée, puis la méthode employée sera présentée. On finira par quelques exemples d'application pour illustrer l'utilité mais aussi la difficulté de telles approches.

10.2 Revue des couplages

Avant de faire un inventaire des méthodes les plus connues de la littérature sur le sujet, il convient de bien définir un problème de couplage. Considérons que l'on résout un problème global sur un domaine décomposable en deux sous domaines Ω_{reg} et Ω_{ext}, à la physique différente. On note $L_{reg}u_{reg} = f_{reg}$ le modèle que l'on souhaite appliquer dans la zone "régionale" Ω_{reg} et $L_{ext}u_{ext} = f_{ext}$ le modèle adapté à l'autre zone. Il n'y a *a priori* pas de raison particulière pour que le modèle "extérieur" soit acceptable dans la zone "régionale". Les deux domaines ne doivent donc par se recouvrir mais seulement partager une interface que l'on note dans la suite Γ. Avec ces notations le problème de couplage s'écrit :

Algorithme 4 Formulation du problème de couplage dans $[0, t_{max}]$

$t = 0$
while $t < t_{max}$ **do**
  Solve $L_{ext}u_{ext} = f_{ext}$ in Ω_{ext} **and** $L_{reg}u_{reg} = f_{reg}$ in Ω_{reg}
  Under the constraint $u_{reg} = u_{ext}$ on Γ
  $t = t + dt$
end while

Le modèle externe peut différer aussi bien en terme de dimension que physiquement du modèle régional, ce qui fait que leurs variables respectives ne sont pas directement compatibles. La contrainte $u_{reg} = u_{ext}$

est donc en fait $A_{reg}u_{reg} = u_{ext}$, avec A_{reg} un opérateur bien choisi permettant la conversion. Par exemple, quand seules les dimensions diffèrent, l'opérateur consiste à moyenner les valeurs des variables de dimension supérieure pour obtenir leur traduction en dimension inférieure.

10.2.1 Couplage à un sens

La manière la plus simple de coupler des modèles est de considérer qu'un seul modèle peut fournir des conditions d'entrée pour un autre (par exemple prenons L_{ext} qui alimente L_{reg}). On parle alors de couplage à un sens. Dans ce cas, un calcul est indépendant de l'autre. Si on est capable de parfaitement formuler des conditions aux limites ouvertes, on résout L_{ext} sur son domaine Ω_{ext}, puis on impose ce qu'il donne en limite partagée avec Ω_{reg}. Il faut donc aussi bien maîtriser les conditions d'entrées pour le modèle L_{reg}. Hélas en pratique, beaucoup de modèles ne permettent pas de bien poser ces conditions aux limites. Une approche de couplage avec seulement une interface en commun mène donc à des effets numériques indésirables. L'idée dans ce cas est de faire se recouvrir les domaines de sorte que les conditions aux limites agissent le moins possible sur le couplage. L'alimentation du modèle régional par le modèle externe est alors fait sur, non pas une interface, mais une partie du domaine de recouvrement. Le défaut direct de cette approche est que le modèle externe doit être juste dans une partie de la zone régionale et *vice versa* sous peine de propager des erreurs dans le modèle régional. Il faut donc en pratique effectuer le couplage loin de la fin de zone adéquate du modèle le plus élaboré ce qui réduit l'efficacité de cette approche. D'autre part, si certains phénomènes calculés dans la zone régionale venaient à sortir du domaine, ils n'alimenteraient pas le domaine externe ce qui, dans certains cas, peut être préjudiciable. L'avantage de cette méthode est qu'elle est simple à implémenter.

Un point sur lequel il faut faire attention est la différence de pas de temps entre les deux résolutions de modèles. Si une discrétisation donne de larges pas de temps, l'échantillonnage qui servira d'entrée pour l'autre modèle pourrait être insuffisant. Sur ce point, Cailleau et al. [37] ont montré que sur un cas de circulation océanique, l'utilisation d'une communication synchrone (*i.e.* les deux modèles sont résolus avec le même pas de temps) était préférable. Le lecteur peut se référer par exemple à Lovholt et al. [136], Lachaume et al. [117] et Kassiotis et al. [104] pour d'autres références sur le couplage à un sens. Ces travaux présentent respectivement un couplage 2DV entre le modèle de Boussinesq et celui de Saint-Venant dans le cadre de la modélisation de tsunamis, un couplage 2D d'un modèle potentiel et d'un modèle de Navier-Stokes à deux fluides appliqué à l'étude du déferlement de vague et un modèle 1DV de Bousinesq couplé à un modèle SPH monophasique.

La formulation de ce type de couplage est :

Algorithme 5 Formulation du problème de couplage à un sens avec recouvrement dans $[0, t_{max}]$

$t = 0$
while $t < t_{max}$ **do**
  Solve $L_{ext}u_{ext} = f_{ext}$ in $\Omega_{ext} \cup \Omega_{reg}$
  Then $L_{reg}u_{reg} = f_{reg}$ in Ω_{reg}
  Under the constraint $u_{reg} = u_{ext}$ on Γ
  $t = t + dt$
end while

Il est important de noter que, si une condition ouverte parfaite peut être imposée sur le modèle externe, le recouvrement n'est pas nécessaire. La résolution sera donc plus proche du problème initial (*cf.* Algorithme 4).

10.2.2 Couplage à deux sens

La deuxième catégorie de couplage considère la communication entre chaque domaine résolu. On parle de couplage à deux sens ou de couplage fort. Pour les mêmes raisons que pour le couplage à un sens, les domaines peuvent se chevaucher ou non. Les travaux portant sur ce type de couplage sont à notre connaissance toujours basés sur un recouvrement. Pour ce couplage, il faut satisfaire à l'interface de couplage $A_{reg}u_{reg} = u_{ext}$ à chaque pas de temps. Rigoureusement ceci n'est possible que si les modèles sont parfaitement compatibles (ou équivalents) en zone de couplage. On touche ici au point clef du couplage de modèle. Si l'intersection entre les domaines de couplage n'est pas toujours dans une zone où les modèles sont équivalents, il n'y a aucune chance de satisfaire la contrainte d'interface naturellement.
Comme en pratique cela est plutôt rare, des itérations sont effectuées en posant un problème global qui a pour contrainte $A_{reg}u_{reg} = u_{ext}$. Il nous semble qu'il existe une analogie forte avec la résolution d'équations avec des schémas implicites. Ces schémas impliquent la résolution d'un système linéaire multi-diagonal, qui fait qu'une variable en un point donné, dépend non seulement de ses voisines proches mais aussi de toutes les autres valeurs du domaine. Hors cas particulier, on ne sait pas inverser parfaitement le système et on a recours là aussi à des méthodes itératives pour trouver une bonne approximation des solutions du système. Hélas dans le cas du couplage de modèle la comparaison s'arrête là. En effet, si dans le cadre des schémas implicites (pour un modèle sur un domaine) on résout bien le problème initial en itérant, le fait d'itérer pour satisfaire une condition de couplage implique que l'on modifie la physique résolue dans chaque domaine de sorte de trouver un compromis. Le seul point rassurant là dedans est qu'on peut espérer que, pour des modèles relativement compatibles, ce compromis soit unique. Reste que s'il faut itérer, c'est que le problème de couplage est mal posé. Généralement la méthode itérative employée est celle de Schwarz :

Algorithme 6 Formulation de l'algorithme en temps global de Schwarz dans $[0, t_{max}]$ for two models

$t = 0$
while $t < t_{max}$ **do**
  while interface regularity is not reached **do**
    Solve $L_{reg}u_{reg}^{k+1} = f_{reg}$ in Ω_{reg}
    Under the constraint $A_{reg}^1 u_{reg}^{k+1} = A_{ext}^1 u_{ext}^k$ on Γ
    And solve $L_{ext}u_{ext}^{k+1} = f_{ext}$ in Ω_{ext}
    Under the constraint $A_{ext}^2 u_{ext}^{k+1} = A_{reg}^2 u_{reg}^k$ on Γ
  end while
  $t = t + dt$
end while

D'un point de vue théorique sur ce type de méthode, Lions [132] a montré que le recouvrement n'est pas nécessaire pour converger, mais que la manière de traiter la limite agit fortement sur la convergence (*cf.* [214]). En pratique dans le monde du couplage, un recouvrement est utilisé semble t-il pour simplifier la formulation de cette méthode. Notons que l'utilisation de conditions ouvertes mène à une convergence optimale selon Tayachi et al. [214]. Ceci doit sans doute justifier d'autant plus l'utilisation de recouvrements lorsque ce type de condition ne peut être parfaitement posé. Dans le cas des systèmes hyperboliques ceci peut être fait relativement proprement lorsque le système n'est pas trop compliqué (*cf.* chapitre 5). Sans être exhaustif sur ce genre d'approche, le lecteur peut se référer par exemple à Martin et al., Blayo et al., ou encore Tayachi et al. [150, 28, 214]. On peut également citer le travail de Glimsdal et al. [77] qui a étudié l'effet de la taille de la zone de recouvrement dans le cadre d'un couplage 1DV Boussinesq et Saint-Venant.

Finalement, il existe une dernière classe de méthode de couplage que l'on peut qualifier d'ad-hoc (*cf.* Lemarié [124]). Généralement, à chaque pas de temps la compatibilité requise à l'interface est "assurée" par une sorte de lissage ou prédiction "correction". Pour citer quelques exemples, Colicchio et al. [44] couplent un modèle potentiel avec un modèle bifluide dans un contexte d'étude d'écoulement à fragmentation d'interface. Dans le contexte des vagues longues déferlantes, Pringle et al. et Sitanggang et al. [183, 203] couplent un modèle de Boussinesq avec un modèle bifluide, avec une modélisation de la turbulence par une approche

RANS. Pour finir, un couplage entre le modèle de Boussinesq et le modèle de Saint-Venant est effectué dans Son et al. [205].

La plupart des méthodes présentées précédemment sont prometteuses et permettent de traiter des problèmes inaccessibles avec un seul modèle. Cependant, comme il est difficile d'assurer qu'on résout parfaitement le problème initial, un minimum de prudence dans l'analyse des résultats est de mise. Par ailleurs, les méthodes itératives sont généralement assez coûteuses. On décide donc dans la suite de suivre la voie d'un couplage explicite sans itération. Cette méthode sera valable si les solutions des modèles sont compatibles en zone de couplage, mais sans doute moins robuste que les méthodes itératives, si ce n'est pas le cas. Rappelons que cette notion de robustesse est tout de même à pondérer car, comme on l'a vu précédemment, itérer n'assure pas la convergence vers la solution du problème de couplage "parfait", mais simplement de trouver une solution "compromis".

10.3 Une méthode de couplage totalement explicite

Par simplicité, nous allons raisonner en 1D mais l'extension en multi dimensions est relativement directe. On suppose que les deux modèles couplés partagent seulement une interface notée $\Gamma = \Omega_{ext} \cap \Omega_{reg}$. Chaque modèle est résolu sur son domaine avec un schéma explicite. Le point clef est de se dire que l'interface entre les domaines n'a pas de réalité physique, dès lors que les modèles sont parfaitement compatibles sur cette interface. On peut, sous cette hypothèse, créer des cellules fictives en bord de chaque domaines exactement comme si on résolvait un unique modèle sur plusieurs sous domaines. La communication entre les domaines peut être effectuée seulement à chaque pas de temps, si le pas de temps de résolution choisi satisfait une condition CFL qui stipule qu'aucune information ne peut modifier une interface (plus précisément les flux à l'interface) au cours d'un pas. Les cellules fictives de raccord de domaine contiennent les variables internes de la première cellule du domaine voisin. A chaque pas de temps, on échange à nouveau ces variables. Ce principe est illustré en figure 10.1.

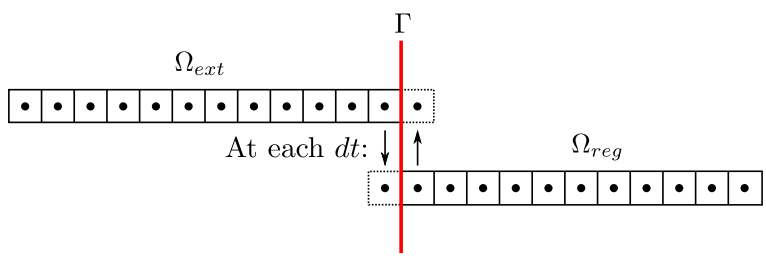


FIGURE 10.1 – Couplage explicite grâce à des cellules fantômes.

L'algorithme de couplage s'écrit :

Algorithme 7 Couplage totalement explicite dans $[0, t_{max}]$ pour deux modèles

$t = 0$
while $t < t_{max}$ **do**
  Solve $L_{reg} u^n_{reg} = f_{reg}$ in Ω_{reg}
  And solve $L_{ext} u^n_{ext} = f_{ext}$ in Ω_{ext}
  Send / Receive ghost cells value $u^{n+1}_{ghost-\Omega_{reg}} = u^{n+1}_{\Gamma^{ext}}$ and $u^{n+1}_{ghost-\Omega_{ext}} = u^{n+1}_{\Gamma^{reg}}$
  $t = t + dt$
end while

Évidemment la communication entre les deux domaines induit des transformations pour traduire les variables d'un modèle dans le langage de l'autre. Ceci est donc dépendant des modèles couplés.

10.4 Application

En première approche, on propose de coupler le modèle de propagation d'onde longue formulé par Saint-Venant avec le modèle biphase à relaxation étudié précédemment. On rappelle ces modèles ci dessous.

Modèle de Saint-Venant en 1D :

$$h_t + (hu)_x = 0$$
$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{gh^2}{2})_x + ghb_x = 0$$

Avec h, b et u respectivement la hauteur d'eau, la position de la bathymétrie et la vitesse horizontale.

Modèle isentropique à relaxation en multi-D :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + U \cdot grad(\alpha_1) = \frac{P_1 - P_2}{\mu}$$
$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + div(\alpha_1 \rho_1 U) = 0$$
$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + div(\alpha_2 \rho_2 U) = 0$$
$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + div(\rho U \otimes U + P\overline{\overline{I}}) = \rho \overrightarrow{g}$$

Avec α_k la fraction volumique, ρ_k la masse volumique, U le vecteur vitesse, P_k la pression de la phase k et P la pression de "mélange", telle que $P_g = P_l$. On prend par exemple les lois d'états barotropes linéarisées.

$$P_l - P^{ref} = c_l^2(\rho_l - \rho_l^{ref}) \qquad P_g - P^{ref} = c_g^2(\rho_g - \rho_g^{ref})$$

10.4.1 Opérateur de couplage à l'interface

Pour définir les opérateurs de couplage, ou opérateur d'équivalence entre les modèles, il faut réduire le modèle le plus général, ici un modèle d'Euler diphasique, vers le modèle le plus simple, ici le modèle de Saint-Venant. Chaque hypothèse effectuée pour cette dérivation nous servira ensuite à bien définir les opérateurs afin d'être consistant à l'interface de couplage.

10.4.1.1 Dérivation

Le modèle diphasique est réduit à un seul fluide ($\alpha = 0$), qui est supposé incompressible. Comme on l'a vu dans le chapitre 6, la contrainte d'incompressibilité peut être montrée formellement en adimensionnant les équations et en faisant tendre le nombre de Mach vers 0. On se place en 2D afin d'alléger les équations (l'extension 3D étant sans difficulté particulière). On suppose également que le fluide est irrotationnel. On obtient alors les équations d'Euler monophasique en écoulement incompressible et irrotationnel :

$$u_x + w_z = 0$$
$$u_t + uu_x + wu_z = -\frac{1}{\rho}P_x$$
$$w_t + uw_x + ww_z = -\frac{1}{\rho}P_z - g$$
$$u_z - w_x = 0$$

Il reste à poser des conditions aux limites, adimensionner les variables pour faire apparaître les paramètres représentatifs d'une onde longue, supposer que le paramètre $\sigma = \frac{h_0}{\lambda}$ est petit devant 1 et intégrer sur la

verticale. On retrouve alors le système de Saint-Venant. Cette dérivation a été effectuée au chapitre 2 et n'est donc pas réitérée ici. Les implications de cette dérivation sur les variables sont :

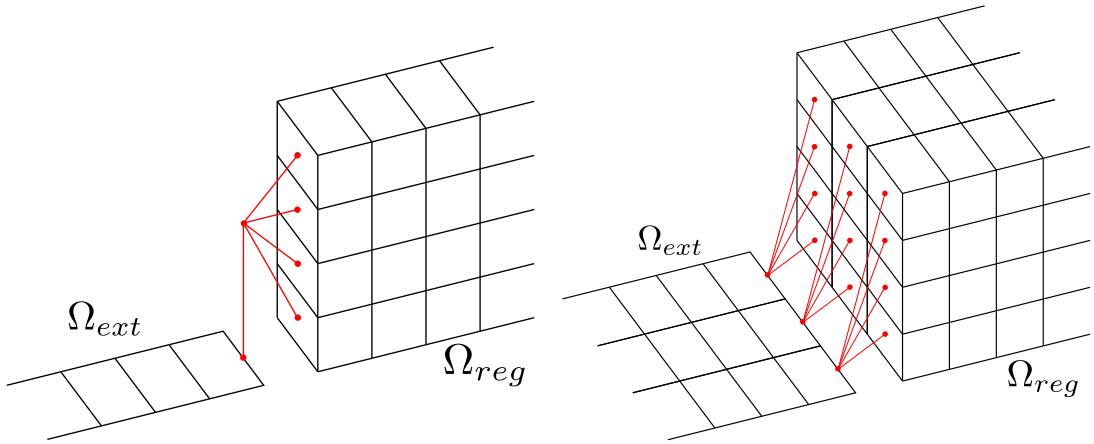
$$u = \overline{u} \tag{10.4.1}$$

$$w = -\big(\overline{u}(z-b)\big)_x \tag{10.4.2}$$

$$P = \rho g(\eta - z) \tag{10.4.3}$$

10.4.1.2 Consistance des variables à l'interface

Afin d'exprimer la consistance des variables en zone de couplage, on se place sur l'interface Γ. Sauf indication contraire, les variables sont donc exprimées sur Γ.



(a) Cas 1D - 2D. (b) Cas 2D - 3D.

FIGURE 10.2 – Lien entre domaines hétérogènes.

L'interface est supposée être placée dans une zone où le modèle minimum est valide, ou dit autrement, le modèle biphase (noté ici EU) se réduit au modèle de Saint-Venant. On a donc par hypothèse :

— Conservation de la masse :

$$h_{SV} = h_{EU}$$

— Conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} &\iff \quad h_{SV}\overline{u}_{SV} = h_{EU}\overline{u}_{EU} \\ &\iff \quad \overline{u}_{SV} = \overline{u}_{EU} \end{aligned}$$

— Conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} &\Big(\rho g(\eta - z) + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho w^2}{2}\Big)_{SV} = \Big(\rho g(\eta - z) + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho w^2}{2}\Big)_{EU} \\ \iff \quad & w_{SV} = w_{EU} \end{aligned}$$

Soit évidemment :

$$\boxed{h_{SV} = h_{EU} \quad , \quad u_{SV} = u_{EU} = \overline{u} \quad , \quad w_{SV} = w_{EU}, \quad P_{SV} = P_{EU}}$$

Maintenant, il faut construire les projecteurs qui vont assurer cette consistance lors des communications entre les modèles. Les projecteurs traduisent les variables d'un modèle vers un autre. Les communications entre les modèles se font par le biais de cellules fantômes (*cf.* figures 10.3(a), 10.3(b) et 10.3(c)). Il est important de noter que comme nous utilisons un modèle biphase compressible d'un côté de l 'interface, nous n'aurons en pratique jamais $\rho = cste$, mais seulement $\rho \approx cste$. Il y a donc deux choix possibles pour les opérateurs de projections. Le premier est de se baser sur le modèle de SV : on impose $\rho = cste$ et une pression hydrostatique incompressible lors des projections des cellules SV vers les cellules fictives EU. Le second choix est d'imposer une pression hydrostatique au sens compressible et d'en déduire le profil de masse volumique associée :

$$c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g$$
$$\Longrightarrow \rho = \rho_{ref} e^{\frac{-g(z-z_{ref})}{c_0^2}} \text{ (avec la loi d'état barotrope linéarisée, } z_{ref} \text{ le niveau de surface libre).}$$

Ces deux approches sont similaires lorsque $c_0 >> 1$. Comme on étudie des ondes d'eau, on a évidemment $\rho \approx \rho_w$ et $\alpha \approx 0$. Nous avons choisi la seconde solution, mais ceci est arbitraire et sans incidence. On a finalement :

$$\begin{aligned}
&\underline{P_{SV-to-EU}} : \\
&\rho(z<\eta)_{EU} = \rho_w e^{\frac{-g(z-z_{ref})}{c_0^2}} \\
&u(z<\eta)_{EU} = u_{SV} = \overline{u} \\
&w(z<\eta)_{EU} = w_{SV} = -\big(\overline{u}(z-b)\big)_x \\
&P(z<\eta)_{EU} = P^{ref} + c_w^2(\rho_w - \rho_w^{ref})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{P_{EU-to-SV}} : \\
&h_{SV} = h_{EU} \\
&u_{SV} = \overline{u}_{EU}
\end{aligned}$$

Finalement, la consistance des variables est quasi assurée à l'interface car on a (avec f^{Γ_L} et f^{Γ_R} respectivement les variables à gauche et à droite de l'interface) :

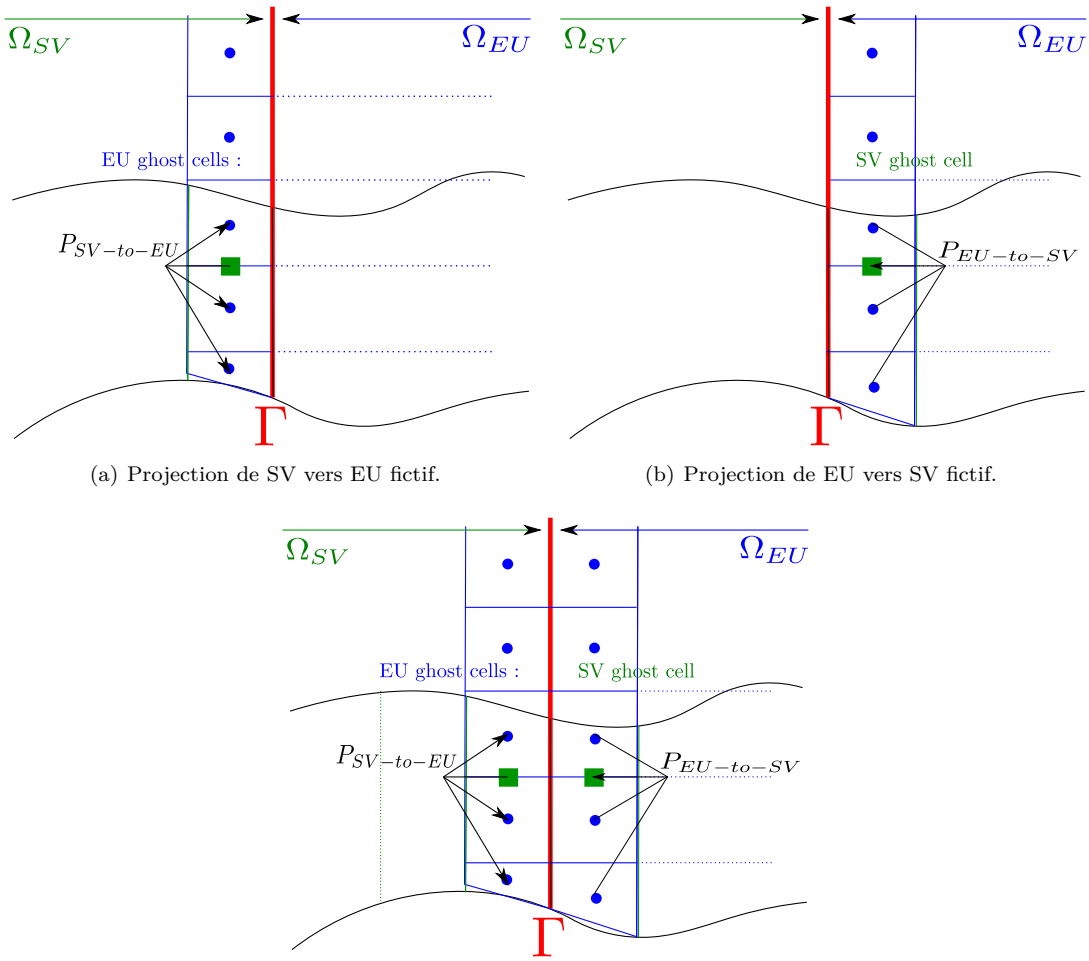
$$\begin{aligned}
&h_{SV}^{\Gamma_L} = h_{EU}^{\Gamma_L} \quad and \quad h_{EU}^{\Gamma_R} = h_{SV}^{\Gamma_R} \\
&\Longrightarrow h_{SV}^{\Gamma} = h_{EU}^{\Gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u_{SV}^{\Gamma_L} = u_{EU}^{\Gamma_L} \quad and \quad u_{EU}^{\Gamma_R} = u_{SV}^{\Gamma_R} \\
&\Longrightarrow u_{SV}^{\Gamma} = u_{EU}^{\Gamma}
\end{aligned}$$

Notons que ces implications ne sont pas parfaitement justes car on utilise des solveurs différents de chaque coté de l'interface. Cependant si les solveurs sont consistants, l'écart possible sera *a priori* négligeable.

Remarque 37. *Pour déterminer le niveau de surface libre η dans Ω_{EU}, on peut par exemple chercher $\alpha = 0.5$ ou encore $\rho = 500 km/m^3$, mais cela conduit, si le maillage est trop grossier, à des erreurs d'estimation. Une meilleure solution consiste à s'appuyer sur le fait que la pression est hydrostatique. Cette hypothèse, qui doit être vérifiée dans le cadre du couplage présenté, permet le calcul h_{EU} de façon plus précise.*

Remarque 38. *Pour le modèle diphasique, il reste un point à régler. Les variables dans les cellules fictives Ω_{EU} ont été précisées grâce aux opérateurs de projection mais seulement dans les zones sous la surface libre. Pour les zones d'air, le modèle de SV ne donne aucune information. Des conditions ouvertes sont imposées afin de laisser sortir les ondes du domaine Ω_{EU}.*



(a) Projection de SV vers EU fictif.

(b) Projection de EU vers SV fictif.

(c) Cas complet.

FIGURE 10.3 – Projections en domaines hétérogènes.

10.4.2 Cas tests

Le cas test effectué est basé sur une expérience de Synolakis [212], pour laquelle le modèle de SV donne de très bon résultats et peu donc nous servir de référence. On peut aussi s'appuyer sur la solution analytique (du modèle de SV) de Carrier et Greenspan [39]. Cette expérience consiste en une onde solitaire linéaire qui rencontre une pente, la gravit, puis repart d'où elle est venue.

Le domaine choisi pour le modèle de SV est $x \in [0, 76]m$ et pour le modèle diphasiques $(x, y) \in [76, 82] \cdot [-0.25, 0.25]m^2$. La bathymétrie est définie par : $b = -1m$ pour $x < 60.15m$ et $b = 1/(80-60.15)\cdot(x-60.15)-1m$ sinon. L'onde solitaire est initialisée en $x_0 = 60.15 - \sqrt{4 \cdot h_0^3/(3 \cdot a_0)} \cdot (log(\sqrt{1/0.05} + \sqrt{1/0.05 - 1}))m$ dans le domaine de SV par :

$$\eta = a_0 \cdot sech^2(\sqrt{3 \cdot a_0/(4 \cdot h_0^3)}(x - x_0))$$
$$u = \sqrt{gh_0}(\eta/h_0)$$

avec $a_0 = 0.019m$ et $h_0 = 1m$. Ce cas est illustré en figure 10.4.2.

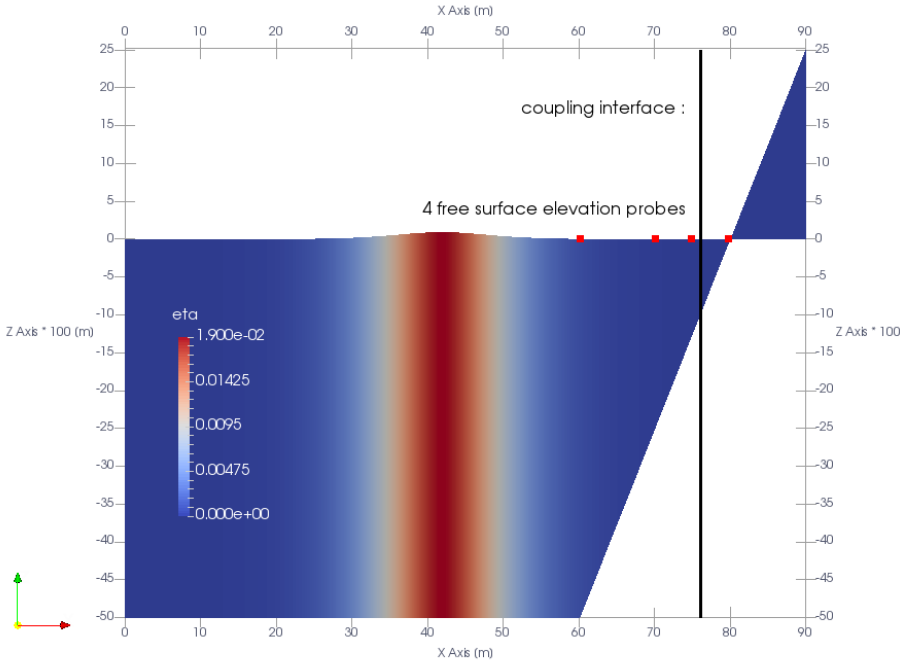


FIGURE 10.4 – Cas test de Synolakis.

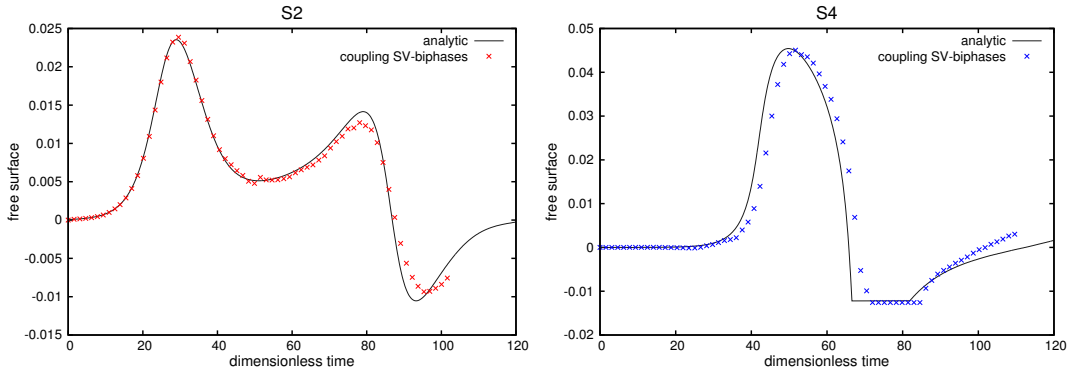
Pour le modèle diphasiques on prend $c_l = c_g = 20m/s$ et on initialise simplement un volume d'eau sous $\eta = 0$ à la pression hydrostatique et un volume d'air au dessus. La méthode de Carrier et Greenspan est considérée pour nous fournir une solution de référence. Des comparaisons sont effectuées au niveau des sondes d'élévations $S1, S2, S3, S4$ placées respectivement en $x = 60.15, 70.05, 74.90, 79.75m$, soit 3 sondes dans le domaine de SV et 1 sonde dans le domaine diphasique. Le calcul effectué utilise des cellules pour la zone SV de $\triangle x = 0.38m$ et pour la zone diphasique des cellules de tailles variables telles que $\triangle x = \triangle y = [0.0125, 0.0016]m$ grâce à l'utilisation de la méthode AMR. Le raffinement de maillage est simplement basé sur le gradient de masse volumique ici.

On illustre qualitativement en figure 10.5 les résultats obtenus avec la méthode de couplage. L'onde passe d'un domaine à un autre sans difficulté. En zoomant fortement, on peut cependant observer des toutes petites perturbations qui nécessiterait de raffiner le maillage dans le domaine diphasique.

On compare maintenant, en figures 10.7(a) et 10.7(b), l'élévation dans le domaine de SV sur la sonde $S2$ et dans le domaine diphasique sur la sonde $S4$, entre le calcul avec couplage et la solution analytique associée au modèle de SV. Les résultats sont satisfaisants. On observe, tout de même, des petites perturbations. Il faudrait raffiner le maillage pour les réduire et améliorer les résultats. Notons que le couplage n'a pas exactement à coller à la solution analytique, car celle-ci est une solution du modèle de SV. Or le run-up est potentiellement différent entre le modèle de SV et le modèle diphasique. Néanmoins, compte tenu des échelles misent en jeu par ce cas test, les résultats doivent être proches.

Pour montrer le potentiel de cette méthode de couplage, on effectue le même cas test avec une "digue" placée au ras du niveau d'eau sur la plage. On illustre en figure 10.6 l'impact sur cette digue. On voit la vague d'abord impacter la structure, puis passer en partie par dessus et en partie être réfléchie. Il est possible, grâce à ce couplage, d'estimer relativement précisément la force exercée sur la digue en en temps réduit par rapport à un calcul complet avec le modèle diphasique.

Remarque 39. *L'application de cette approche pour un couplage du modèle de SGN vers un modèle diphasique est relativement directe. Il suffit de suivre le même raisonnement en remplaçant les vitesses et la pression associées au modèle de SGN au lieu de SV. La difficulté principale est d'ordre pratique, car les expressions de vitesses et de pression du modèle de SGN sont plus compliquées et reposent sur des termes d'ordre élevés (cf. chapitre 3 pour le détails de ces expressions). Dans le cas où on considère le système de SGN approché, comme nous l'avons fait dans cette thèse, une question se pose : que valent les variables auxiliaires du modèle dans les cellules fictives du coté diphasique ?*



(a) (b)

FIGURE 10.7 – Comparaisons quantitatives de l'élévation de la surface libre au cours du temps entre le couplage SV-diphasique et la solution analytique (SV), sur une sonde placée dans le domaine de SV et une sonde placée dans le domaine diphasique.

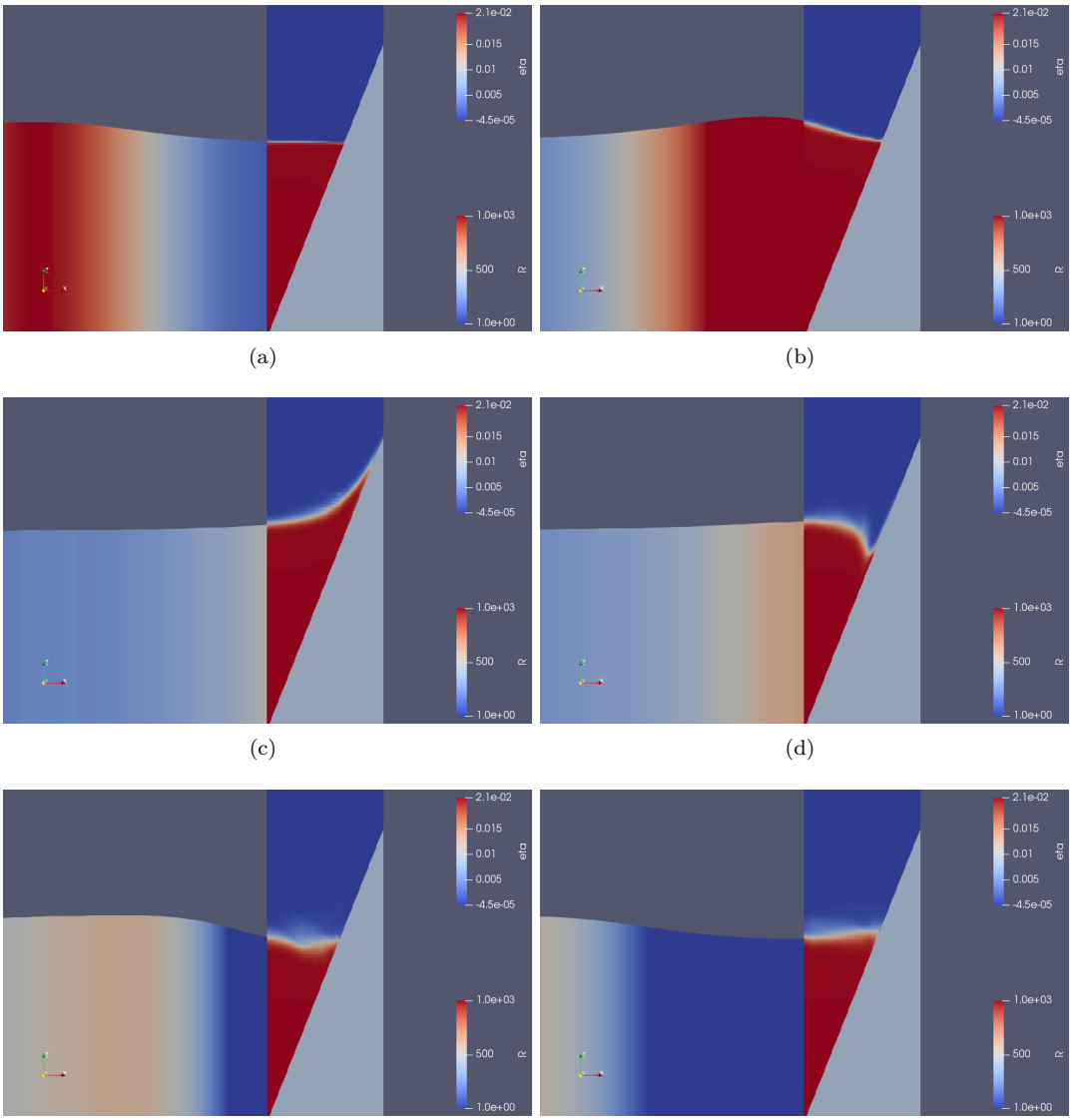


FIGURE 10.5 – Couplage SV-diphasique : élévation de surface libre pour le modèle de SV (à gauche) et masse volumique pour le modèle diphasique (à droite) à différents instants.

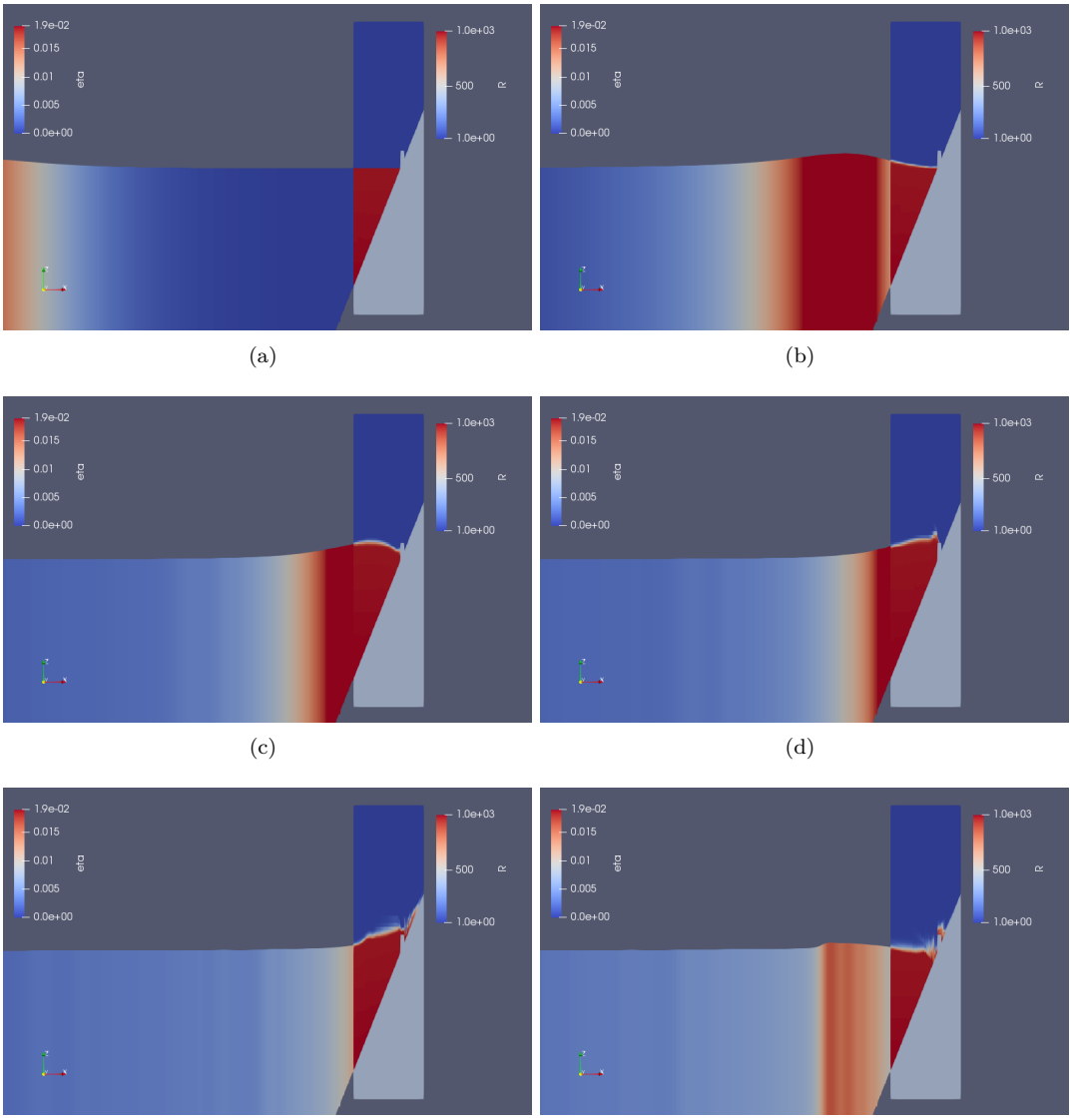


FIGURE 10.6 – Couplage SV-diphasique avec impact sur une digue.

10.5 Bilan

Dans ce chapitre, on a vu les différentes méthodes de couplages possibles. Les méthodes à un sens nécessitent des conditions au limites de qualité, mais sont souvent suffisantes en pratique. Les méthodes à deux sens peuvent s'affranchir de traiter réellement des conditions aux limites, puisque par construction, les deux modèles doivent être valides dans la zone de couplage. Il peuvent donc échanger leurs "informations" comme si un unique modèle était résolu. Ce type de couplage a un potentiel intéressant car il arrive qu'il y ait des réflexions internes dans les domaines et que différentes ondes rentrent et sortent du domaine simultanément, nécessitant donc un couplage fort entre les domaines. Cependant, il est difficile de garantir que l'interface de couplage soit bien placée en pratique, ce qui peut engendrer des erreurs importantes. Ce type d'approche est donc utile, mais doit être maniée avec précaution. Une méthode simple a été présentée pour coupler le modèle de SV et un modèle diphasique. Un cas test académique a permis de valider l'approche et un cas plus pratique a été effectué pour montrer l'intérêt de ce couplage pour évaluer relativement précisément des impacts de vagues. L'extension à un couplage SGN-diphasique est relativement directe d'un point de vue théorique, mais nécessite de calculer des dérivées d'ordres élevés pour construire les projecteurs du modèle de SGN vers le modèle diphasique.

Conclusions et perspectives

Cette thèse a permis d'étudier quelques modèles et méthodes de résolution permettant de simuler un tsunami dans sa phase de propagation et sa phase d'impact à la côte.

Pour pouvoir simuler toute la vie d'un tsunami depuis sa génération, il est nécessaire d'avoir recours à des modèles approchés pour obtenir des temps de calcul acceptables. Le modèle non linéaire et non dispersif de Saint-Venant a permis de reproduire le tsunami du Japon de 2011 avec un bonne précision. D'un point de vue numérique, la résolution est efficace grâce notamment à la simplicité du modèle et à la méthode de maillage adaptatif à seuil de raffinement automatique proposée. Pour des "impacts" lents comme la submersion d'une digue, les résultats obtenus ont permis de retrouver que la digue de la baie de Kamaishi avait cédé principalement à cause de l'effort quasi statique dû à la différence de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval de la digue. Par contre, sur de grandes distances ou pour des vagues plus sujettes aux effets dispersifs, ce modèle peut se révéler insuffisant.

Une approximation hyperbolique du modèle non linéaire et faiblement dispersif de Serre-Green-Naghdi a été étudiée pour palier à ces défauts. Cette approche se révèle efficace et pourrait constituer une voie pour envisager des études relativement fines en des temps de calculs acceptables. Cependant le modèle de Serre-Green-Naghdi comporte un défaut qui peut fausser largement les résultats. Ce modèle ne contient aucune limite aux croissances des non linéarités. Les vagues, qui déferlent dans la réalité, se retrouvent donc avec ce modèle particulièrement mal prédites. Pour palier ce problème, l'approche dite hybride consistant à décrire une déferlante grâce à un choc (dissipatif) du modèle de Saint-Venant a été investiguée. Pour cela, une modification du système approché de SGN a été proposée. En plus des effets parasites connus pour le système hybride exact, aux limites de transition entre les deux modèles, des oscillations dues aux conditions initiales du modèle de SGN données au modèle de SV ont été mises en évidence. Différentes stratégies de bascule d'une limite à une autre du modèle (SGN$\leftrightarrows$SV) ont été investiguées. Il en ressort qu'il est possible de réduire les effets parasites dus à la bascule grâce à une transition progressive. Cependant, dans tous les cas, ces oscillations parasites restent mesurées avec la méthode de résolution employée, à la différence semble-t-il, des méthodes de la littérature. Ceci a permis d'obtenir des résultats convergents en maillage et physiquement satisfaisants d'une onde solitaire déferlante. Cet avantage est sans doute dû au fait que, comme un modèle approché de SGN a été considéré, nous avons pu utiliser un solveur de type Godunov unique pour résoudre le modèle dissipatif et non une combinaison de méthodes numériques. Des comparaisons plus précises seraient intéressantes pour clarifier ce point. Il semble donc possible avec cette approche de se contenter d'une transition raide, simple de mise en œuvre, du modèle de SGN vers celui de SV et *vice versa* pour simuler relativement précisément et de manière efficace la vie d'un tsunami de la zone de génération à la côte. Un point qui serait intéressant d'étudier pour les modèles de type Boussinesq, comme celui ci, est la transition sec-mouillé *a priori* délicate à traiter.

Pour modéliser avec une plus grande précision un déferlement ou un impact de vague sur une structure, des modèles diphasiques compressibles ont ensuite été considérés.

Une des difficultés majeures de la résolution de ce type de modèles est d'être capable d'obtenir une méthode numérique dont la précision est indépendante du régime de l'écoulement ou autrement dit "Tous Mach". Nous avons vu qu'il est possible de montrer que l'erreur de troncature d'un schéma de type Godunov (en l'occurrence celui de Lax-Friedrichs) explose à bas Mach et que cette dépendance vient de la diffusion induite par le schéma sur l'équation de quantité de mouvement. Différentes corrections de la littérature, cohérentes avec cela, ont ensuite été étudiées. Ces méthodes ont montré leur efficacité sur des cas simples.

Cependant des oscillations ont été observées sur des cas 1D. Une analyse du caractère oscillant en 1D de ces corrections a été effectuée et a permis de montrer (pour un schéma particulier) qu'il n'est pas possible d'assurer la propriété de préservation asymptotique (*i.e.* bon à Tous Mach) et de rendre le schéma TVD. Une version TVD de ces corrections a été proposée, mais restreint leur capacité à bas Mach. Pour réduire les oscillations du schéma préconditionné initial, tout en conservant ses capacités à tous les nombres de Mach, nous avons relaxé la contrainte TVD vers une contrainte TVB. Au final la correction (ou limitation) proposée permet de réduire les oscillations engendrées par les préconditionnements classiques étudiés et de conserver leurs caractères Tous Mach.

Après quelques cas tests délicats effectués avec deux modèles diphasiques, le modèle isentropique à relaxation a été retenu. Ce modèle a permis, entre autres, de simuler le passage d'onde de choc et de détente dans un milieu aéré et pur. Ces validations satisfaisantes nous ont conduit à étudier des cas d'impacts simplifiés, mais relativement représentatifs d'impacts de vagues. Un cas d'impact de lame non aérée sur un mur a été validé et des cas de mélange ont été étudiés qualitativement. D'un point de vue physique, il en ressort que plus le milieu est aéré plus la pression maximale d'impact est réduite, mais plus sa durée est grande. Même si une étude plus approfondie, avec notamment d'autres cas tests et l'utilisation de discrétisations différentes, serait intéressante, ces résultats permettent d'imaginer qu'elle sera l'impact d'un rouleau sur une structure. Aussi il faut noter que nous avons rencontré des oscillations numériques non acceptables sur des cas à "grande" échelle de temps, dès lors que les vrais vitesses du son avaient besoin d'être considérées. La validation du solveur Tous Mach limité sur des cas compliqués est donc peu probante. Ce type de difficulté est connu de la littérature, bien que très peu d'études de cas instationnaires aient déjà été effectuées. Une poursuite du travail du chapitre 6 pour essayer d'éliminer ces effets parasites serait intéressante.

D'autre part, pour réduire les temps de calcul, il serait intéressant de développer un schéma implicite en temps. La formulation "sans matrice" étudiée au chapitre 5 sur les équations d'Euler semble adéquate pour les applications visées, car le coût mémoire des schémas implicites plus classiques (à inversion "directe") est lié à la taille des maillages. Cependant les simplifications effectuées pour arriver à ce schéma simple, semblent affecter la stabilité inconditionnelle du schéma de base. Ceci nous a conduit à rejeter cette approche, mais il est clair qu'il faudrait poursuivre pour sans doute trouver un compromis entre coût mémoire et stabilité pour pouvoir utiliser des plus "grands" pas de temps que ceux imposés par les schémas explicites.

Enfin, une méthode de couplage explicite entre modèles hétérogènes a été présentée. Un modèle adéquat à la propagation, comme le modèle de Saint-Venant ou le modèle de Serre-Green-Naghdi, a été couplé avec un modèle diphasique permettant de modéliser des impacts ou des déferlements. Pour pouvoir permettre l'arrivée éventuelle de plusieurs vagues avec des réflexions d'un domaine vers l'autre, un couplage à deux sens a été considéré. Cette méthode se révèle potentiellement efficace car le modèle coûteux n'est résolu que dans la zone où la physique le nécessite. Cependant, pour que le couplage soit rigoureusement posé, il faut que l'interface entre les deux domaines soit placée dans une zone où les deux modèles couplés sont parfaitement valides. Ceci est loin d'être facile à réaliser en pratique. Une manière de procéder est de faire plusieurs calculs préliminaires pour savoir où placer cette interface, ce qui est assez coûteux. Il est de plus possible que cet emplacement soit valide à un certain moment, puis faux quelques instants plus tard. Néanmoins en relaxant un peu l'exigence sur la qualité du couplage on peut espérer élargir le champ d'application.

Annexe A

Compléments sur le modèle bi-phase isentropique à relaxation

Cette annexe précise certaines propriétés et relations associées au modèle diphasique à relation de pressions présentés en Section 4.3.4. On Rappelle que les vecteurs propres à droite et à gauche d'un système hyperbolique sont définis respectivement par $AK_i = \lambda_i K_i$ et $L_i A = \lambda_i L_i$ avec A la jacobienne du système. En travaillant avec les variables primitives de ce système on a $W = (\alpha_1, \rho_1, \rho_2, u)$. Rappelons aussi que $\lambda_1 = u - c_f$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3 = u + c_f$. On obtient :

$$L_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{P_1 - P_2}{\rho c} \\ -\dfrac{\alpha_1 c_1^2}{\rho c} \\ -\dfrac{\alpha_2 c_2^2}{\rho c} \\ 1 \end{pmatrix} , \; L_{2-1} = \begin{pmatrix} cste_1 \\ \rho_2 \\ -\rho_1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; L_{2-2} = \begin{pmatrix} cste_2 \\ \rho_2 \\ -\rho_1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; L_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{P_1 - P_2}{\rho c} \\ \dfrac{\alpha_1 c_1^2}{\rho c} \\ \dfrac{\alpha_2 c_2^2}{\rho c} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

et

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ -c \end{pmatrix} , \; K_{2-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(1-\alpha_1)c_2^2 \\ \alpha_1 c_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; K_{2-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{P_1 - P_2}{c_1^2} \\ -\dfrac{P_1 - P_2}{c_2^2} \\ 0 \end{pmatrix} , \; K_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ c \end{pmatrix} .$$

Dans le cas général il est difficile de déterminer tous les invariants de Riemann (*cf.* le chapitre 5 pour leurs définitions). Notons cependant qu'à travers la discontinuité de contact ($\lambda_2 = u$) ils s'obtiennent facilement : $u = cte$ et $P = cste$. On retrouve donc un résultat classique de la dynamique des gaz avec une pression (ici de mélange) et une vitesse constantes à travers cette discontinuité. Pour obtenir d'autres invariants (mais pour des EOS linéarisés) le lecteur peut se référer à [40] où un solveur exact est détaillé dans ce cas particulier.

Une propriété très importante est que ce modèle, sélectionné pour des raisons numériques, doit dans un certaine mesure donner des solutions proches du modèle en équilibre de pression (modèle de la Section 4.3.3) qui correspond à la physique que l'on souhaite représenter. L'idée pour montrer cela est d'effectuer un développement asymptotique dans le modèle à relaxation sur chacune de ses variables avec un petit paramètre ϵ qui, lorsqu'il est nulle, implique $\alpha_{relax} = \alpha_{eq}$. Le lecteur est renvoyé à Chanteperdrix [40] ou Saurel et al. [197] pour les détails de la preuve, basée sur un développement de type Chapman-Enskog.

Annexe B

Quelques changements de coordonnées et solutions analytiques de vortex stationnaires

Rappel de changement de coordonnées avec le système de SV

Soit le système de Saint-Venant en 2D sur bathymétrie constante ($\overrightarrow{U} = (u_x, u_y)$ correspond à la vitesse moyenne sur la verticale) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + div\big(h\overrightarrow{U}\big) = 0 \tag{B.0.1}$$

$$\frac{\partial h\overrightarrow{U}}{\partial t} + div\big(h\overrightarrow{U} \otimes \overrightarrow{U} + g\frac{h^2}{2}\overline{\overline{I}}\big) = 0 \tag{B.0.2}$$

En coordonnées cylindrique, avec $\overrightarrow{U} = (u_r, u_\theta)$, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h u_r}{\partial r} + \frac{h u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h u_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{B.0.3}$$

$$\frac{\partial h u_r}{\partial t} + \frac{\partial h u_r^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h u_r u_\theta}{\partial \theta} + \frac{h u_r^2 - h u_\theta^2}{r} + \frac{\partial g\frac{h^2}{2}}{\partial r} = 0 \tag{B.0.4}$$

$$\frac{\partial h u_\theta}{\partial t} + \frac{\partial h u_r u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h u_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial g\frac{h^2}{2}}{\partial \theta} = 0 \tag{B.0.5}$$

Rappel de changement de coordonnées avec le système d'Euler barotrope

Soit le système d'Euler en 2D avec la loi d'état $P = P_{ref} + c_{ref}^2(\rho - \rho_{ref})$ et $\overrightarrow{U} = (u_x, u_y)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\big(h\overrightarrow{U}\big) = 0 \tag{B.0.6}$$

$$\frac{\partial \rho\overrightarrow{U}}{\partial t} + div\big(h\overrightarrow{U} \otimes \overrightarrow{U} + P\overline{\overline{I}}\big) = 0 \tag{B.0.7}$$

En coordonnées cylindrique, avec $\overrightarrow{U} = (u_r, u_\theta)$, on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r}{\partial r} + \frac{\rho u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho u_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{B.0.8}$$

$$\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho u_r u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho u_r^2 - \rho u_\theta^2}{r} + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \tag{B.0.9}$$

$$\frac{\partial \rho u_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho u_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{c_0^2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0 \tag{B.0.10}$$

Solutions analytiques de vortex stationnaires

L'intérêt principal de ces solutions analytiques dans cette thèse est de pouvoir évaluer des schémas numériques en condition asymptotique (par exemple faible Mach pour les équations d'Euler ou faible Froude pour les équations de SV). Comme on se place dans un cadre stationnaire, ces solutions fournissent les conditions initiales (bien préparées) pour effectuer des tests numériques et évidemment par construction ces solutions sont valables pour tout temps. Le Vortex stationnaire que l'on construit est inspiré des travaux de Gresho et al. [83] qui ont proposé ce cas test dans le cas des équations de Navier Stokes incompressibles. Les calculs des paragraphes précédents ont permis d'obtenir les équations de SV et d'Euler barotrope $2D$ dans un repère cylindrique particulière adéquat pour ce type de cas.

Vortex solution des équations de SV :
On prend (avec $\overrightarrow{U} = (u_r, u_\theta)$) :

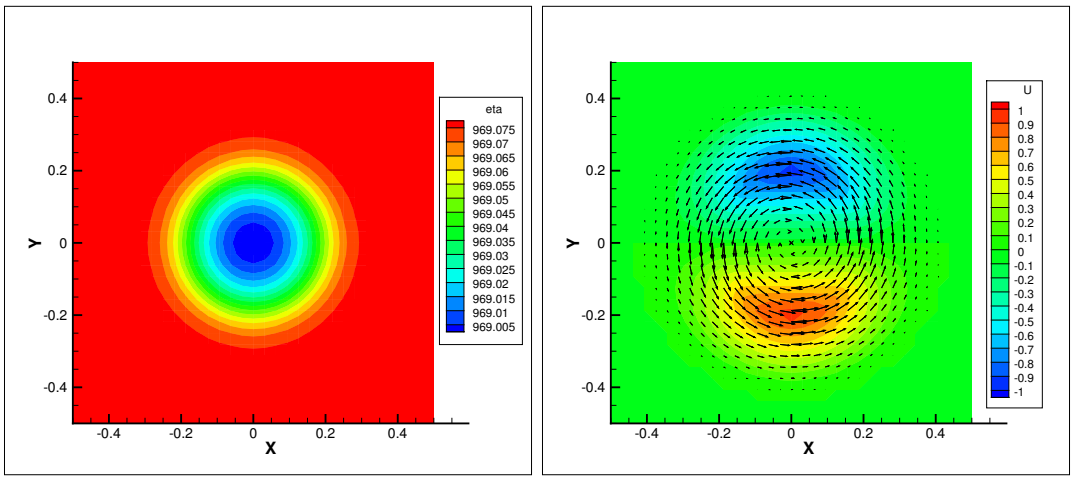
$$\overrightarrow{U} = \begin{cases} (0,5r) & \text{if } 0 \leq r \leq 0.2 \\ (0,2-5r) & \text{if } 0.2 < r \leq 0.4 \\ (0,0) & \text{if } r > 0.4 \end{cases} \tag{B.0.11}$$

En imposant de plus $h = h(r,\theta)$ l'équation de conservation de la masse (ou hauteur d'eau) (B.0.3) donne $\frac{\partial h u_\theta}{\partial \theta} = 0$. L'équation de conservation de quantité de mouvement selon $\overrightarrow{e_\theta}$ (B.0.5) combinée à ce résultat donne $h = h(r)$. L'équation de conservation de quantité de mouvement selon $\overrightarrow{e_r}$ (B.0.4) donne finalement $\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{u_\theta^2}{gr}$. On a donc :

$$h = \begin{cases} h_0 + \frac{25r^2}{2g} & \text{si } 0 \leq r \leq 0.2 \\ h_1 + \frac{4}{g}ln(r) - \frac{20r}{g} + \frac{25r^2}{2g} & \text{si } 0.2 < r \leq 0.4 \\ h_1 + \frac{4}{g}ln(0.4) - \frac{20*0.4}{g} + \frac{25*0.4^2}{2g} & \text{si } r > 0.4 \\ \text{avec } h_1 = h_0 - \frac{4}{g}ln(0.2) + \frac{20*0.2}{g} \text{ par continuité} & \end{cases} \tag{B.0.12}$$

La traduction de ces conditions au cas cartésien est directe avec les formules de base de trigonométrie. Par faciliter l'analyse en fonction du nombre de Froude on peut écrire avec $h_{max} \approx h_0$: $Fr_{max} \approx \frac{u_{max}}{\sqrt{gh_0}}$ soit $Fr_{max} \approx \frac{1}{\sqrt{gh_0}}$. Il suffit donc de bien choisir h_0 pour imposer le Fr souhaité.

Les figures B.1(a) et B.1(b) illustrent respectivement le champs de hauteur d'eau et de vitesse horizontale pour le cas avec $Fr_{max} \approx 0.01$.



(a) Hauteur d'eau.

(b) Vitesse horizontale.

FIGURE B.1 – Illustration de la solution stationnaire du vortex de Gresho pour le système de SV à $Fr_{max} \approx 0.01$.

Vortex solution des équations de Euler barotrope :

De la même manière dans le cas des équations d'Euler barotrope on a : $\rho = \rho(r)$ et $\dfrac{\partial \rho}{\partial r} = \dfrac{\rho u_\theta^2}{c_0^2 r}$. On a donc :

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 exp(\dfrac{5r}{c_{ref}^2}) & \text{si } 0 \leq r \leq 0.2 \\ \rho_1 exp\Big(\dfrac{1}{c_{ref}^2}(2ln(r) - 5r)\Big) & \text{si } 0.2 < r \leq 0.4 \\ \rho_1 exp\Big(\dfrac{1}{c_{ref}^2}(2ln(0.4) - 5 * 0.4)\Big) & \text{si } r > 0.4 \\ \text{avec } \rho_1 = \rho_0 exp\Big(\dfrac{1}{c_{ref}^2}(10 * 0.2 - 2ln(0.2))\Big) \text{ par continuité} & \end{cases} \tag{B.0.13}$$

La conversion au cas cartésien est directe. Pour faciliter l'analyse en fonction du nombre de Mach il suffit de choisir c_0 pour avoir le Mach souhaité avec $M \approx \dfrac{1}{c_0}$.

Annexe C

Éléments pour les calculs d'erreurs de troncatures

Cette annexe donne les éléments utilisés en section 6.3 du chapitre 6 pour calculer l'erreur de consistance d'un schéma. Pour cela, il est nécessaire d'établir le degrés d'approximation des schémas utilisés.

Soit un intervalle I tel que $I \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur I avec n un entier naturel, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(x_0 + h) \in I$ le développement de Taylor (ou théorème de Taylor-Young) donne :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\frac{df(x_0)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + ... + \frac{h^n}{n!}\frac{d^n f(x_0)}{dx^n} + O(h^{n+1}) \tag{C.0.1}$$

Dans un cadre discret pour une fonction $u_i^n := u(x_i, t_n)$ (ie. i un indice spatial et n un indice temporel) satisfaisant les contraintes précédentes on a donc jusqu'à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n + \triangle t\frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \frac{(\triangle t)^2}{2}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} + \frac{(\triangle t)^3}{6}\frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + O((\triangle t)^4) \\
u_{i\pm 1}^n &= u_i^n \pm \triangle x\frac{\partial u_i^n}{\partial x} + \frac{(\triangle x)^2}{2}\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} \pm \frac{(\triangle x)^3}{6}\frac{\partial^3 u_i^n}{\partial x^3} + O((\triangle x)^4)
\end{aligned}$$

On obtient donc aisément quelques approximations utiles (pour simplifier les notations, on utilise la notation de dérivée suivante : $f_t := \dfrac{\partial f}{\partial t}$ et *idem* pour l'espace x ; à ne pas confondre avec les indices discrets i et n) :

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} &= (u_i^n)_t + \frac{\triangle t}{2}(u_i)_{tt} + \frac{(\triangle t)^2}{6}(u_i)_{ttt} + O((\triangle t)^3) \\
u_{i+1}^n - u_{i-1}^n &= 2\triangle x(u_i^n)_x + \frac{(\triangle x)^3}{3}(u_i)_{xxx} + O((\triangle x)^4)
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] S. Abadie, J. Harris, S. Grilli, and R. Fabre. Numerical modeling of tsunami waves generated by the flank collapse of the Cumbre Vieja Volcano (La Palma, Canary Islands) : tsunami source and near field effects. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 117(C5), 2012. *cité p. 16*

[2] S. M. Abadie and C. Mokrani. On the influence of breaking wave local geometry on impulsive loads. *Coastal Engineering Proceedings*, 1(33) :61, 2012. *cité p. 24*

[3] R. Abgrall. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 125(1) :150–160, 1996. *cité p. 58 et 64*

[4] A. Abramov, O. Voikina, I. Minaev, V. Simonenko, E. Abramov, and N. Skorkin. Mathematical Modeling of Asteroid Falling into the Ocean. In *11th International LS-DINA Users Conference*, 2010. *cité p. 17*

[5] G. B. Airy. Tides and waves. 1841. *cité p. 32*

[6] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 181(2) :577–616, 2002. *cité p. 61 et 64*

[7] T. Altazin, M. Ersoy, F. Golay, D. Sous, and L. Yushchenko. Numerical investigation of bb-amr scheme using entropy production as refinement criterion. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 30(3) :256–271, 2016. *cité p. 144*

[8] D. M. Anderson, G. B. McFadden, and A. A. Wheeler. Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Annual review of fluid mechanics*, 30(1) :139–165, 1998. *cité p. 57*

[9] T. Arikawa, M. Sato, K. Shimosako, I. Hasegawa, G.-S. Yeom, and T. Tomita. Failure mechanism of Kamaishi breakwaters due to the Great East Japan earthquake tsunami. *Coastal engineering proceedings*, 1(33) :16, 2012. *cité p. 22, 23, 168, 169, 170, et 171*

[10] L. Arpaia and M. Ricchiuto. r- adaptation for Shallow Water flows : conservation, well balancedness, efficiency. *Computers & Fluids*, 160 :175–203, 2018. *cité p. 144*

[11] T. D. Aslam, J. B. Bdzil, and D. S. Stewart. Level set methods applied to modeling detonation shock dynamics. *Journal of Computational Physics*, 126(2) :390–409, 1996. *cité p. 57*

[12] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. t. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6) :2050–2065, 2004. *cité p. 45, 53, 154, et 173*

[13] T. Baba, N. Takahashi, Y. Kaneda, K. Ando, D. Matsuoka, and T. Kato. Parallel implementation of dispersive tsunami wave modeling with a nesting algorithm for the 2011 Tohoku tsunami. *Pure and Applied Geophysics*, 172(12) :3455–3472, 2015. *cité p. 159 et 168*

[14] P. Bacigaluppi, M. Ricchiuto, and P. Bonneton. Upwind Stabilized Finite Element Modelling of Non-hydrostatic Wave Breaking and Run-up. *Research report RR-8536*, 2014. *cité p. 49*

[15] M. Baer and J. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *International journal of multiphase flow*, 12(6) :861–889, 1986. *cité p. 59*

[16] R. Bagnold. Interim report on wave-pressure research. *Excerpt from the J. of the Institution of Civil Engineers*, 1939. *cité p. 26*

[17] T. Barth and D. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. In *27th Aerospace sciences meeting*, page 366, 1989. *cité p. 70, 95, 96, et 108*

[18] E. Barthélemy. Nonlinear shallow water theories for coastal waves. *Surveys in Geophysics*, 25(3-4) :315–337, 2004. *cité p. 32 et 41*

[19] X. Barthelemy, M. Banner, W. Peirson, F. Fedele, M. Allis, and F. Dias. On a unified breaking onset threshold for gravity waves in deep and intermediate depth water. *Journal of Fluid Mechanics*, 841 :463–488, 2018. *cité p. 49*

[20] S. Benzoni-Gavage and D. Serre. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations : First-order Systems and Applications*. Oxford University Press on Demand, 2007. *cité p. 71*

[21] V. Berdichevsky. *Variational principles of continuum mechanics : I. Fundamentals*. Springer Science & Business Media, 2009. *cité p. 58*

[22] M. Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 82(1) :64 – 84, 1989. *cité p. 149*

[23] M. J. Berger and R. J. LeVeque. Adaptive mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6) :2298–2316, 1998. *cité p. 149*

[24] M. J. Berger and J. Oliger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of computational Physics*, 53(3) :484–512, 1984. *cité p. 146*

[25] A. Bernard-Champmartin and F. De Vuyst. A low diffusive lagrange-remap scheme for the simulation of violent air-water free-surface flows. *Journal of Computational Physics*, 274 :19–49, 2014. *cité p. 65 et 188*

[26] P. Birken and A. Meister. Stability of preconditioned finite volume schemes at low mach numbers. *BIT Numerical Mathematics*, 45(3) :463–480, 2005. *cité p. 119*

[27] M. Bjørkavåg and H. Kalisch. Wave breaking in Boussinesq models for undular bores. *Physics Letters A*, 375(14) :1570–1578, 2011. *cité p. 49*

[28] E. Blayo and L. Debreu. Nesting ocean models. In *Ocean Weather Forecasting*, pages 127–146. Springer, 2006. *cité p. 216*

[29] H. Bogaert, S. Léonard, L. Brosset, M. Kaminsk, et al. Sloshing and scaling : results from the sloshel project. In *The Twentieth International Offshore and Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore and Polar Engineers, 2010. *cité p. 26 et 27*

[30] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws : And Well-Balanced schemes for sources*. Springer Science & Business Media, 2004. *cité p. 86*

[31] J. Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 55–108, 1872. *cité p. 32*

[32] H. Bredmose, G. Bullock, and A. Hogg. Violent breaking wave impacts. Part 3. Effects of scale and aeration. *Journal of Fluid Mechanics*, 765 :82–113, 2015. *cité p. 28*

[33] M.-O. Bristeau and B. Coussin. *Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes*. PhD thesis, INRIA, 2001. *cité p. 98*

[34] H. M. Bücker, B. Pollul, and A. Rasch. On CFL evolution strategies for implicit upwind methods in linearized Euler equations. *International journal for numerical methods in fluids*, 59(1) :1–18, 2009. *cité p. 107*

[35] G. Bullock, C. Obhrai, D. Peregrine, and H. Bredmose. Violent breaking wave impacts. Part 1 : Results from large-scale regular wave tests on vertical and sloping walls. *Coastal Engineering*, 54(8) :602–617, 2007. *cité p. 26, 28, 195, 209, et 211*

[36] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy. *The Journal of chemical physics*, 28(2) :258–267, 1958. *cité p. 58*

[37] S. Cailleau, V. Fedorenko, B. Barnier, E. Blayo, and L. Debreu. Comparison of different numerical methods used to handle the open boundary of a regional ocean circulation model of the Bay of Biscay. *Ocean Modelling*, 25(1) :1–16, 2008. *cité p. 215*

[38] F. Caro, F. Coquel, D. Jamet, and S. Kokh. A simple finite-volume method for compressible isothermal two-phase flows simulation. *International Journal on Finite Volumes*, 2006. *cité p. 58*

[39] G. Carrier and H. Greenspan. Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(1) :97–109, 1958. *cité p. 222*

[40] G. Chanteperdrix. *Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface libre. Application à l'étude des mouvements de liquides dans les réservoirs de véhicules spatiaux*. PhD thesis, PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France (in French), 2004. *cité p. 62, 63, 189, 190, et 229*

[41] A. Chiapolino, R. Saurel, and B. Nkonga. Sharpening diffuse interfaces with compressible fluids on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 340 :389–417, 2017. *cité p. 95*

[42] A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*, 2(1) :12–26, 1967. *cité p. 119*

[43] R. Cienfuegos, E. Barthelemy, and P. Bonneton. A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part I : model development and analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51(11) :1217–1253, 2006. *cité p. 32*

[44] G. Colicchio, M. Greco, and O. Faltinsen. A BEM-level set domain-decomposition strategy for non-linear and fragmented interfacial flows. *International journal for numerical methods in engineering*, 67(10) :1385–1419, 2006. *cité p. 216*

[45] M. Cooker and D. Peregrine. A model for breaking wave impact pressures. In *Coastal Engineering 1990*, pages 1473–1486. 1991. *cité p. 26*

[46] M. J. Cooker and D. Peregrine. Wave impact pressure and its effect upon bodies lying on the sea bed. *Coastal Engineering*, 18(3-4) :205–229, 1992. *cité p. 26*

[47] A. D. Craik. The origins of water wave theory. *Annual review of fluid mechanics*, 36(1) :1, 2004. *cité p. 32*

[48] J. F. Dannenhoffer. *Grid adaptation for complex two-dimensional transonic flows*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1987. *cité p. 146*

[49] O. Darrigol. The spirited horse, the engineer, and the mathematician : water waves in nineteenth-century hydrodynamics. *Archive for history of exact sciences*, 58(1) :21–95, 2003. *cité p. 32*

[50] S. Davis. Simplified second-order Godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9(3) :445–473, 1988. *cité p. 84*

[51] A. B. de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 73 :237–240, 1871. *cité p. 32*

[52] P. Degond and M. Tang. All speed scheme for the low Mach number limit of the isentropic Euler equations. *Communications in Computational Physics*, 10(1) :1–31, 2011. *cité p. 120*

[53] S. Dellacherie. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. *Journal of Computational Physics*, 229(4) :978–1016, 2010. *cité p. 110, 111, 112, 114, 118, 119, 130, et 142*

[54] S. Dellacherie, J. Jung, P. Omnes, and P.-A. Raviart. Construction of modified Godunov-type schemes accurate at any Mach number for the compressible Euler system. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 26(13) :2525–2615, 2016. *cité p. 110, 113, 117, 119, 120, 121, 126, 130, et 142*

[55] S. Dellacherie, P. Omnes, and F. Rieper. The influence of cell geometry on the Godunov scheme applied to the linear wave equation. *Journal of Computational Physics*, 229(14) :5315–5338, 2010. *cité p. 112*

[56] F. Dell'Isola and S. Gavrilyuk. *Variational models and methods in solid and fluid mechanics*, volume 535. Springer Science & Business Media, 2012. *cité p. 58*

[57] F. Dias, D. Dutykh, and J.-M. Ghidaglia. A two-fluid model for violent aerated flows. *Computers & fluids*, 39(2) :283–293, 2010. *cité p. 28*

[58] S. Diot. *La méthode MOOD Multi-dimensional Optimal Order Detection : la première approche a posteriori aux méthodes volumes finis d'ordre très élevé*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2012. *cité p. 95*

[59] D. A. Drew. Mathematical modeling of two-phase flow. *Annual review of fluid mechanics*, 15(1) :261–291, 1983. *cité p. 58*

[60] D. A. Drew and S. L. Passman. *Theory of multicomponent fluids*, volume 135. Springer Science & Business Media, 2006. *cité p. 58 et 71*

[61] F. Drui. *Modélisation et simulation Eulériennes des écoulements diphasiques à phases séparées et dispersées : développement d'une modélisation unifiée et de méthodes numériques adaptées au calcul massivement parallèle*. PhD thesis, Paris Saclay, 2017. *cité p. 28, 58, 64, 208, et 211*

[62] P. Dubs. *Etude d'un jet d'azote supercritique utilisé dans un prototype industriel de traitement de surface à faible impact environnemental*. PhD thesis, Nancy 1, 2010. *cité p. 66*

[63] D. Dutykh. *Mathematical modelling of tsunami waves*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan, 2007. *cité p. 15*

[64] D. Dutykh and F. Dias. Water waves generated by a moving bottom. In *Tsunami and Nonlinear waves*, pages 65–95. Springer, 2007. *cité p. 15*

[65] D. Dutykh and H. Kalisch. Boussinesq modeling of surface waves due to underwater landslides. *arXiv preprint arXiv :1112.5083*, 2011. *cité p. 16*

[66] M. Ersoy, F. Golay, and L. Yushchenko. Adaptive multiscale scheme based on numerical density of entropy production for conservation laws. *Open Mathematics*, 11(8) :1392–1415, 2013. *cité p. 144*

[67] O. Faltinsen and A. Timokha. *Sloshing Cambridge*. Cambridge University Press.—2009.—608 p, 2009. *cité p. 24*

[68] N. Favrie and S. Gavrilyuk. A rapid numerical method for solving Serre–Green–Naghdi equations describing long free surface gravity waves. *Nonlinearity*, 30(7) :2718, 2017. *cité p. 18, 20, 44, 47, 48, 49, 51, 53, 173, et 174*

[69] A. G. Filippini. *Free surface flow simulation in estuarine and coastal environments : numerical development and application on unstructured meshes*. PhD thesis, Bordeaux, 2016. *cité p. 47*

[70] L. Fraccarollo and E. F. Toro. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. *Journal of hydraulic research*, 33(6) :843–864, 1995. *cité p. 83*

[71] N. K. Gakkai. *Preliminary Reconnaissance Report of the 2011 Tohoku-Chiho Taiheiyo-Oki Earthquake*. Springer, 2012. *cité p. 21*

[72] T. Gallouët, R. Herbin, D. Maltese, and A. Novotny. Implicit MAC scheme for compressible Navier-Stokes equations : unconditional error estimates. *preprint*, 2017. *cité p. 112*

[73] S. Gavrilyuk, V. Y. Liapidevskii, and A. Chesnokov. Spilling breakers in shallow water : applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 808 :441–468, 2016. *cité p. 46 et 47*

[74] S. Gavrilyuk and R. Saurel. Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia. *Journal of Computational Physics*, 175(1) :326–360, 2002. *cité p. 28 et 64*

[75] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; Numerical validation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 1(1) :89–102, 2001. *cité p. 32 et 41*

[76] S. Glimsdal, G. Pedersen, H. Langtangen, V. Shuvalov, and H. Dypvik. Tsunami generation and propagation from the Mjølnir asteroid impact. *Meteoritics & Planetary Science*, 42(9) :1473–1493, 2007. *cité p. 17*

[77] S. Glimsdal, G. K. Pedersen, and H. P. Langtangen. An investigation of overlapping domain decomposition methods for one-dimensional dispersive long wave equations. *Advances in Water Resources*, 27(11) :1111–1133, 2004. *cité p. 216*

[78] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118. Springer Science & Business Media, 2013. *cité p. 98*

[79] S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 89(3) :271–306, 1959. *cité p. 72, 92, et 110*

[80] F. Golay, M. Ersoy, L. Yushchenko, and D. Sous. Block-based adaptive mesh refinement scheme using numerical density of entropy production for three-dimensional two-fluid flows. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 29(1) :67–81, 2015. *cité p. 144 et 146*

[81] F. Golay and P. Helluy. Numerical schemes for low mach wave breaking. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 21(2) :69–86, 2007. *cité p. 64 et 190*

[82] A. E. Green and P. M. Naghdi. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 78(02) :237–246, 1976. *cité p. 32*

[83] P. M. Gresho and S. T. Chan. On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 2 : Implementation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11(5) :621–659, 1990. *cité p. 123 et 232*

[84] S. Grilli, J. C. Harris, J. T. Kirby, F. Shi, G. Ma, T. Masterlark, D. Tappin, and T. S. T. Bakhsh. Modeling of the Tohoku-Oki 2011 tsunami generation, far-field and coastal impact : A mixed co-seismic and SMF source. In *Proc. 7th Intl. Conf. on Coastal Dynamics (Arcachon, France*, pages 749–758, 2013. *cité p. 159*

[85] S. T. Grilli, J. C. Harris, T. S. T. Bakhsh, T. L. Masterlark, C. Kyriakopoulos, J. T. Kirby, and F. Shi. Numerical simulation of the 2011 Tohoku tsunami based on a new transient FEM co-seismic source : Comparison to far-and near-field observations. *Pure and Applied Geophysics*, 170(6-8) :1333–1359, 2013. *cité p. 159 et 160*

[86] S. T. Grilli and P. Watts. Tsunami generation by submarine mass failure. I : Modeling, experimental validation, and sensitivity analyses. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 131(6) :283–297, 2005. *cité p. 16*

[87] H. Guillard. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit. IV : P0 approximation on triangular and tetrahedral cells. *Computers & Fluids*, 38(10) :1969–1972, 2009. *cité p. 112*

[88] H. Guillard and A. Murrone. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes. *Computers & fluids*, 33(4) :655–675, 2004. *cité p. 110*

[89] H. Guillard and B. Nkonga. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit : A review. In *Handbook of Numerical Analysis*, volume 18, pages 203–231. Elsevier, 2017. *cité p. 118*

[90] H. Guillard and C. Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers & fluids*, 28(1) :63–86, 1999. *cité p. 110, 111, 112, et 142*

[91] J. Haack, S. Jin, and J.-G. Liu. An all-speed asymptotic-preserving method for the isentropic Euler and Navier-Stokes equations. *Communications in Computational Physics*, 12(4) :955–980, 2012. *cité p. 120*

[92] M. C. Haller and P. Catalán. Remote sensing of wave roller lengths in the laboratory. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 114(C7), 2009. *cité p. 50*

[93] S. Hank, R. Saurel, and O. Le Metayer. A hyperbolic Eulerian model for dilute two-phase suspensions. *Journal of Modern Physics*, 2(09) :997, 2011. *cité p. 66*

[94] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, 49(3) :357–393, 1983. *cité p. 86, 87, 93, 94, 128, et 130*

[95] A. Harten. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(1) :1–23, 1984. *cité p. 88*

[96] C. Hirsh. *Numerical computation of internal and external flows. Vol. 1 : Fundamentals of numerical discretization*. Wiley, 1994. *cité p. 85 et 86*

[97] S.-C. Hsiao, T.-W. Hsu, T.-C. Lin, and Y.-H. Chang. On the evolution and run-up of breaking solitary waves on a mild sloping beach. *Coastal Engineering*, 55(12) :975–988, 2008. *cité p. 175 et 176*

[98] G. Huber. *Modélisation des effets d'interpénétration entre fluides au travers d'une interface instable*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 2012. *cité p. 60*

[99] G. Huber, S. Tanguy, J.-C. Béra, and B. Gilles. A time splitting projection scheme for compressible two-phase flows. application to the interaction of bubbles with ultrasound waves. *Journal of Computational Physics*, 302 :439–468, 2015. *cité p. 92*

[100] D. Iampietro, F. Daude, P. Galon, and J.-M. Hérard. A Mach-sensitive splitting approach for Euler-like systems. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 52(1) :207–253, 2018. *cité p. 120, 121, et 142*

[101] M. R. Islam. *SPH simulations on failure of a breakwater mound due to tsunami scour under experimental conditions*. PhD thesis, 2014. *cité p. 28*

[102] H. Kanamori. Mechanism of tsunami earthquakes. *Physics of the earth and planetary interiors*, 6(5) :346–359, 1972. *cité p. 15*

[103] A. Kapila, R. Menikoff, J. Bdzil, S. Son, and D. S. Stewart. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials : Reduced equations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 13(10) :3002–3024, 2001. *cité p. 60*

[104] C. Kassiotis, M. Ferrand, D. Violeau, B. Rogers, P. Stansby, and M. Benoit. Coupling SPH with a 1-D Boussinesq-type wave model. In *6th International SPHERIC Workshop*, pages 241–247, 2011. *cité p. 215*

[105] M. Kazolea. Mathematical and computational modeling for the generation and propagation of waves in marine and coastal environments. *PhD, Technical University of Crete*, 2013. *cité p. 98*

[106] M. Kazolea, A. I. Delis, and C. E. Synolakis. Numerical treatment of wave breaking on unstructured finite volume approximations for extended Boussinesq-type equations. *Journal of Computational Physics*, 271 :281–305, 2014. *cité p. 44, 46, 47, et 50*

[107] M. Kazolea, A. Filippini, M. Ricchiuto, S. Abadie, M. M. Medina, D. Morichon, C. Journeau, R. Marcer, K. Pons, S. LeRoy, et al. Wave propagation, breaking, and overtopping on a 2d reef : A comparative evaluation of numerical codes for tsunami modelling. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 2017. *cité p. 44*

[108] M. Kazolea and M. Ricchiuto. On wave breaking for Boussinesq-type models. *Ocean Modelling*, 123 :16–39, 2018. *cité p. 44, 47, 50, 179, et 184*

[109] A. B. Kennedy, Q. Chen, J. T. Kirby, and R. A. Dalrymple. Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. I : 1D. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 126(1) :39–47, 2000. *cité p. 44, 46, et 50*

[110] G. Khakimzyanov, D. Dutykh, O. Gusev, N. Shokina, A. Org, et al. Dispersive shallow water wave modelling. Part II : Numerical simulation on a globally flat space. *arXiv preprint arXiv :1707.01301*, 2017. *cité p. 18*

[111] K. O. Kim, B. H. Choi, E. Pelinovsky, and K. T. Jung. Three-dimensional simulation of 2011 East Japan-off Pacific coast earthquake tsunami induced vortex flows in the Oarai port. *Journal of Coastal Research*, 65(sp1) :284–289, 2013. *cité p. 103*

[112] J. T. Kirby, F. Shi, B. Tehranirad, J. C. Harris, and S. T. Grilli. Dispersive tsunami waves in the ocean : Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects. *Ocean Modelling*, 62 :39–55, 2013. *cité p. 14, 159, et 163*

[113] T. Kloczko. *Développement d'une méthode implicite sans matrice pour la simulation 2D-3D des écoulements compressibles et faiblement compressibles en maillages non-structurés*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, 2006. *cité p. 89, 107, et 119*

[114] D. A. Knoll and D. E. Keyes. Jacobian-free Newton–Krylov methods : a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193(2) :357–397, 2004. *cité p. 90 et 91*

[115] N. Kolgan. Finite-difference schemes for computation of three dimensional solutions of gas dynamics and calculation of a flow over a body under an angle of attack. *Uchenye Zapiski TsaGI [Sci. Notes Central Inst. Aerodyn]*, 6(2) :1–6, 1975. *cité p. 70*

[116] V. Kolgan. Application of the minimum-derivative principle in the construction of finite-difference schemes for numerical analysis of discontinuous solutions in gas dynamics. *Uchenye Zapiski TsaGI [Sci. Notes Central Inst. Aerodyn]*, 3(6) :68–77, 1972. *cité p. 70*

[117] C. Lachaume, B. Biausser, P. Fraunié, S. T. Grilli, S. Guignard, et al. Modeling of breaking and post-breaking waves on slopes by coupling of BEM and VOF methods. In *The Thirteenth International Offshore and Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore and Polar Engineers, 2003. *cité p. 215*

[118] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique : Physique statistique*. Ellipses, 1994. *cité p. 56*

[119] D. Lannes. *The water waves problem : mathematical analysis and asymptotics*, volume 188. American Mathematical Soc., 2013. *cité p. 19*

[120] D. Lannes and P. Bonneton. Derivation of asymptotic two-dimensional time-dependent equations for surface water wave propagation. *Physics of Fluids (1994-present)*, 21(1) :016601, 2009. *cité p. 32 et 41*

[121] T. Lay, H. Kanamori, C. J. Ammon, M. Nettles, S. N. Ward, R. C. Aster, S. L. Beck, S. L. Bilek, M. R. Brudzinski, R. Butler, et al. The great Sumatra-Andaman earthquake of 26 december 2004. *Science*, 308(5725) :1127–1133, 2005. *cité p. 15*

[122] M. Le Gal. *Theoretical and numerical study of seismic tsunami dynamics*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2017. *cité p. 15*

[123] O. Le Métayer, S. Gavrilyuk, and S. Hank. A numerical scheme for the Green–Naghdi model. *Journal of Computational Physics*, 229(6) :2034–2045, 2010. *cité p. 174 et 175*

[124] F. Lemarié, P. Marchesiello, L. Debreu, and E. Blayo. Sensitivity of Ocean-Atmosphere Coupled Models to the Coupling Method : Example of Tropical Cyclone Erica. 2014. *cité p. 216*

[125] S. LeMartelot, B. Nkonga, and R. Saurel. Liquid and liquid–gas flows at all speeds. *Journal of Computational Physics*, 255 :53–82, 2013. *cité p. 112 et 119*

[126] R. J. LeVeque. Numerical Methods for Conservation Laws. 1992. *BirkhaØ user Basel*. *cité p. 87 et 92*

[127] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002. *cité p. 66, 70, 88, et 97*

[128] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002. *cité p. 207*

[129] R. J. LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems*, volume 98. Siam, 2007. *cité p. 86*

[130] Y. Li and F. Raichlen. Energy balance model for breaking solitary wave runup. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 129(2) :47–59, 2003. *cité p. 198*

[131] Q. Liang, J. Hou, and R. Amouzgar. Simulation of Tsunami propagation using adaptive Cartesian grids. *Coastal Engineering Journal*, 57(4) :1550016–1, 2015. *cité p. 103*

[132] P.-L. Lions. On the Schwarz alternating method. III : a variant for nonoverlapping subdomains. In *Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, volume 6, pages 202–223. SIAM Philadelphia, PA, 1990. *cité p. 216*

[133] L. Lobovskỳ, E. Botia-Vera, F. Castellana, J. Mas-Soler, and A. Souto-Iglesias. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break. *Journal of Fluids and Structures*, 48 :407–434, 2014. *cité p. 201, 202, et 203*

[134] A. Loevenbruck, L. Arpaia, R. Ata, A. Gailler, Y. Hayashi, H. Hébert, P. Heinrich, M. Le Gal, A. Lemoine, S. Le Roy, K. Pons, et al. Joint numerical study of the 2011 tohoku-oki tsunami : comparative propagation simulations and high resolution coastal models. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 19, page 14824, 2017. *cité p. 160*

[135] F. Løvholt, G. Kaiser, S. Glimsdal, L. Scheele, C. B. Harbitz, et al. Modeling propagation and inundation of the 11 March 2011 Tohoku tsunami. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 12(4) :1017, 2012. *cité p. 159 et 163*

[136] F. Løvholt, G. Pedersen, and S. Glimsdal. Coupling of Dispersive Tsunami Propagation and Shallow Water Coastal. *Open Oceanography Journal*, 4 :71–82, 2010. *cité p. 215*

[137] C. Lugni, M. Brocchini, and O. Faltinsen. Evolution of the air cavity during a depressurized wave impact. ii. the dynamic field. *Physics of fluids*, 22(5) :056102, 2010. *cité p. 28 et 57*

[138] H. Luo, J. D. Baum, and R. Löhner. An accurate, fast, matrix-free implicit method for computing unsteady flows on unstructured grids. *Computers & fluids*, 30(2) :137–159, 2001. *cité p. 89*

[139] H. Luo, J. D. Baum, and R. Lohner. Extension of Harten-Lax-van Leer Scheme for Flows at All Speeds. *AIAA journal*, 43(6) :1160–1166, 2005. *cité p. 90*

[140] P. J. Lynett, D. Swigler, S. Son, D. Bryant, and S. Socolofsky. Experimental study of solitary wave evolution over a 3D shallow shelf. *Coastal Engineering Proceedings*, 1(32) :1, 2011. *cité p. 156*

[141] Z. Ma, D. Causon, L. Qian, C. Mingham, and P. M. Ferrer. Numerical investigation of air enclosed wave impacts in a depressurised tank. *Ocean Engineering*, 123 :15–27, 2016. *cité p. 208*

[142] Z. Ma, D. Causon, L. Qian, C. Mingham, H. Gu, and P. M. Ferrer. A compressible multiphase flow model for violent aerated wave impact problems. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 470. The Royal Society, 2014. *cité p. 28, 191, et 196*

[143] Z. Ma, D. Causon, L. Qian, C. Mingham, T. Mai, D. Greaves, and A. Raby. Pure and aerated water entry of a flat plate. *Physics of Fluids (1994-present)*, 28(1) :016104, 2016. *cité p. 24, 28, 189, et 209*

[144] P. A. Madsen, D. R. Fuhrman, and H. A. Schäffer. On the solitary wave paradigm for tsunamis. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 113(C12), 2008. *cité p. 19*

[145] P. A. Madsen, R. Murray, and O. R. Sørensen. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal engineering*, 15(4) :371–388, 1991. *cité p. 18 et 32*

[146] R. Marcer, K. Pons, C. Journeau, and F. Golay. SHORT NOTE : Validation of CFD models for tsunami simulation. TANDEM Project. *Revue Paralia*, 8, 2015. *cité p. 64*

[147] R. Marcer, K. Pons, C. Journeau, and F. Golay. Tsunami modelling. Validation of EOLE CFD code on academic test cases. *XIV èmes Journées Nationales Génie Côtier-Génie Civil, Toulon*, 2016. *cité p. 16*

[148] P. S. marquis de Laplace. *Traité de mécanique céleste*, volume 1. Crapelet, 1799. *cité p. 32*

[149] A. Marshak and A. Davis. *3D radiative transfer in cloudy atmospheres*. Springer Science & Business Media, 2005. *cité p. 18*

[150] V. Martin. *Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour des équations de l'océanographie*. PhD thesis, Université Paris-Nord-Paris XIII, 2003. *cité p. 216*

[151] M. Martin-Medina, S. Abadie, C. Mokrani, and D. Morichon. Numerical simulation of flip-through impacts of variable steepness on a vertical breakwater. *Applied Ocean Research*, 75 :117–131, 2018. *cité p. 26*

[152] J. Massoni, R. Saurel, B. Nkonga, and R. Abgrall. Some models and eulerian methods for interface problems between compressible fluids with heat transfer. *International journal of heat and mass transfer*, 45(6) :1287–1307, 2002. *cité p. 60 et 64*

[153] M. M. Medina. *Étude de l'impact d'un tsunami sur une structure côtière : cas particulier du tsunami de Tohoku et rôle de l'impact du type "flip-through"*. PhD thesis, UPPA, 2017. *cité p. 170*

[154] C. C. Mei, M. Stiassnie, and D. K.-P. Yue. *Theory and applications of ocean surface waves : linear aspects*, volume 23. World scientific, 2005. *cité p. 19*

[155] F. Miczek, F. K. Röpke, and P. V. Edelmann. New numerical solver for flows at various Mach numbers. *Astronomy & Astrophysics*, 576 :A50, 2015. *cité p. 120*

[156] J. Miles and R. Salmon. Weakly dispersive nonlinear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 157 :519–531, 1985. *cité p. 32*

[157] S. Mishra. Numerical Methods for Conservation Laws and Related Equations. *Lecture Notes, ETH Zurich*, 2010. *cité p. 74*

[158] D. Mitsotakis. A simple introduction to water waves. working paper or preprint, 2013. *cité p. 32*

[159] C. Mokrani. *Impacts de vagues déferlantes sur un obstacle vertical. Modèle théorique et calcul numérique des pics de pression.* PhD thesis, Pau, 2012. *cité p. 24*

[160] J. J. Monaghan. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of computational physics*, 110(2) :399–406, 1994. *cité p. 190*

[161] S. Monserrat, A. Rabinovich, et al. Meteotsunamis : atmospherically induced destructive ocean waves in the tsunami frequency band. *Natural Hazards and Earth System Science*, 6(6) :1035–1051, 2006. *cité p. 17*

[162] N. Mori and S. Kakuno. Aeration and bubble measurements of coastal breaking waves. *Fluid Dynamics Research*, 40(7-8) :616, 2008. *cité p. 27 et 207*

[163] N. Mori, T. Suzuki, and S. Kakuno. Experimental study of air bubbles and turbulence characteristics in the surf zone. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 112(C5), 2007. *cité p. 27 et 207*

[164] J. P. Morris, P. J. Fox, and Y. Zhu. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH. *Journal of computational physics*, 136(1) :214–226, 1997. *cité p. 190*

[165] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *Journal of Computational Physics*, 202(2) :664–698, 2005. *cité p. 61*

[166] A. Murrone and H. Guillard. Behavior of upwind scheme in the low Mach number limit : III. Preconditioned dissipation for a five equation two phase model. *Computers & Fluids*, 37(10) :1209–1224, 2008. *cité p. 110 et 119*

[167] B. Mutlu Sumer, F. Hatipoglu, J. Fredsøe, and S. Kaan Sumer. The sequence of sediment behaviour during wave-induced liquefaction. *Sedimentology*, 53(3) :611–629, 2006. *cité p. 28*

[168] Y. Okada. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the seismological society of America*, 75(4) :1135–1154, 1985. *cité p. 15 et 159*

[169] K. Oßwald, A. Siegmund, P. Birken, V. Hannemann, and A. Meister. L2Roe : a low dissipation version of Roe's approximate Riemann solver for low Mach numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 81(2) :71–86, 2016. *cité p. 120*

[170] D. H. Peregrine. Long waves on a beach. *Journal of fluid mechanics*, 27(04) :815–827, 1967. *cité p. 32*

[171] M. Perlin, W. Choi, and Z. Tian. Breaking waves in deep and intermediate waters. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45 :115–145, 2013. *cité p. 44, 49, et 50*

[172] L.-R. Plumerault. *Modélisation numérique d'impacts de vagues sur un mur : prise en compte de la présence d'air dans l'eau.* PhD thesis, Laboratoire de Sciences Appliquées au Génie Civil et Côtier, 2009. *cité p. 62*

[173] L.-R. Plumerault, D. Astruc, P. Villedieu, and P. Maron. A numerical model for aerated-water wave breaking. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69(12) :1851–1871, 2012. *cité p. 28, 190, 191, 192, et 193*

[174] K. Pons and M. Ersoy. Adaptive mesh refinement method. Part 1 : Automatic thresholding based on a distribution function. working paper or preprint, June 2016. *cité p. 144, 146, 147, et 148*

[175] K. Pons, M. Ersoy, F. Golay, and R. Marcer. Adaptive mesh refinement method. Part 2 : Application to tsunamis propagation. working paper or preprint, July 2016. *cité p. 144, 148, 156, et 157*

[176] K. Pons, F. Golay, and R. Marcer. Adaptive Mesh Refinement Method Applied to Shallow Water Model : A Mass Conservative Projection. In *Topical Problems of Fluid Mechanics 2017*, Prague, Czech Republic, Feb. 2017. Institute of Thermomechanics AS CR v.v.i. *cité p. 144, 150, 151, et 156*

[177] K. Pons, C. Journeau, R. Marcer, and F. Golay. Calculs CFD de propagation et d'impact de vague en zone côtière Projet TANDEM. In *Rencontres Universitaires de Génie Civil, Bayonne*, 2015. *cité p. 64*

[178] K. Pons, R. Marcer, and F. Golay. The Saint-Venant model for tsunami propagation simulation : Application to the 2011 Tohoku event. *XIV èmes Journées Nationales Génie Côtier-Génie Civil, Toulon*, 2016. *cité p. 160*

[179] S. B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2001. *cité p. 44*

[180] S. Popinet. Quadtree-adaptive tsunami modelling. *Ocean Dynamics*, 61(9) :1261–1285, 2011. *cité p. 149 et 157*

[181] S. Popinet. Adaptive modelling of long-distance wave propagation and fine-scale flooding during the Tohoku tsunami. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 12(4) :1213, 2012. *cité p. 159 et 163*

[182] S. Popinet. A quadtree-adaptive multigrid solver for the Serre–Green–Naghdi equations. *Journal of Computational Physics*, 302 :336–358, 2015. *cité p. 159 et 163*

[183] W. J. Pringle, N. Yoneyama, and N. Mori. Two-way coupled long wave-RANS model : Solitary wave transformation and breaking on a plane beach. *Coastal Engineering*, 114 :99–118, 2016. *cité p. 216*

[184] A. Rafiee, D. Dutykh, and F. Dias. Numerical simulation of wave impact on a rigid wall using a two–phase compressible sph method. *Procedia IUTAM*, 18 :123–137, 2015. *cité p. 26*

[185] G. Richard. *Elaboration d'un modèle d'écoulements turbulents en faible profondeur : application au ressaut hydraulique et aux trains de rouleaux*. PhD thesis, Aix-Marseille, 2013. *cité p. 22 et 42*

[186] G. L. Richard and S. L. Gavrilyuk. A new model of roll waves : comparison with Brock's experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 698 :374–405, 2012. *cité p. 42 et 46*

[187] F. Rieper. A low-Mach number fix for Roe's approximate Riemann solver. *Journal of Computational Physics*, 230(13) :5263–5287, 2011. *cité p. 112, 120, 130, et 142*

[188] P. L. Roe. Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Annual review of fluid mechanics*, 18(1) :337–365, 1986. *cité p. 103*

[189] V. Roeber and K. F. Cheung. Boussinesq-type model for energetic breaking waves in fringing reef environments. *Coastal Engineering*, 70 :1–20, 2012. *cité p. 44 et 46*

[190] J. Sainte-Marie and M.-O. Bristeau. Derivation of a non-hydrostatic shallow water model ; Comparison with Saint-Venant and Boussinesq systems. *arXiv preprint arXiv :0802.0250*, 2008. *cité p. 32*

[191] J. Sasaki, K. Ito, T. Suzuki, R. U. A. Wiyono, Y. Oda, Y. Takayama, K. Yokota, A. Furuta, and H. Takagi. Behavior of the 2011 Tohoku earthquake tsunami and resultant damage in Tokyo Bay. *Coastal Engineering Journal*, 54(01) :1250012, 2012. *cité p. 159*

[192] K. Satake, Y. Fujii, T. Harada, and Y. Namegaya. Time and space distribution of coseismic slip of the 2011 Tohoku earthquake as inferred from tsunami waveform data. *Bulletin of the seismological society of America*, 103(2B) :1473–1492, 2013. *cité p. 15, 159, et 161*

[193] R. Saurel and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150(2) :425–467, 1999. *cité p. 56, 58, et 59*

[194] R. Saurel and R. Abgrall. A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(3) :1115–1145, 1999. *cité p. 58 et 64*

[195] R. Saurel, A. Chinnayya, and Q. Carmouze. Modelling compressible dense and dilute two-phase flows. *Physics of fluids*, 29(6) :063301, 2017. *cité p. 66*

[196] R. Saurel and C. Pantano. Diffuse-interface capturing methods for compressible two-phase flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50 :105–130, 2018. *cité p. 57*

[197] R. Saurel, F. Petitpas, and R. A. Berry. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 228(5) :1678–1712, 2009. *cité p. 61, 62, 63, 189, 194, 195, 211, et 229*

[198] F. J. Seabra-Santos, D. P. Renouard, and A. M. Temperville. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, 176 :117–134, 1987. *cité p. 32*

[199] F. Serre. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, (6) :830–872, 1953. *cité p. 32 et 47*

[200] S. Shafiei, B. W. Melville, and A. Y. Shamseldin. Experimental investigation of tsunami bore impact force and pressure on a square prism. *Coastal Engineering*, 110 :1–16, 2016. *cité p. 23 et 25*

[201] H. Shamsborhan. *Développement d'une méthode de mesure de la célérité du son en écoulement diphasique application aux écoulements cavitants*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, 2009. *cité p. 61*

[202] G. Shao, X. Li, C. Ji, and T. Maeda. Focal mechanism and slip history of the 2011 M w 9.1 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake, constrained with teleseismic body and surface waves. *Earth, planets and space*, 63(7) :9, 2011. *cité p. 15*

[203] K. Sitanggang and P. Lynett. Multi-scale simulation with a hybrid Boussinesq-RANS hydrodynamic model. *International journal for numerical methods in fluids*, 62(9) :1013–1046, 2010. *cité p. 216*

[204] P. Smit, M. Zijlema, and G. Stelling. Depth-induced wave breaking in a non-hydrostatic, near-shore wave model. *Coastal Engineering*, 76 :1–16, 2013. *cité p. 47*

[205] S. Son, P. J. Lynett, and D.-H. Kim. Nested and multi-physics modeling of tsunami evolution from generation to inundation. *Ocean Modelling*, 38(1) :96–113, 2011. *cité p. 217*

[206] S. Spekreijse. Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws. *Mathematics of Computation*, 49(179) :135–155, 1987. *cité p. 92*

[207] P. Stansell and C. MacFarlane. Experimental investigation of wave breaking criteria based on wave phase speeds. *Journal of physical oceanography*, 32(5) :1269–1283, 2002. *cité p. 49*

[208] M. Stive. Velocity and pressure field of spilling breakers. In *Coastal Engineering 1980*, pages 547–566. 1980. *cité p. 45 et 47*

[209] C. Su and C. Gardner. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries Equation and Burgers Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 10(3) :536–539, 1969. *cité p. 32 et 41*

[210] D. Sun, C. Yan, F. Qu, and R. Du. A robust flux splitting method with low dissipation for all-speed flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 84(1) :3–18, 2017. *cité p. 120*

[211] P. K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM journal on numerical analysis*, 21(5) :995–1011, 1984. *cité p. 92, 93, 94, et 130*

[212] C. E. Synolakis. The runup of solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 185 :523–545, 1987. *cité p. 222*

[213] D. R. Tappin, S. T. Grilli, J. C. Harris, R. J. Geller, T. Masterlark, J. T. Kirby, F. Shi, G. Ma, K. Thingbaijam, and P. M. Mai. Did a submarine landslide contribute to the 2011 Tohoku tsunami ? *Marine Geology*, 357 :344–361, 2014. *cité p. 159*

[214] M. Tayachi. *Couplage de modèles de dimensions hétérogènes et application en hydrodynamique*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2013. *cité p. 216*

[215] V. Teshukov. Gas-dynamic analogy for vortex free-boundary flows. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 48(3) :303–309, 2007. *cité p. 46*

[216] B. Thornber, A. Mosedale, D. Drikakis, D. Youngs, and R. J. Williams. An improved reconstruction method for compressible flows with low Mach number features. *Journal of computational Physics*, 227(10) :4873–4894, 2008. *cité p. 120 et 142*

[217] M. Tissier, P. Bonneton, F. Marche, F. Chazel, and D. Lannes. Nearshore dynamics of tsunami-like undular bores using a fully nonlinear Boussinesq model. *Journal of Coastal Research*, (64) :603, 2011. *cité p. 20*

[218] M. Tissier, P. Bonneton, F. Marche, F. Chazel, and D. Lannes. A new approach to handle wave breaking in fully non-linear Boussinesq models. *Coastal Engineering*, 67 :54–66, 2012. *cité p. 44, 46, 47, 50, et 175*

[219] T. Tomiczek, A. Prasetyo, N. Mori, T. Yasuda, and A. Kennedy. Effects of a Macro-Roughness Element on Tsunami Wave Amplification, Pressures, and Loads : Physical Model and Comparison to Japanese and US Design Equations. *Coastal Engineering Journal*, 59(1) :1750004–1, 2017. *cité p. 25*

[220] E. F. Toro. *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley New York, 2001. *cité p. 82*

[221] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013. *cité p. 70, 72, 82, 87, 92, 97, 98, 102, 110, et 131*

[222] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock waves*, 4(1) :25–34, 1994. *cité p. 84*

[223] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of computational physics*, 72(2) :277–298, 1987. *cité p. 110 et 118*

[224] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of computational Physics*, 32(1) :101–136, 1979. *cité p. 70 et 92*

[225] B. Van Leer. Upwind and high-resolution methods for compressible flow : From donor cell to residual-distribution schemes. In *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, page 3559, 2006. *cité p. 70*

[226] M. Vázquez-Cendón and E. Toro. Exact solution of some hyperbolic systems with source terms. In *Proceedings of the royal society of London A : mathematical, physical and engineering sciences*, volume 459, pages 263–271. The Royal Society, 2003. *cité p. 185*

[227] G. Volpe. Performance of compressible flow codes at low Mach numbers. *AIAA journal*, 31(1) :49–56, 1993. *cité p. 110*

[228] T. Von Karman. The impact on seaplane floats during landing. 1929. *cité p. 23*

[229] M. A. Walkley. *A numerical method for extended Boussinesq shallow-water wave equations*. PhD thesis, The University of Leeds, 1999. *cité p. 32*

[230] G. Wei, J. T. Kirby, S. T. Grilli, and R. Subramanya. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 294 :71–92, 1995. *cité p. 32*

[231] G. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley and Sons, 1999. *cité p. 32*

[232] C. H. Wu and H. Nepf. Breaking criteria and energy losses for three-dimensional wave breaking. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 107(C10), 2002. *cité p. 49*

[233] W. Xie, T. Liu, and B. Khoo. The simulation of cavitating flows induced by underwater shock and free surface interaction. *Applied Numerical Mathematics*, 57(5-7) :734–745, 2007. *cité p. 196 et 197*

[234] H. H.-j. Yeh, I. Robertson, and J. Preuss. *Development of design guidelines for structures that serve as tsunami vertical evacuation sites*, volume 4. Washington State Department of Natural Resources, Division of Geology and Earth Resources, 2005. *cité p. 22 et 23*

[235] J. Zelt. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coastal Engineering*, 15(3) :205–246, 1991. *cité p. 44 et 46*

Kévin PONS

Institut de Mathématiques de Toulon, Université de Toulon

Modélisation des tsunamis : propagation et impact

Cette thèse traite de la modélisation des tsunamis, des grandes échelles de propagation aux impacts sur des structures côtières. Un inventaire des phénomènes physiques associés est établi et des modèles adéquats sont présentés. Une étude numérique avec le modèle de Saint-Venant est effectuée avec le développement d'une méthode de raffinement de maillage à seuil automatique. La simplicité et les performances de l'approche sont démontrées. Pour améliorer la précision des prévisions, un système original approchant le modèle Serre-Green-Nahgdi est investigué. Une méthode pour prendre en compte la dissipation d'énergie au déferlement est proposée. Ce modèle permet d'envisager la modélisation fine de la propagation et de l'arrivée à la côte des tsunamis dispersifs et non linéaires en des temps de calcul acceptables. Les différents types d'impact sur des structures sont modélisés grâce à un modèle diphasique compressible permettant de considérer les écoulements à phases séparées et les milieux aérés. Pour envisager une résolution à tous les régimes, des schémas Tous Mach sont investigués. Un schéma Tous Mach à variation totale limitée est proposé. Grâce à cette approche, des impacts incompressibles et compressibles sont investigués avec le même modèle. Les impacts d'écoulements aérés induisent des pressions moins élevées mais sur des temps plus longs que leurs homologues en phases pures. Bien que le schéma Tous Mach proposé soit moins sujet aux oscillations numériques que les préconditionnements classiques de la littérature, des oscillations non physiques à bas nombre de Mach sont mises en évidence sur certains cas tests. Pour finir, une méthode de couplage entre modèles de propagation et d'impact est proposée, afin de pouvoir simuler un tsunami finement avec des modèles appropriés à chacune de ces phases.

Mot clés : modèles en eau peu profonde, modèle bi-phase, compressible, Tous Mach, dispersion, choc, aération, impact.

Tsunami modeling : propagation and impact

This thesis deals with tsunami modeling, from the large propagation scales to impacts on coastal structures. An inventory of the associated physical phenomena is given and some adequat models are presented. A numerical study is carried out with the Saint-Venant model with the devellopment of an automatic refinment adaptive mesh method. The resolution efficiency and simplicity is justified. To increase the accuracy forecasts, an original system which approximates the Serre-Green-Naghdi model is investigated. A breaking wave method associated with this model is proposed. This dissipative model allows thinking about accurate dispersive non linear tsunamis simulations up to the coast. Several wave impacts on stuctures are investigated with a general two-phase model allowing separate phases as well as aerated impact studies. The all Mach regime numerical difficulties are investigated. A new all Mach scheme with limited total variation bound is proposed. Thanks to this approach, incompressible and compressible impacts are investigated with the same model. Aerated impacts are shown to give smaller impact pressure but on longer time than pure fluid impacts. In spite that the all Mach scheme proposed reduces the numerical oscillations of classical literature preconditionning, some unphysical oscillations are highlighted on some test cases. At the end, a coupling method is proposed in order to accuratly model the propagation and the impact of a tsunami with appropriated models for each phases.

Keywords : shallow water model, two-phase model, compressible, all Mach, dispersion, shock, aeration, impact.