Modélisation d'une interface fluide/solide avec érosion, application à l'érosion interne

Damien Lachouette

▶ **To cite this version:**

Damien Lachouette. Modélisation d'une interface fluide/solide avec érosion, application à l'érosion interne. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université du Sud Toulon Var, 2009. Français. NNT : . tel-00643226

HAL Id: tel-00643226

https://theses.hal.science/tel-00643226

Submitted on 21 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DU SUD TOULON VAR

Modélisation d'une interface fluide/solide avec érosion, application à l'érosion interne

Thèse présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université du Sud Toulon-Var

DISCIPLINE : *Mathématiques appliquées, Mécanique*

par

Damien Lachouette

soutenue publiquement le

18/12/2009

devant le jury composé de :

Dr. Stéphane Bonelli	*Cemagref*	Co-directeur
Pr. Roland Borghi	Université de provence	Examinateur
Pr. Francesco Del Isola	Università di Roma	Examinateur
Dr. Frédéric Golay	*Cemagref & USTV*	Co-directeur
Pr. Angelo Iollo	Université de Bordeaux	Rapporteur
Pr. Marc Médale	Université de provence	Rapporteur
Pr. Pierre Seppecher	Université du Sud Toulon-Var	Directeur de thèse

La destination d'un chercheur dépend de la route qu'il suit.
Mohyiddin Ibn Arabi (1165-1241)

Table des matières

Introduction **1**

1 Le contexte **3**
1.1 Sur les phénomènes d'érosion . . . 3
1.2 Modélisation de l'érosion . . . 8
1.2.1 Lois de conservation dans le volume . . . 8
1.2.2 Lois de conservation sur l'interface . . . 10
1.2.3 Lois de comportement dans le volume . . . 12
1.2.4 Lois de comportement sur l'interface . . . 13
1.3 Une modélisation 1D . . . 15
1.3.1 Présentation du problème . . . 15
1.3.1.1 Écriture axisymétrique intégrée . . . 16
1.3.1.2 Types de suspension . . . 17
1.3.1.3 Écriture finale des équations intégrées . . . 18
1.3.2 Étude numérique . . . 18
1.3.2.1 Schémas utilisés . . . 18
1.3.2.2 Résultats à débit imposé . . . 19
1.3.2.3 Résultats à gradient de pression imposé . . . 26
1.3.3 Conclusions sur le modèle 1D . . . 27
1.4 Discussions et conclusions . . . 28

2 Formulation du problème **29**
2.1 Modélisation des milieux . . . 29
2.1.1 Conservation de la masse . . . 29
2.1.1.1 La masse volumique . . . 29
2.1.1.2 Équation de conservation de la masse . . . 30
2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . 31
2.1.2.1 Remarques préliminaires . . . 31
2.1.2.2 Équation de conservation . . . 31
2.1.2.3 Hypothèses sur les milieux . . . 32
2.2 Méthodes de pénalisation . . . 33
2.2.1 Les méthodes aux domaines fictifs . . . 33
2.2.1.1 Immersed boundary method (IBM) . . . 33
2.2.1.2 Domaines fictifs selon Glowinski . . . 34
2.2.2 Domaines fictifs selon Angot . . . 36
2.3 Système d'équations final . . . 37
2.3.1 Le Système Navier-Stokes . . . 37
2.3.2 Le Système Stokes stationnaire . . . 38
2.4 Discussions et conclusions . . . 38

3 Le suivi d'interface **41**
3.1 Les méthodes de suivi d'interface . . . 41
3.1.1 Les méthodes Lagrangiennes . . . 42
3.1.1.1 Les marqueurs de volume . . . 42
3.1.1.2 Marqueurs de front . . . 43
3.1.1.3 Paramétrisation de l'interface . . . 44
3.1.2 Les méthodes Physique . . . 44
3.1.2.1 Simple line interface calculation (SLIC) . . . 46
3.1.2.2 Central difference (CD) . . . 46
3.1.2.3 Méthode de Parker et Youngs . . . 48
3.1.2.4 Reconstruction d'interface par moindre carré (LVIRA et ELVIRA) . . . 49
3.1.2.5 Conclusion . . . 50
3.1.3 La méthode analytique . . . 51
3.2 La Méthode Level Set . . . 51
3.2.1 Principe de la méthode . . . 52
3.2.2 Méthodes numérique pour lois hyperboliques . . . 53
3.2.2.1 Discrétisation temporelle . . . 53
3.2.2.2 Discrétisation spatiale . . . 55
3.2.3 Algorithmes supplémentaires . . . 56
3.2.3.1 Extension des vitesses . . . 56
3.2.3.2 Redistanciation . . . 57
3.2.3.3 Autre méthode pour la redistanciation : Fast Marching . . . 58
3.3 Discussions et conclusions . . . 62

4 Modélisation numérique **63**
4.1 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes . . . 63
4.1.1 Discrétisation en temps . . . 64
4.1.2 L'algorithme de Lagrangien Augmenté . . . 64
4.1.2.1 Présentation de l'algorithme . . . 64
4.1.2.2 Paramétrage du schéma . . . 65
4.1.3 La formulation Volumes Finis sur maillage MAC . . . 65
4.1.3.1 Le maillage décalé . . . 65
4.1.3.2 Discrétisation des équations . . . 66
4.1.4 L'algorithme du BICGSTAB . . . 69
4.1.4.1 Le schéma . . . 69
4.1.4.2 Préconditionnement . . . 70
4.1.5 Conditions aux limites . . . 70
4.1.5.1 La condition d'adhérence . . . 70
4.1.5.2 La condition d'écoulement . . . 71
4.1.5.3 La condition en pression . . . 72
4.1.5.4 La condition de périodicité . . . 73
4.1.5.5 La condition de symétrie . . . 75
4.2 Organisation du calcul . . . 75
4.2.1 Organisation globale . . . 75
4.2.2 Le calcul de l'érosion . . . 76
4.2.2.1 Le calcul de la contrainte . . . 76
4.2.2.2 Erreur numérique . . . 77
4.2.3 Le calcul de l'écoulement . . . 78

4.3 Discussions et conclusions 78

5 Validation de la modélisation **79**
5.1 Paramétrage et tests préliminaires 79
5.1.1 Paramètres du Lagrangien Augmenté 79
5.1.2 Test du calcul de la vitesse d'érosion 80
5.1.3 Tests de la méthode Level Set 81
5.1.3.1 Disque en rotation 81
5.1.3.2 Disque de Zalesak 83
5.2 Le cas du carré 84
5.3 Le cas de la bille 90
5.3.1 Description du cas 90
5.3.2 Premiers résultats 91
5.3.3 Sensibilité des paramètres 92
5.3.3.1 Le coefficient d'érosion 92
5.3.3.2 La taille du maillage 93
5.3.4 Résultats 3D 95
5.3.5 Comparaison 2D-3D 99
5.4 Amas de billes, homogénéisation 101
5.4.1 Homogénéisation Périodique sur un disque 101
5.4.2 Homogénéisation sur trois billes 105
5.4.3 Homogénéisation 3D 109
5.5 Autre loi d'érosion 112
5.6 Discussions et conclusions 115

6 Application à l'érosion **117**
6.1 Le banc d'érosion interne HET 117
6.1.1 Le cas du canal 117
6.1.1.1 Premiers résultats 2D 119
6.1.1.2 Résultats avec seconde fonction Level Set 122
6.1.1.3 Résultats 3D 126
6.1.2 Le cas de l'ensemble de la cellule d'essai 133
6.2 Suffusion 136
6.3 La pile de pont 142
6.4 Discussions et conclusions 148

Conclusion **149**

Bibliographie **158**

Introduction

La pierre est immortelle... l'érosion aussi.
Yann Bloyet

Un proverbe chinois dit "*Il en est des lois comme des digues : la brèche d'un seul endroit y rend tout le reste presque inutile*", reflétant bien que l'eau trouve toujours les faiblesses d'un ouvrage hydraulique. Dans cette optique nous cherchons à comprendre et simuler les causes de rupture ou simplement d'endommagement de ces ouvrages. Un exemple récent est la destruction des digues côtières de La Nouvelle Orléans en 2005. L'enjeu est de taille, comprendre et analyser les phénomènes causant la destruction des ouvrages. Parmi tout ces phénomènes, l'un des plus dangereux et souvent sournois est l'érosion.

Les phénomènes d'érosion sont une cause majeure dans la rupture des ouvrages hydrauliques tels que les digues ou les barrages. Le territoire compte plus de 10000 km de digues, d'où un enjeu important en terme de risque d'inondation. L'entretien de ces ouvrages n'a pas été identique d'un ouvrage à l'autre et pose donc des problèmes d'ordre généraux pour traiter tous les cas. En outre, il a déjà pu être observé que l'érosion de conduite pouvait être très rapide et qu'une fois initiée, elle ne peut être stoppée.

Une modélisation de ces phénomènes d'érosion est donc essentielle pour en comprendre les mécanismes. Le problème est délicat car l'érosion suppose l'interaction d'un fluide (l'eau généralement) avec un sol. Ce sol peut être vu de diverses manières et l'action de l'eau sur ce sol également. Les bases d'une modélisation ont déjà été posées, mais une approche plus générale est essentielle à une compréhension plus fine des phénomènes. La modélisation des mécanismes de l'érosion doit permettre l'élaboration de solutions pour sécuriser les ouvrages et les rendre moins sensibles à ces phénomènes.

Cette thèse traitera dans un premier temps de l'état de l'art en matière de modélisation de l'érosion. Le point de départ du cadre de l'étude est général, celui des ouvrages hydrauliques et conduit vers le point de vue plus particulier de la modélisation d'interface fine avec érosion. Le choix d'une modélisation à l'aide d'interface fine s'explique par les matériaux utilisés comme sol. Les sols considérés ici sont des argiles donc cohésives et imperméables. Les premiers résultats monodimensionnels obtenus dans des études précédentes seront alors présentés.

Le deuxième chapitre propose une reformulation du problème sous des hypothèses simplificatrices de suspension diluée permettant de s'affranchir de la résolution des lois de conservation sur la phase solide. Le fluide sera alors considéré comme une suspension diluée de particules et le sol comme un milieu continu homogène et rigide. Cette reformulation s'attachera à décrire de manière unifiée le comportement des différents milieux. Ceci afin d'en simplifier la mise en œuvre numérique.

Le troisième chapitre contient une revue des méthodes de suivi d'interface ainsi que la description détaillée de la méthode Level Set qui sera utilisée pour les calculs numériques. Cette méthode permet de localiser les milieux et sera utilisée directement dans les équations de conservation. Elle permet aussi d'introduire l'évolution de l'interface par érosion. L'importance est ici d'avoir une méthode capable de décrire finement la position et l'évolution des différents milieux tout en minimisant les calculs.

Une description des méthodes numériques employées pour la résolution de l'écoulement sera présentée dans le quatrième chapitre ainsi que l'organisation globale du calcul. Les cinétiques des deux phénomènes écoulement et érosion sont telles qu'il est possible de découpler leur calcul. L'écoulement sera donc traité par une méthode des volumes finis sur maillage décalé alors que l'érosion sera traitée par différences finies et schémas d'ordre élevés.

Le cinquième chapitre contient les résultats numériques de validation de la modélisation. Des cas permettent de valider certaines parties du calcul. Puis seront traités des cas académiques permettant de mettre en lumière les diverses modularités du modèle.

Finalement, le dernier chapitre présente des exemples illustratifs tels que le Hole Erosion Test, la suffusion ou encore l'érosion d'un lit de rivière autour d'une pile de pont.

Chapitre 1

Le contexte

A chaque époque, (la science) voudrait dévorer une vérité qui la gêne.
Joseph Arthur, comte de Gobineau (1816-1882)

Les domaines de l'hydraulique fluviale et du transport sédimentaire proposent une représentation globale, intégrant érosion, transport et accrétion. Les modèles sont basés sur une description intégrée sur l'épaisseur de l'écoulement à surface libre ([Chanson, 1999] ; [Graf, 1971]). Même dans le cadre de modélisations fines comme celles de Frenette [Frenette, 1996] ou de Savioli [Savioli, 2000], la question du transport est privilégiée par rapport à celle de l'érosion. Dans le domaine des barrages, l'état de l'art est décrit par Singh [Singh, 1996] : les approches sont du même type. Dans le domaine pétrolier, la question de la venue de sable lors du procédé d'extraction de l'huile lourde est à l'origine de modélisations proposées par Papamichos et Vardoulakis, dans le cadre de la poromécanique et de la théorie des mélanges ([Papamichos *et al.*, 2001] ; [Papamichos *et al.*, 2006] ; [Papamichos et Vardoulakis, 2005] ; [Vardoulakis *et al.*, 1996] ; [Vardoulakis *et al.*, 2001] ; [Vardoulakis, 2004]). Ces modélisations décrivent l'augmentation de porosité d'un sol soumis à une érosion par écoulement interne. Elles introduisent une troisième phase de solide fluidisé, qui représente une transition régulière entre solide et fluide. Ces trois phases sont en interaction via les équations de conservation. Un terme source dans les équations de conservation de masse décrit l'érosion. Cette approche a été validée sur des sols granulaires (sans cohésion), pour un écoulement laminaire. Notre approche est originale, au sens où nous ne considérons que deux phases (solide et fluide) séparées par une interface singulière (de discontinuité), et non par une troisième phase (solide fluidisé). Les champs (contrainte, pression, vitesse, ...) sont discontinus sur l'interface. De chaque côté de l'interface, le milieu est diphasique : d'un côté le sol, de l'autre côté l'écoulement. Le point clé est l'utilisation des équations de saut.

1.1 Sur les phénomènes d'érosion

Le domaine du transport sédimentaire a été fécond, depuis plusieurs décennies, en travaux portant sur l'érosion d'un fond mobile sous un écoulement à surface libre ([Chanson, 1999] ; [Graf, 1971] [Raudkivi, 1998] ; [Yalin, 1977] ; [Ouriemi, 2007]). Ce phénomène est étudié par un très grand nombre de laboratoires, relevant essentiellement de la mécanique des fluides. Dans ces travaux, le sol est très peu considéré et, pour

l'heure, les modèles d'érosion pour des sols fins avec cohésion sont purement empiriques, sachant qu'il n'existe pas d'essais de laboratoire adaptés pour caractériser la sensibilité d'un tel sol à l'érosion. De plus, il y a souvent confusion entre transport sédimentaire et érosion : en hydraulique fluviale, l'érosion est vue comme un gradient spatial de capacité de transport, soit un bilan (assez grossier) entre détachement, transport et dépôt. Cette vision n'a pas été retenue pour cette étude car trop globale. En ce qui concerne les ouvrages hydrauliques et l'érosion interne, la question est ancienne et la préoccupation est majeure. Dans le bulletin de Barrages&Réservoir édité en 1997 pour le congrès ICOLD (Int. Commission on Larges Dams) de Florence, huit phénomènes de détachement (la boulance, la suffusion, l'érosion régressive, le débourrage, la dissolution, la dispersion, l'entraînement et l'exsolution) et deux types de transport (transport dans un conduit, et transport dans l'espace poreux interparticulaire) ont été identifiés ([Fry, 1997]). Cette classification, illustrée figure 1.1, est essentiellement basée sur des observations de terrain et des raisonnements déductifs. Les phénomènes de filtration, de dépôt et de colmatage, sont absents.

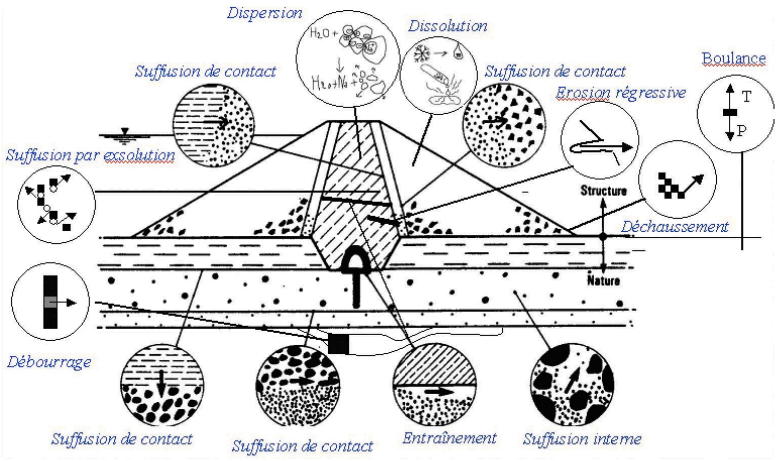


FIGURE 1.1 – *Divers phénomènes initiateurs de l'érosion interne dans un barrage (extrait de [Fry, 1997])*

A Aussois, lors de l'atelier international de 2005, la description a été simplifiée. Quatre mécanismes d'initiation et de progression ont été proposés ([Foster et Fell, 2001]) : érosion par écoulement localisé dans une fissure ou un trou, érosion régressive, suffusion, érosion de contact entre deux sols. Le dépôt et le colmatage ne sont toujours pas considérés. Ces visions sont trop particularisées pour inspirer une modélisation.

Nous n'avons pas connaissance d'une description unifiée de l'érosion, dans un cadre mécanique et conceptuel général. Quelques concepts élémentaires sont proposés afin d'initier la réflexion visant à construire un tel cadre. Le mot *érosion* intègre implicitement :

1. Une phase érodée, solide ;
2. Une phase érosive, fluide ;
3. Une interface séparant ces deux phases ;
4. Un transfert de masse entre ces deux phases.

Pour modéliser une érosion, il faut être capable de modéliser un transfert de masse entre une phase solide et une phase fluide séparées par une interface. Cette interface est :

1. mobile ;
2. géométrique et non matérielle ;
3. traversée par le flux de masse érodée.

Tous les phénomènes d'érosion - même l'érosion interne - peuvent être considérés comme interfaciaux [Bonelli, 2008]. Cela est illustré sur la figure 1.2.

Il ne s'agit que d'un choix d'adaptation de l'échelle de représentation du phénomène. Par exemple, la suffusion, qui implique un mélange de sable et d'argile, doit être vue à l'échelle du grain de sable, pour être considérée comme une érosion d'interface. A une échelle supérieure, qui est celle du Volume Élémentaire Représentatif (VER), la suffusion est une érosion de volume. De même, l'érosion régressive provoquée par une exfiltration d'eau hors d'un sable, doit être vue à une échelle qui assimile le sable à un milieu continu. A une échelle inférieure (celle du grain de sable), l'interface n'est pas définie. L'échelle de représentation pertinente pour considérer que l'érosion étudiée est interfaciale est donc celle qui permet de considérer le solide érodé comme un milieu continu et homogène.

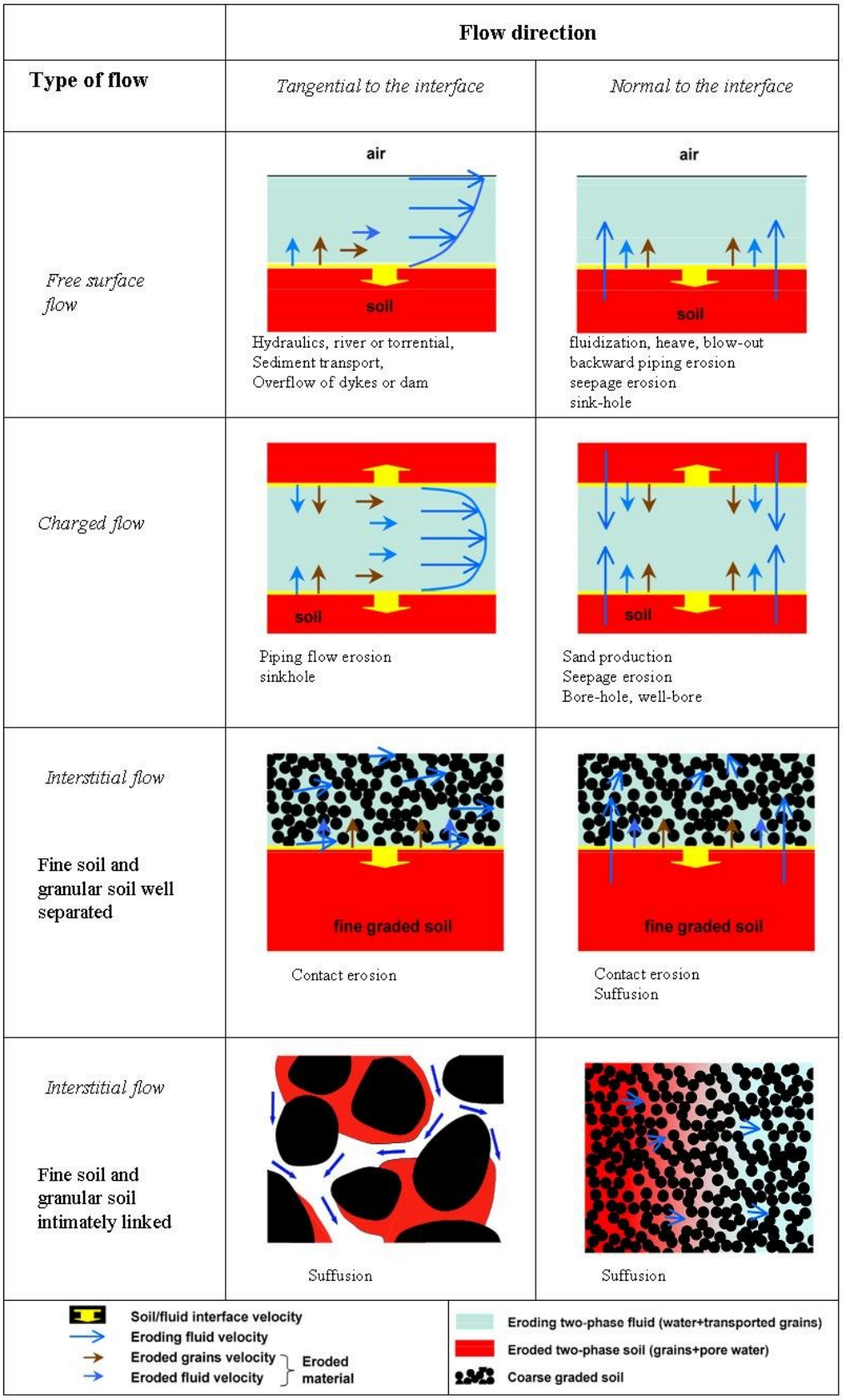


FIGURE 1.2 – *Classification des différents types d'érosion en fonction de la direction de l'écoulement par rapport à l'interface et du type d'écoulement (extrait de [Bonelli, 2008])*

Les trois mécanismes élémentaires auxquels sont soumises les particules sont :

1. **l'érosion**, définie comme un transfert de masse du solide vers le fluide à travers l'interface solide/fluide ;
2. **le transport** de la masse érodée par le fluide ;
3. **l'accrétion**, définie comme un transfert de masse du fluide vers le solide à travers l'interface solide/fluide

Trois types d'érosion sont *a priori* à considérer :

1. **l'érosion physico-chimique**, associée à la force ionique, qui diminue l'intensité des liaisons inter-particulaires ;
2. **l'érosion mécanique**, associée à la contrainte fluide, qui provoque la rupture des liaisons inter-particulaires, le détachement et la mise en mouvement ;
3. **l'érosion thermique**, associée à la température, qui induit un changement de phase solide/fluide.

Plusieurs types de transport et d'accrétion sont également à considérer. Cet effort de représentation unifiée permet de mieux comprendre le sens des mots. Ainsi, le transport sédimentaire intègre en fait érosion, transport (par charriage et suspension) et accrétion. La suffusion intègre érosion des fines (argile) et transport de ces fines à travers l'espace poral. La filtration intègre non seulement le transport des particules à travers l'espace poral et l'accrétion (dénommé dépôt, dont une conséquence ultime est le colmatage), mais aussi l'érosion des particules déposées, dénommé *relargage*.

L'accident historique survenu sur un barrage à cause de l'érosion est la rupture du barrage de Teton au états-unis. Les photos de la figure 1.3 montrent qu'en l'espace de quelques heures, ce qui n'était apparemment qu'une simple fuite à l'aval de l'ouvrage a conduit à la rupture de l'ouvrage. Il s'agissait d'un barrage en remblai dans lequel s'est formée une conduite d'eau. Le gradient de pression engendré par la retenue a causé un écoulement important dans la conduite érodant l'ouvrage et creusant une brèche.

FIGURE 1.3 – *Prises de vue du barrage de Teton, USA, au cours de sa rupture*

Des expérimentations grandeur nature ont été menées en Norvège (c.f. FIGURE 1.4) où l'on a volontairement initié une érosion de conduite pour en mesurer l'évolution.

FIGURE 1.4 – *Évolution de la digue expérimentale de Norvège [Løvoll et Vaskin, 2003]*

Une fois initié, ce phénomène a une évolution très rapide. Il est donc important de pouvoir le modéliser afin d'en comprendre les mécanismes et donc d'élaborer des solutions permettant d'éviter ou de prévoir les ruptures d'ouvrages.

1.2 Modélisation de l'érosion

L'approche retenue dans cette étude est celle de l'interface fine entre le sol et le fluide. En effet, les sols considérés sont des argiles qui peuvent être considérées comme quasi-imperméables. Les approches de Vardoulakis et Papamichos [Vardoulakis *et al.*, 1996], qui considèrent un troisième corps correspondant aux particules fluidisées, sont moins pertinentes. La figure 1.5 montre que dans le cas de sol sableux granulaire, on voit apparaître des couches où l'écoulement passe de manière continue du régime de fluide Newtonien à celui flux de Darcy. Dans le cas des argiles, les particules sont trop petites pour qu'il soit raisonnable de modéliser ces couches. De plus, le caractère imperméable de ces argiles permet de négliger les écoulements de Darcy dans le sol induit par l'écoulement externe.

1.2.1 Lois de conservation dans le volume

Nous nous intéressons à l'érosion d'une interface fluide/sol provoquée par un écoulement turbulent parallèle à cette interface. Le fluide porteur est l'eau, de masse volumique ρ_w (constante). Le matériau érodé est un sol saturé, dont le constituant solide a une masse volumique ρ_p (constante). Le fluide érosif est le mélange eau+matériau érodé. Une modélisation continue est utilisée pour représenter les particules érodées puis trans-

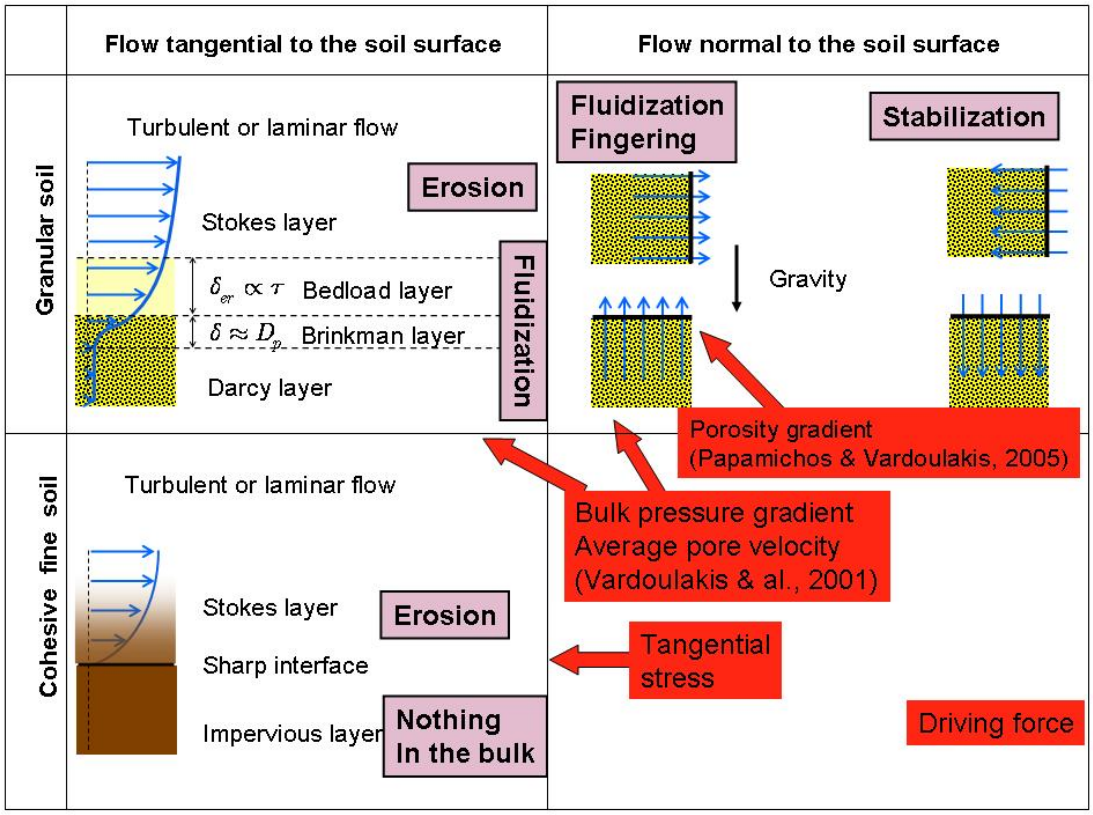


FIGURE 1.5 – *l'érosion est vue de différentes manière en fonction du type de sol*

portées. Les deux phases sont traitées comme des milieux continus superposés. Ces deux milieux continus forment une partition de l'espace suivant la fraction massique de solide $Y = \frac{dM_s}{dM_{total}}$. Une information équivalente à la fraction massique est la fraction volumique $\phi = \frac{dV_s}{dV_{total}}$. Dans le sol, la fraction volumique est appelée la compacité et est reliée à la porosité ν du milieu par $\phi = 1 - \nu$. Les deux grandeurs équivalentes Y et ϕ sont reliées par :

$$\rho_p \phi = \rho Y \tag{1.1}$$

où ρ est la masse volumique du fluide diphasique, $\overrightarrow{u}$ la vitesse barycentrique massique de l'écoulement et $\overrightarrow{j}$ le flux massique de diffusion de particules au sein de l'écoulement.

Ces grandeurs relatives au mélange peuvent être définies comme suit :

$$\rho = \left(\frac{Y}{\rho_p} + \frac{1-Y}{\rho_w} \right)^{-1} = \phi \rho_p + (1-\phi)\rho_w \tag{1.2}$$

$$\overrightarrow{u} = Y \overrightarrow{u}_p + (1-Y)\overrightarrow{u}_w \tag{1.3}$$

$$\overrightarrow{j} = Y(1-Y)\rho(\overrightarrow{u}_p - \overrightarrow{u}_w) \tag{1.4}$$

Ici, $\overrightarrow{u}_p$ et $\overrightarrow{u}_w$ sont les vitesses moyennes barycentriques (au sens du VER, Volume Élémentaire Représentatif) de déplacement des phases solides et fluides. Le volume de contrôle de l'écoulement diphasique est noté Ω. L'action des forces extérieures de

volume (gravitation) est négligée devant les actions dues à la turbulence. Les équations de conservation de masse totale, de masse solide et de quantité de mouvement total s'écrivent dans Ω :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \overrightarrow{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho Y}{\partial t} + \nabla.(\rho Y \overrightarrow{u}) = -\nabla.\left(\overrightarrow{j}\right) \\ \frac{\partial \rho \overrightarrow{u}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}.(\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{\nabla}.\left(\overline{\overline{T}}\right) \end{array} \tag{1.5}$$

où $\overline{\overline{T}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy dans le mélange. Ces équations sont classiques ([Germain *et al.*, 1983] ; [Lhuillier, 2003] ; [Nigmatulin, 1990] ; [Rajagopal et Tao, 1995] ; [Bonelli *et al.*, 2006]). Le détail de leur obtention est résumé au paragraphe 2.1. Une deuxième équation du mouvement serait en toute rigueur nécessaire, mais l'hypothèse usuelle consistant à négliger les accélérations relatives fluide/solide, fait que cette équation est triviale. Pour être plus précis, on néglige les échanges de quantité de mouvement entre les deux phases (solides en suspension et fluide porteur).

Dans le sol, il est formellement possible de considérer le même système, ce qui permet une écriture unifiée. Afin de rester focalisé sur l'écoulement et sur l'érosion, on considère que le sol est rigide et saturé. Un éventuel écoulement interne est pris en compte et représenté par la vitesse moyenne relative :

$$\overrightarrow{q} = (1-\phi)(\overrightarrow{u}_w - \overrightarrow{u}_p) \tag{1.6}$$

Compte-tenu de la définition de $\overrightarrow{j}$ (1.4), la relation entre $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{q}$ dans le sol est :

$$\overrightarrow{j} = -Y \rho_w \overrightarrow{q} \tag{1.7}$$

1.2.2 Lois de conservation sur l'interface

Le fluide et le sol sont supposés séparés par une interface Γ. D'un côté de Γ, le mélange eau+particules se comporte comme un fluide diphasique en écoulement. De l'autre côté de Γ, ce mélange se comporte comme un milieu poreux saturé. Lors d'une érosion, une fraction de mélange se trouvant du côté sol va traverser l'interface pour être dans le fluide. A deux instants, Γ n'est pas définie par les mêmes particules : ce n'est pas une interface matérielle. On suppose que Γ est une interface de discontinuité géométrique sans épaisseur. D'autres choix sont possibles ([Graziano et Marasco, 2001]). On note $\overrightarrow{n}$ la normale unitaire à Γ, orientée du fluide vers le sol, et $\dot{m}$ le flux de masse totale (eau +solides) traversant l'interface. Les équations de conservation de masse totale, de masse solide et de quantité de mouvement total s'écrivent sur Γ :

$$[\![\dot{m}]\!] = 0 \tag{1.8}$$

$$\dot{m}\,[\![Y]\!] - \left[\!\!\left[\overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}\right]\!\!\right] = 0 \tag{1.9}$$

$$\dot{m}\,[\![\overrightarrow{u}]\!] + \left[\!\!\left[\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n}\right]\!\!\right] = 0 \tag{1.10}$$

Ici, $[\![a]\!]$ représente le saut sur Γ de la grandeur a, défini par $[\![a]\!] = a_{\Gamma_f} - a_{\Gamma_s}$, où a_{Γ_f} est la valeur de a du coté écoulement, et a_{Γ_s} la valeur de a du coté sol. La grandeur $\dot{m}$ est définie comme suit :

$$\dot{m} = \rho(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}).\overrightarrow{n} \tag{1.11}$$

où $\overrightarrow{c}_\Gamma$ est la célérité de l'interface. Là encore, ces équations sont classiques ([Cermelli *et al.*, 2005] ; [Coirier et Nadot-Martin, 2007] ; [Fried et Shen, 1999] ; [Fried et Gurtin, 2004] ; [Morland et Sellers, 2001]).

L'équation (1.8) signifie que la masse qui vient du sol est égale à la masse qui traverse l'interface et à la masse qui va dans l'écoulement, ce qui se traduit de la manière suivante :

$$\underbrace{\rho_{\Gamma_s}(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}_{\Gamma_s}).\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{eau et particules}\\ \text{quittant le sol}}} = \underbrace{\dot{m}}_{\substack{\text{eau et particules}\\ \text{traversant } \Gamma}} = \underbrace{\rho_{\Gamma_f}(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}_{\Gamma_f}).\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{eau et particules}\\ \text{allant dans l'écoulement}}} \tag{1.12}$$

Dans le cas général, l'interface peut être traversée par le flux de Darcy et/ou par le flux de matière érodée. L'expression suivante, équivalente à (1.8), permet de bien distinguer ces deux types de transfert de masse :

$$\underbrace{\dot{m}}_{\substack{\text{eau et particules}\\ \text{traversant } \Gamma}} = \underbrace{\dot{m}_{er}}_{\substack{\text{eau et particules}\\ \text{quittant le sol}\\ \text{par érosion}}} - \underbrace{\rho_f \overrightarrow{q}_{\Gamma_s}.\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{eau et particules quittant le sol}\\ \text{par exfiltration de Darcy}\\ \text{ou entrant dans le sol}\\ \text{par infiltration de Darcy}}} \tag{1.13}$$

Ici, $\dot{m}_{er}$ est le flux total de masse érodée qui traverse l'interface :

$$\dot{m}_{er} = \rho_{\Gamma_s}\left[\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}_s|_{\Gamma_s}\right].\overrightarrow{n} \tag{1.14}$$

Ces définitions sont en cohérence avec le fait que la position de l'interface, à tout instant, est liée à la matrice solide et en aucun cas à l'eau interstitielle ou à l'écoulement externe.

L'équation de saut (1.9) montre qu'une partie du mélange est en advection et l'autre en diffusion, de part et d'autre de l'interface, en proportions différentes. L'écriture suivante, équivalente à (1.9), met cela en évidence :

$$\underbrace{\underbrace{Y_{\Gamma_s}\rho_{\Gamma_s}(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}_{\Gamma_s}).\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{advection relative}\\ \text{côté sol de } \Gamma}} + \underbrace{Y_{\Gamma_s}\rho_f(\overrightarrow{q}_{\Gamma_s}).\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{diffusion}\\ \text{(Darcy)}}}}_{\text{Côté sol de } \Gamma} = \underbrace{\underbrace{Y_{\Gamma_f}\rho_{\Gamma_f}(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}_{\Gamma_f}).\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{advection relative}\\ \text{côté écoulement de } \Gamma}} + \underbrace{\overrightarrow{j}_{\Gamma_f}.\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{diffusion}\\ \text{(particules)}}}}_{\text{Côté fluide de } \Gamma} \tag{1.15}$$

Ceci conduit à l'écriture suivante équivalente à (1.9) :

$$\underbrace{\underbrace{\overrightarrow{j}_{\Gamma_f}.\overrightarrow{n}}_{\substack{\text{Flux massique}\\ \text{total}\\ \text{de diffusion}}}}_{\substack{\text{côté écoulement}}} = \underbrace{\underbrace{\left[Y_{\Gamma_f} - Y_{\Gamma_s}\right]\dot{m}_{er}}_{\substack{\text{Flux massique}\\ \text{de diffusion}\Gamma\\ \text{(érosion)}\Gamma}} + \underbrace{\left(-Y_{\Gamma_f}\rho_f \overrightarrow{q}_{\Gamma_s}.\overrightarrow{n}\right)}_{\substack{\text{Flux massique}\\ \text{de diffusion}\\ \text{(Darcy)}}}}_{\text{Côté Sol}} \tag{1.16}$$

Le vecteur contrainte $\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n}$ se décompose en contrainte normale et tangentielle :

$$\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n} = T_N.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{T}_T, \begin{cases} T_N = \overrightarrow{n}.\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{T}_T = \left[\overline{\overline{\mathbb{1}}} - \overrightarrow{n} \otimes \overrightarrow{n}\right].\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n} \end{cases} \tag{1.17}$$

On procède de même pour la vitesse $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} = u_N.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{u}_T, \begin{cases} u_N = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{u}_T = \left[\overline{\overline{\mathbb{1}}} - \overrightarrow{n} \otimes \overrightarrow{n}\right].\overrightarrow{u} \end{cases} \tag{1.18}$$

On peut donc décomposer la relation de saut (1.10) comme suit :

$$\begin{cases} [\![T_N]\!] = -\dot{m}\,[\![u_N]\!] \\ \left[\!\left[\overrightarrow{T}_T\right]\!\right] = -\dot{m}\,[\![\overrightarrow{u}_T]\!] \end{cases} \tag{1.19}$$

Après quelques calculs, on obtient pour les contraintes normales l'expression suivante, bien connue pour les ondes de choc [Landau et Lifchitz, 1980] et équivalente à (1.19) :

$$[\![T_N]\!] = \dot{m}^2\,[\![\rho^{-1}]\!] \tag{1.20}$$

qui montre que les contraintes normales sont nécessairement discontinues sur Γ lorsque l'interface est traversée par un flux de masse. On ne peut cependant rien conclure à ce stade sur les contraintes tangentielles.

1.2.3 Lois de comportement dans le volume

Deux lois de comportement sont nécessaires, l'une pour le tenseur des contraintes du mélange $\overline{\overline{T}}$, l'autre pour le vecteur de diffusion $\overrightarrow{j}$. Plusieurs pistes peuvent être explorées, comme cela est bien synthétisé par [Germain *et al.*, 1983]. On peut par exemple partir des lois de comportement et des vitesses de déplacement de chaque phase, soient $\overrightarrow{u}_s$ et $\overrightarrow{u}_f$ ([Jackson, 2000] ; [Massoudi *et al.*, 1999]). Bien que le comportement de chaque constituant puisse être considéré comme connu, il est délicat de proposer une loi de comportement pour une phase de particules solides dispersées, qui est vue comme un milieu continu. Nous préférons considérer d'emblée une loi de comportement pour le mélange, défini à partir d'une vitesse moyenne et d'une vitesse relative. Toutefois, nous choisissons de définir le taux de déformation comme le gradient de la vitesse moyenne volumique ([Gilbert, 1987] ; [Lhuillier, 2003]) et non à partir de la vitesse barycentrique (Equ. (1.3)) comme cela est l'usage en mécanique des fluides diphasiques. Une raison essentielle supporte ce choix : un mélange constitué de deux constituants incompressibles est incompressible, or la trace du gradient de vitesse volumique est nulle, ce qui n'est pas le cas du gradient de vitesse barycentrique.

Le taux de déformation est donc défini à partir de la vitesse volumique :

$$\overline{\overline{D}} = (\nabla \hat{u})_{sym} \tag{1.21}$$

où $\hat{u}$ est la vitesse moyenne volumique du mélange définie par :

$$\hat{u} = \phi\,\overrightarrow{u}_p + (1-\phi)\,\overrightarrow{u}_w \tag{1.22}$$

La contrainte est décomposée en parties sphérique et déviatorique :

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{\mathbb{1}}} + \overline{\overline{T}}^d, \begin{cases} p = -\frac{1}{3}\overline{\overline{\mathbb{1}}} : \overline{\overline{T}} \\ \overline{\overline{T}}^d = \left[\overline{\overline{\mathbb{1}}} \otimes \overline{\overline{\mathbb{1}}} - \frac{1}{3}\overline{\overline{\mathbb{1}}} \times \overline{\overline{\mathbb{1}}}\right] . \overline{\overline{T}} \end{cases} \tag{1.23}$$

Nous utilisons un modèle rhéologique quadratique inspiré de celui de [Julien, 1994], qui introduit une viscosité effective qui diverge lorsque la concentration atteint son maximum pour décrire le comportement du mélange :

$$\overline{\overline{T}}^d = 2\mu_{eff}\overline{\overline{D}} \tag{1.24}$$

Ici, μ_{eff} est la viscosité effective de l'écoulement turbulent, fonction de ρ et de la longueur de mélange l_m, toutes deux influencées par la concentration, et du taux de déformation équivalent $\dot{\gamma}$:

$$\mu_{eff} = \rho l_m^2 \dot{\gamma}, \dot{\gamma} = \sqrt{\overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}}} \tag{1.25}$$

Il est essentiel de remarquer que la viscosité effective μ_{eff}, qui est le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement, caractérise l'écoulement et non l'eau : elle n'a aucun rapport avec la viscosité cinématique (moléculaire) de l'eau, et correspond au modèle à longueur de mélange de Prandtl ([Landau et Lifchitz, 1980]).

Les particules de sol sont transportées en suspension : elles sont advectées (c'est à dire déplacées par le fluide porteur) et diffusées et dispersées (c'est à dire réparties spatialement). La différence entre advection et diffusion n'est due qu'à l'échelle de description considérée par rapport au parcours moyen de la particule. L'advection est décrite par le second terme de gauche de la seconde équation de (1.5), tandis que la diffusion est décrite par le terme de droite de la seconde équation de (1.5). On choisit une loi de diffusion isotrope pilotée par le gradient de concentration, avec un coefficient de diffusion effective donné par la viscosité effective :

$$\overrightarrow{j} = -\frac{\mu_{eff}}{S_c}\nabla Y \tag{1.26}$$

où $Sc > 0$ est le nombre de Schmidt (rapport entre le coefficient de diffusion de quantité de mouvement et le coefficient de diffusion de masse).

1.2.4 Lois de comportement sur l'interface

L'interface fluide/sol est immatérielle et mobile. La conséquence de l'approche qui est menée ici est que la connaissance de la position de l'interface est nécessaire pour accéder à la géométrie du sol. Le choix de modélisation est de doter l'interface, qui a une célérité propre, d'une loi de comportement. Ceci sous-entend d'introduire une variable conjuguée et aussi de vérifier que l'entropie a toujours une évolution acceptable vis à vis du second principe de la thermodynamique. Les travaux, basés sur les équations de saut d'énergie et d'entropie, ne sont pas encore aboutis. Notre approche est pour le moment purement empirique sur cette question.

La loi de comportement de l'interface, qui est la loi d'érosion, est de la forme suivante :

$$\dot{m}_{er} = \begin{cases} k_{er}(\tau_{\Gamma_s} - \tau_c) & \text{si } \tau_{\Gamma_s} > \tau_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.27}$$

où τ_c est la contrainte critique (ou seuil) d'érosion et k_{er} est le coefficient de cinétique d'érosion. La contrainte tangentielle sur Γ est :

$$\tau_{\Gamma_s} = \|\overrightarrow{T}_T\| = \sqrt{(\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n})^2 - (\overrightarrow{n}.\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n})^2} \tag{1.28}$$

Cette loi d'érosion est complétée par une seconde équation constitutive sur Γ, qui concerne les vitesses tangentielles, que l'on suppose continues sur Γ :

$$[\![\overrightarrow{u}_T]\!] = 0 \tag{1.29}$$

Cette hypothèse forte doit être confirmée ou infirmée par des observations expérimentales, inexistantes pour le moment. En conséquence, les contraintes tangentielles $\overrightarrow{T}_T$ sont continues sur Γ, et la contrainte tangentielle exercée sur le sol est égale à la contrainte tangentielle de l'écoulement sur Γ :

$$\tau_\Gamma = \tau_{\Gamma_s} = \tau_{\Gamma_f} \tag{1.30}$$

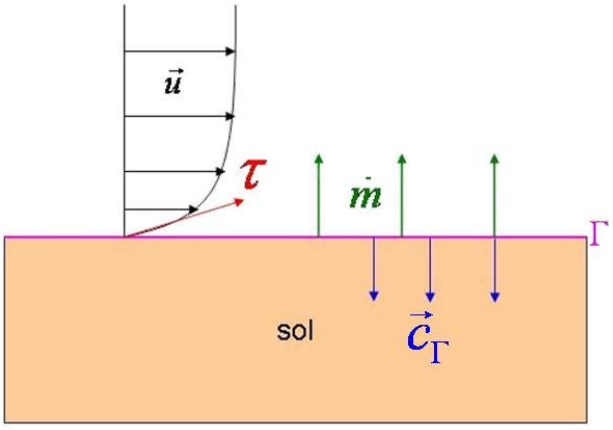


FIGURE 1.6 – *Visualisation des paramètres d'érosion*

Cette loi d'érosion a historiquement été introduite pour les écoulements à surface libre il y plusieurs décennies ; c'est l'expression la plus utilisée ([Ariathurai et Arulanandan, 1986] ; [Chanson, 1999] ; [Frenette, 1996] ; [Graf, 1971] ; [Knapen *et al.*, 2007] ; [Lagrée, 2000] ; [Mitchener et Torfs, 1995] ; [Partheniades, 1965] ; [Raudkivi, 1998] ; [Zhu *et al.*, 2001]). Ou encore dans les écoulements confinée notamment sur le Hole Erosion Test de Fell : [Wan et Fell, 2004a],[Wan et Fell, 2004b]. Elle est ici utilisée dans un cadre plus général *par défaut* suivant les études précédentes [Bonelli, 2003], [Bonelli *et al.*, 2006], [Bonelli et Brivois, 2007], [Bonelli et Marot, 2009], [Brivois, 2005].

Des travaux de recherches expérimentaux et théoriques sont à mener pour comprendre et modéliser l'érosion. Annandale [Annandale, 2007] affirme en particulier que la contrainte tangentielle n'est susceptible de provoquer l'érosion que pour un écoulement laminaire ; lorsque l'écoulement est turbulent, ce sont les fluctuations de pression qui expliquent l'érosion de manière satisfaisante. Par ailleurs, il nous semble problématique que la contrainte normale, qui comprend d'autres termes que la pression, ne soit pas prise en compte. Enfin, les travaux d'Andréotti [Andréotti, 2004] ont montré qu'il

est nécessaire de considérer le gradient spatial du flux de masse érodée pour décrire certains phénomènes observés, comme les rides, assimilables à une rugosité induite.

Le fait que l'influence de la concentration ne soit pas prise en compte semble être une lacune : elle n'est en fait pas rédhibitoire pour les applications envisagées. En effet, nous avons constaté en pratique que les cinétiques d'érosion sont très inférieures aux vitesses d'écoulement, ce qui conduit à un écoulement dilué, caractérisé par une très petite concentration qui n'influence pas le comportement du système. Une description diphasique a permit de mettre cela en évidence de manière rigoureuse.

1.3 Une modélisation 1D

Dans une étude préliminaire à cette thèse, la modélisation des phénomènes de renards hydrauliques avait déjà été réalisée dans une étude mono dimensionnelle du problème [Lachouette *et al.*, 2007][Lachouette *et al.*, 2008]. Les grandes lignes de cette modélisation sont présentées ici car elle sera utilisée pour comparer avec les résultats des méthodes multi-dimensionnelles. De nombreuses simplifications ont été faites.

1.3.1 Présentation du problème

On suppose tout d'abord que la conduite à travers l'ouvrage est rectiligne et à symétrie de révolution de sorte que les relations peuvent s'écrire sous leur forme bi dimensionnelle axisymétrique.

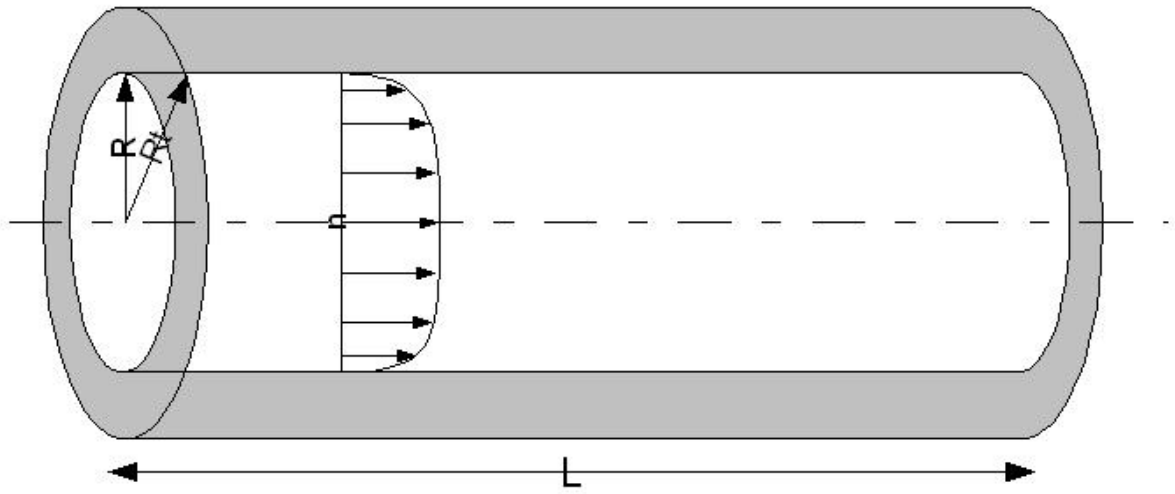


FIGURE 1.7 – *Schématisation de la conduite dans l'ouvrage*

On suppose notre problème axisymétrique et donc, dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, x), on suppose l'indépendance du système en θ et l'interface est décrite à l'aide d'une fonction R telle que :

$$\Gamma(t) = \{(x, r)/r = R(x, t)\} \tag{1.31}$$

1.3.1.1 Écriture axisymétrique intégrée

Par la suite, les variables portant les indices "p" et "w" sont des variables se rapportant respectivement aux phases solide (particles) et fluide (water) et les variables portant les indices "s" et "f" sont les variables se rapportant aux milieux sol et fluide.

Le système 1.5 est réécrit avec l'hypothèse d'axisymétrie :

$$\begin{array}{l}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_r}{\partial r}+\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\rho u_r}{r}=0\\ \frac{\partial \rho Y}{\partial t}+\frac{\partial \rho Y u_r+j_r}{\partial r}+\frac{\partial \rho Y u_x+j_x}{\partial x}+\frac{\rho u_r+j_r}{r}=0\\ \frac{\partial \rho u_r}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_r^2}{\partial r}+\frac{\partial \rho u_r u_x}{\partial x}+\frac{\rho u_r^2}{r}=\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial T_{xr}}{\partial x}+\frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}\\ \frac{\partial \rho u_x}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_r u_x}{\partial r}+\frac{\partial \rho u_x^2}{\partial x}+\frac{\rho u_r u_x}{r}=\frac{\partial T_{rx}}{\partial r}+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{T_{rx}}{r}\end{array} \tag{1.32}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est décrit par un modèle de fluide visqueux :

$$\overline{\overline{T}}=-p\overline{\overline{\mathbb{1}}}+2\mu_{eff}\overline{\overline{D}} \tag{1.33}$$

La longueur du tube L est supposée grande par rapport à son rayon $R(x)$. Un développement asymptotique est donc possible afin de trouver la solution en vitesse, pression et concentration :

$$\begin{array}{l}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_r}{\partial r}+\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\rho u_r}{r}=0\\ \frac{\partial \rho Y}{\partial t}+\frac{\partial r\rho Y u_r}{\partial r}+\frac{\partial \rho Y u_x+j_x}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r j_r}{\partial r}\\ \frac{\partial p}{\partial r}=0\\ \frac{\partial \rho u_x}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial r\rho u_r u_x}{\partial r}+\frac{\partial \rho u_x^2}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial r\tau}{\partial r}-\frac{\partial p}{\partial x}\end{array} \tag{1.34}$$

enfin, ces relations sont intégrées sur la section $(r:[0,R(x)],\theta:[0,2\pi])$ et Y est converti en ϕ, plus facile à manipuler. La notation $\overline{a}$ représente la valeur moyenne de la grandeur a sur la section.

$$\begin{array}{l}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{2\overline{u}}{R}\frac{\partial R}{\partial x}=0\\ \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \frac{\overline{u\phi}}{\overline{u}}}{\partial x}=\frac{2}{R}(\phi_s-\phi)\frac{\dot{m}}{\rho_s}\\ \overline{\rho}\left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\frac{\overline{u^2}}{\overline{u}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right]=-\frac{2}{R}\left(\tau_b+\frac{\overline{\phi u^2}}{\overline{\phi u}}\dot{m}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}-(\omega+\omega'+\omega'')\end{array} \tag{1.35}$$

avec

$$\begin{array}{l}\omega=(\rho_p-\rho_w)\left[\overline{\phi}\left(\overline{u}\frac{\partial \beta_{\phi u}}{\partial t}+\beta_{\phi u}\overline{u}^2\frac{\partial \beta_{(\phi u)u}}{\partial x}+(\beta_{\phi u}-1)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+(\beta_{\phi u^2}-\beta_{u2})\frac{\partial \overline{u}^2}{\partial x}\right)-(\beta_{(\phi u)u}-\beta_{\phi u})\overline{u}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t}\right]\\ \omega'=(\rho_p-\rho_w)\overline{\phi}\overline{u}\left[(\beta_{\phi u}-1)\frac{2}{R}\frac{\dot{m}}{\rho_s}-(\beta_{\phi u^2}-\beta_{u^2})\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right]\\ \omega''=(1-\beta_{(\phi u)u})\overline{\rho u}\frac{2}{R}\frac{\dot{m}}{\rho_s}\end{array} \tag{1.36}$$

Dans ces expressions, $\beta_{\phi u}=\frac{\overline{\phi u}}{\overline{\phi}\overline{u}}$, $\beta_{(\phi u)u}=\frac{\overline{\phi u^2}}{\overline{\phi u}\overline{u}}$, $\beta_{\phi u2}=\frac{\overline{\phi u^2}}{\overline{\phi}\overline{u^2}}$ et $\beta_{u^2}=\frac{\overline{u^2}}{\overline{u}^2}$

On fait maintenant l'hypothèse que la concentration est constante sur la section, ainsi :

$\beta_{\phi u}=1$, $\beta_{(\phi u)u}=\beta_{u^2}$, $\beta_{\phi u2}=\beta_{u^2}$ et $\beta_{u^2}=\frac{\overline{u^2}}{\overline{u}^2}$

Enfin, pour exprimer β_{u^2}, une manière simple de représenter le profil de vitesse est donnée par [Hogg et Pritchard, 2004] :

$$u(x,r,t)=\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1+\left(\frac{r}{R}\right)^m\right)\overline{u(x,t)} \tag{1.37}$$

avec $m>2$ un exposant constant, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\beta_{u^2}=\frac{(m+2)(m^2+2m+2)}{(m+1)m^2} \tag{1.38}$$

Le système final d'équations à résoudre se résume à :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{2\overline{u}}{R}\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \frac{u\phi}{\overline{u}}}{\partial x} = \frac{2}{R}(\phi_s - \phi)\frac{\dot{m}}{\rho_s} \\ \overline{\rho}\left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\beta_{u^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right] = -\frac{2}{R}\left(\tau_f + \alpha\overline{u}\dot{m}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \tag{1.39}$$

1.3.1.2 Types de suspension

Une dernière étape dans la formulation du problème consiste à exprimer la contrainte de cisaillement à l'interface. En effet cette contrainte intervient dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et dans la loi d'érosion. Pour cela, différentes lois phénoménologiques ont été introduites :

- Hypothèse de suspension diluée :
  On suppose que la concentration en particules reste faible et donc que la contrainte de cisaillement ne dépend pas de la concentration :

$$\tau_f = f_b(R_e)\overline{u}^2 \tag{1.40}$$

- Hypothèse de suspension dense [Julien, 1994] :
  On suppose maintenant que la viscosité effective du fluide est fortement dépendante de la concentration :

$$\tau_f = \overline{\rho} f_b(R_e)(1 + a\lambda^2)\overline{u}^2 \tag{1.41}$$

- Hypothèse de suspension dense avec terme laminaire :

$$\tau_f = 4\mu\frac{\overline{u}}{r} + \overline{\rho} f_d(R_e)(1 + a\lambda^2)\overline{u}^2 \tag{1.42}$$

Dans ces relations, f_b est le coefficient de frottement [Barenblatt *et al.*, 1997], [Barenblatt, 1999],

$$f_b(R_e) = \frac{2^\kappa \kappa(1+\kappa)(2+\kappa)}{\left(e^{3/2}(\sqrt{3}+5\kappa)\right)^{\frac{2}{1+\kappa}}} \tag{1.43}$$

avec $\kappa = \frac{3}{2\log R_e}$ où $R_e(x,t) = \frac{\rho_w \overline{u}(x,t)R(x,t)}{\mu_w}$ est le nombre de Reynolds local, et

$$a = C_B\frac{\rho_p}{\overline{\rho}}\left(\frac{d^P}{l_m}\right)^2 \tag{1.44}$$

avec $C_b = 0.01$ le coefficient de Bagnold, d^P le diamètre moyen des particules et $l_m = R/2$ la longueur de mélange. λ est un coefficient définit par :

$$\lambda = \left[\left(\frac{\phi_s}{\phi}\right)^{1/3} - 1\right]^{-1} \tag{1.45}$$

Le cas où $\phi = \phi_g$ est un cas asymptotique qui sera considéré comme étant le sol et non plus l'écoulement. Cependant cette formule montre que la viscosité effective du fluide va tendre vers l'infini lorsque la concentration tend vers celle du sol permettant ainsi une transition plus régulière entre les deux régimes.

1.3.1.3 Écriture finale des équations intégrées

Plusieurs choix de variables principales sont possibles et les variables $(R, \overline{u}, \overline{\phi}, p)$ ont été retenues. Le système d'équations à résoudre se résume donc à :

$$\frac{\partial R}{\partial t}\left(1+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{\dot{m}}{\rho_s} \tag{1.46}$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{2\overline{u}}{R}\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \beta_{u2}\overline{u}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x} = \frac{2}{R}(\phi_s - \phi)\frac{\dot{m}}{\rho_g} \tag{1.48}$$

$$\overline{\rho}\left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\beta_{u^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right] = -\frac{2}{R}(\tau_f + \alpha\overline{u}\dot{m}) - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.49}$$

La première remarque concerne l'équation 1.47 qui est la seule à ne pas contenir de terme de dérivée en temps, et qui traduit l'incompressibilité du mélange.

L'équation 1.46 traduit l'évolution de la position de l'interface. L'équation 1.47 traduit la conservation du débit dans le tube, elle servira pour déduire la vitesse à l'aide du rayon une fois la première équation résolue. L'équation 1.48 traduit l'évolution de la concentration dans la solution. L'équation 1.49 traduit la conservation de la quantité de mouvement et ne sera en fait utilisée que pour trouver la pression, le reste des membres de cette équation étant connus grâce aux équations précédentes.

1.3.2 Étude numérique

1.3.2.1 Schémas utilisés

La discrétisation des équations (1.46,1.47,1.48,1.49) est faite par une méthode des différences finies sur un maillage mono dimensionnel de pas Δx constant. La discrétisation spatiale utilise un schéma amont. La discrétisation en temps se fera à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 (décrit plus amplement au chapitre 4).

Les calculs se font à débit constant afin de s'affranchir de la résolution de l'équation 1.47. Cependant pour les calculs à gradient de pression imposé on utilisera un algorithme de Newton-Raphson à dérivée numérique pour adapter le débit et obtenir le bon gradient de pression. Cet algorithme fonctionne de la manière suivante :

Soit $p_{in} = F(Q_e)$ le système à résoudre ; où Q_e est le débit et p_{in} est la valeur de la pression à l'entrée du tube (la pression de sortie est supposée égale à 1, ainsi choisie comme référence de pression). Le problème devient donc : "trouver Q_e tel que $F(Q_e) = p_{imp}$" où p_{imp} est la pression que nous désirons à l'entrée.

- $p^0 = 0$ et $Q_e^0 = Q_e(t^{n-1})$ on initialise avec le résultat du pas de temps précédent
- $Q_e^1 = Q_e^0 + 10^{-6}$, on ajoute une perturbation
- $k = 1$
- Boucle :
  - $p^k = F(Q_e^k)$
  - $dQ = -(p_{imp} - p^k)\frac{Q_e^k - Q_e^{k-1}}{p^k - p^{k-1}}$
  - $Q_e^{k+1} = Q_e^k + dQ$
  - Si $\frac{|p^k - p^{k-1}|}{p_{imp}} < \epsilon$ alors on arrête Sinon, $k = k + 1$ et on boucle
- Fin

Dans ce cas d'étude, le tube sera analysé pour deux longueurs. Grâce à cette élongation et au fait que, même en suspension diluée, la concentration s'accumule le long du tube, sur le même calcul deux zones vont se distinguer : une zone de suspension diluée au début du tube et une zone de suspension dense en fin de tube. Le même calcul peut prendre en compte les deux phénomènes car, dans l'équation de [Julien, 1994], le paramètre λ permet de passer continûment de la zone suspension diluée à la suspension dense.

1.3.2.2 Résultats à débit imposé

Dans ce cas, Le débit à l'entrée sera imposé et une pression égale à 1 (référence) à la sortie. L'évolution de la vitesse sera alors directement reliée au rayon et au débit.

1.3.2.2.1 Tube court

Dans ce calcul, plusieurs coefficients d'érosion (k_{er}) sont utilisés afin d'en visualiser l'influence.

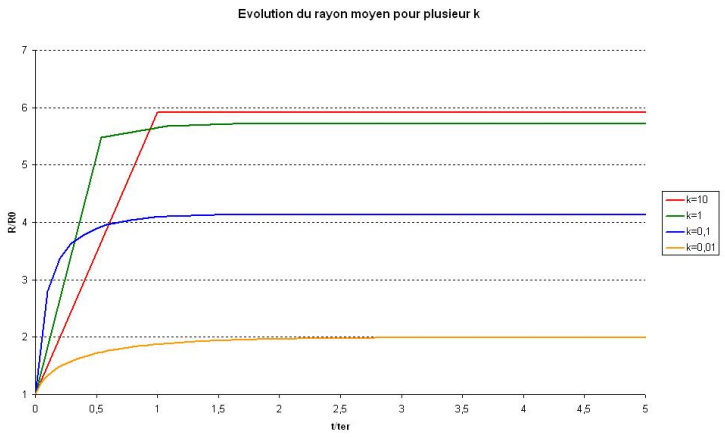


FIGURE 1.8 – *Évolution du rayon au cours du temps pour plusieurs coefficients d'érosion*

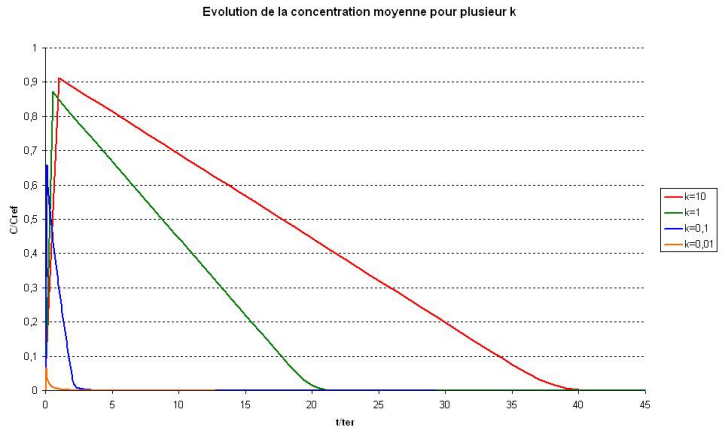


FIGURE 1.9 – *Évolution de la concentration au cours du temps pour plusieurs coefficients d'érosion*

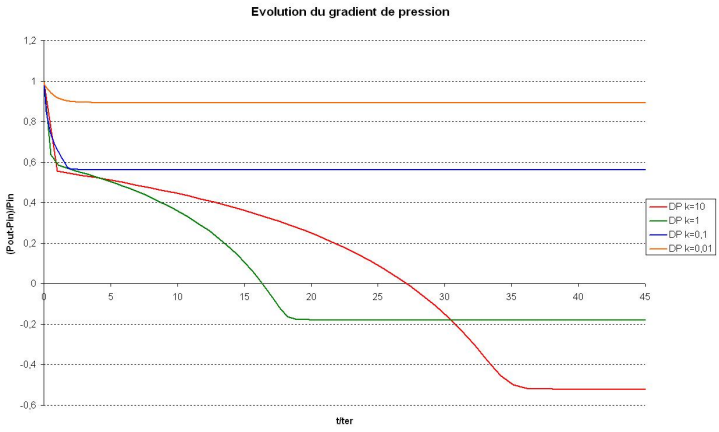


FIGURE 1.10 – *Évolution de la pression au cours du temps pour plusieurs coefficients d'érosion*

Sur les figures 1.8, 1.9 et 1.10, le cas $k = 0.01$ (en jaune) correspond à un cas de suspension diluée. En effet le maximum de concentration ne dépasse pas les 10% du maximum de concentration.

L'érosion se stabilise rapidement vers une asymptote horizontale. Ceci vient du fait que le débit étant conservé et la section augmentant, la vitesse diminue et donc la contrainte de cisaillement diminue elle aussi jusqu'à atteindre (asymptotiquement) la contrainte seuil et jusqu'à stopper l'érosion.

Le cas $k = 0.1$ (en bleu) ressemble à un cas intermédiaire entre la suspension dense pure et la suspension diluée pure. La concentration moyenne a un pic élevé mais le comportement du rayon et du gradient de pression restent similaire au cas à plus faible coefficient d'érosion.

Dans les cas $k = 1$ et $k = 10$ (respectivement vert et rouge) les évolutions de concentration passent par un pic beaucoup plus haut et avec une pente plus faible quand k augmente. L'évolution du rayon est encore plus rapide.

En regardant les profils suivant x, dans les cas à fort coefficient d'érosion, une variation très importante de la section entre l'entrée et la sortie apparaît.

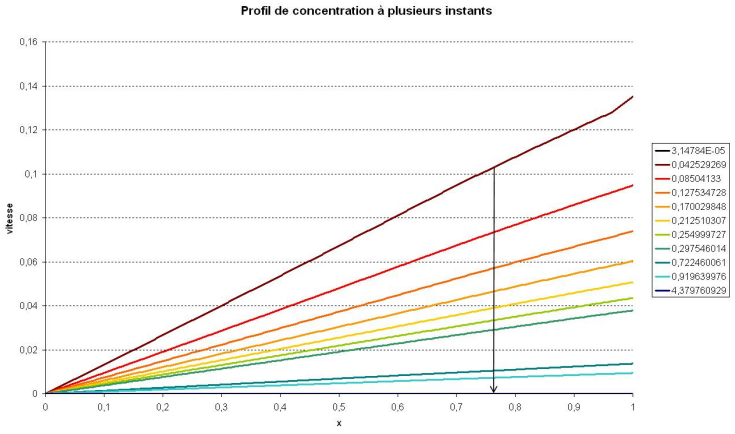


FIGURE 1.11 – *Profils de la concentration suivant x pour $k = 0.01$*

La figure 1.11 montre que les particules s'accumulent le long du tube. La concentration diminue au court du temps correspondant à l'évacuation au bout du tube. Dans ce

même cas, le profil de pression est linéaire et le rayon est quasi constant.

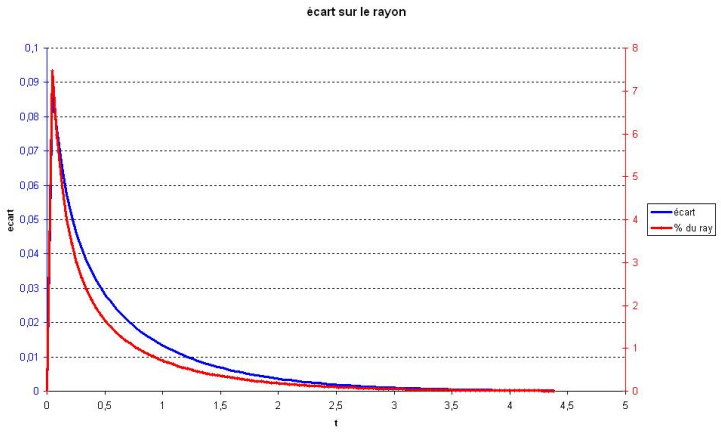


FIGURE 1.12 – *Évolution de l'écart entre le rayon maximum et minimum suivant x au cours du temps pour $k = 0.01$*

La figure 1.12 montre que l'écart entre le rayon maximum et le rayon minimum reste faible (inférieur à 8% du rayon initial) et tend vers 0. Cela s'explique par le fait que l'érosion ne se fait pas de façon uniforme sur tout le tube à cause la relation de [Julien, 1994] mais que l'érosion s'arrête plus rapidement aux endroits fortement érodés au départ (la sortie du tube) et les endroits moins érodés au départ "rattrapent" leur "retard" au final.

On s'intéresse maintenant au cas "intermédiaire" à savoir $k = 0.1$:

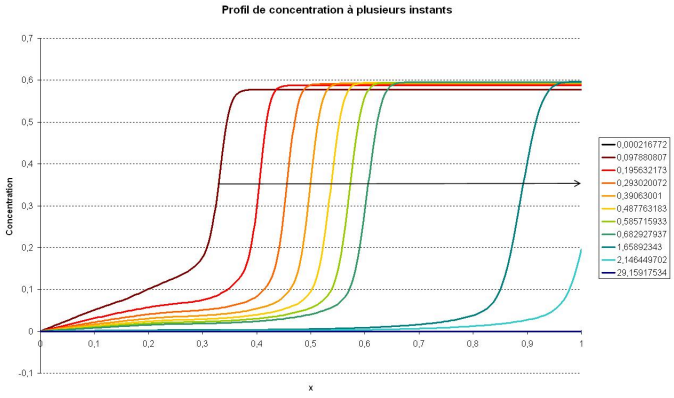


FIGURE 1.13 – *Profils de la concentration suivant x pour $k = 0.1$*

La figure1.13 montre que la concentration au début du tube ressemble au cas précédent, c'est à dire linéaire en x et de pente décroissante au cours du temps. Mais il apparaît la formation d'un bouchon de particules qui semble avancer dans le tube au cours du temps.

Le rayon du tube (FIGURE1.14) est alors constant suivant x dans la partie où la concentration est linéaire mais, dans la seconde partie du tube, l'érosion semble beaucoup plus sensible à la concentration.

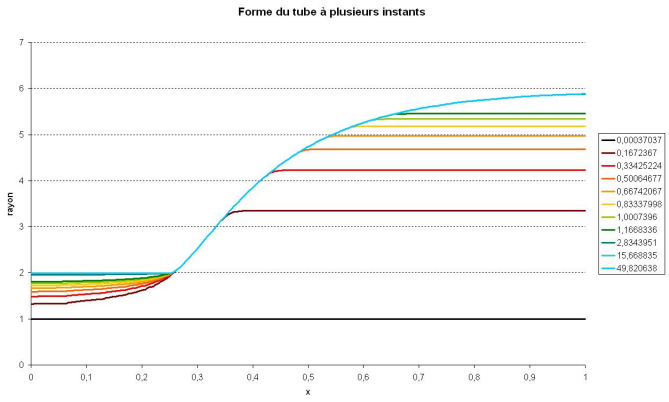


FIGURE 1.14 – *Profils du tube (rayon) suivant x pour $k = 0.1$*

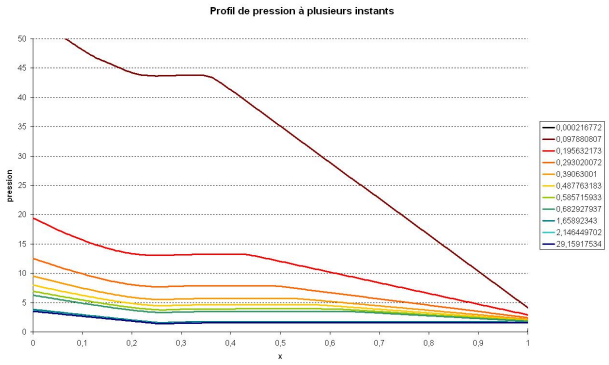


FIGURE 1.15 – *Profils de pression suivant x pour $k = 0.1$*

Le profil de pression (FIGURE1.15) n'est plus du tout linéaire mais le profil final est linéaire dans la première partie du tube et constant dans la seconde. Cette courbe finale de pression est corrélée avec le profil final du rayon.

A forte érosion ($k = 1$), Les profils de pression et de rayon sont représentés dans les figure 1.16 et 1.17 :

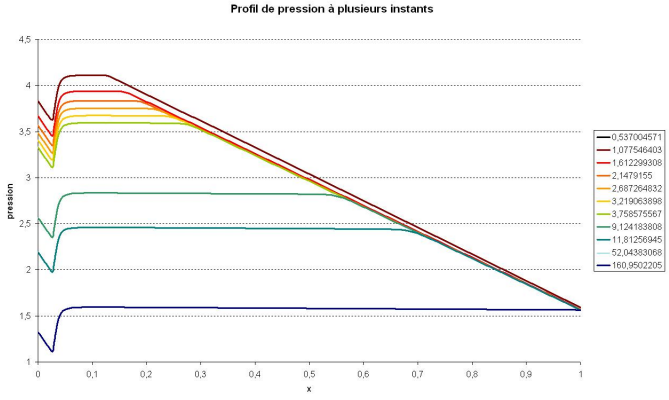


FIGURE 1.16 – *Profils de pression suivant x pour $k = 1$*

Une zone de compression semble se former dans ce cas, lorsque le rayon augmente brutalement.

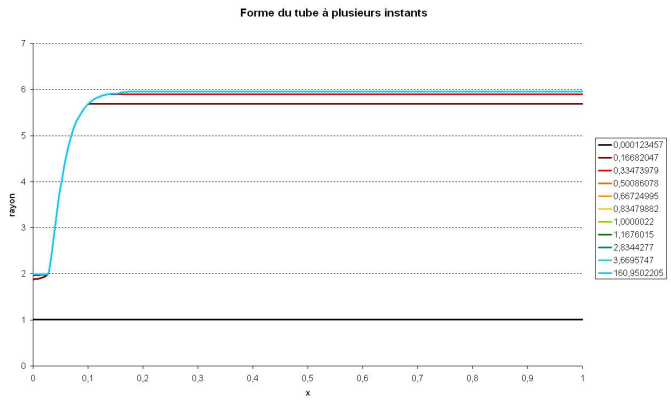


FIGURE 1.17 – *Profils du tube (rayon) suivant x pour $k = 1$*

Cette zone de compression traduit une recirculation probable du fluide dans cette zone, phénomène qui n'est pas du tout pris en compte dans la modélisation. Ce cas atteint donc les limites du modèle, il ne peut pas être correctement modélisé par une approche mono-dimensionnelle.

1.3.2.2.2 Tube long

On se place maintenant dans le cas $k_{er} = 10^{-2}$ avec un tube plus long. Ainsi, à la fois une zone de suspension diluée et une zone de suspension dense apparaissent le long du tube.

Ce cas ressemble au cas tube court avec $k = 0.1$. Il y a donc une relation entre la longueur du tube et le coefficient d'érosion.

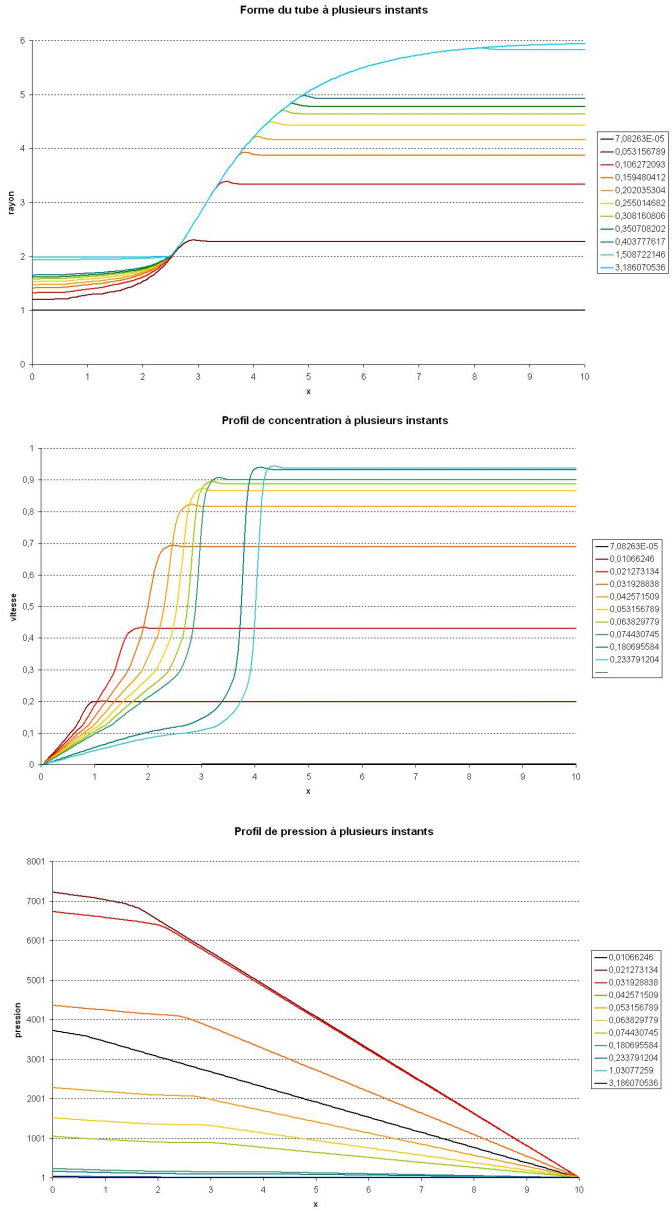


FIGURE 1.18 – *profils de rayon, concentration et pression suivant x à plusieurs instants pour le cas à débit constant*

Les profils de rayon, concentration et pression le long du tube à plusieurs instants sont tracés sur la FIGURE 1.18. Le rayon ne s'érode pas de la même manière tout au long du tube. La pente à l'origine de la concentration décroît au court du temps et une sorte de bouchon de particules en suspension se forme et avance dans le tube jusqu'à sortir complètement.

Toutes les variables ont une asymptote en temps correspondant à l'arrêt de l'érosion. En effet, à débit constant, le rayon augmentant, la vitesse de l'écoulement diminue et fait diminuer la contrainte de cisaillement jusqu'à ce qu'elle atteigne la contrainte critique et l'érosion s'arrête.

En pratique, il est plus fréquent de rencontrer le cas à gradient pression imposé où l'érosion ne cesse d'augmenter. Cependant, le cas à débit imposé a permit de mettre en évidence certains phénomènes et de tester les hypothèses.

1.3.2.3 Résultats à gradient de pression imposé

Dans ce cas, les pressions à l'entrée et à la sortie sont imposées. Ce cas correspond bien à ce que l'on rencontre dans un ouvrage hydraulique où une retenue d'eau en amont de l'ouvrage génère un gradient de pression. Dans les cas de renards hydrauliques, le niveau de la retenue est bien souvent constant car les débits mis en jeu dans les renards sont très insuffisants pour faire varier significativement la cote de la retenue au cours de l'évolution de l'érosion.

Le même cas qu'à débit imposé est utilisé ici ($k = 0.01$), avec une pression d'entrée $p_{in} = 100$ et toujours $p_{out} = 1$

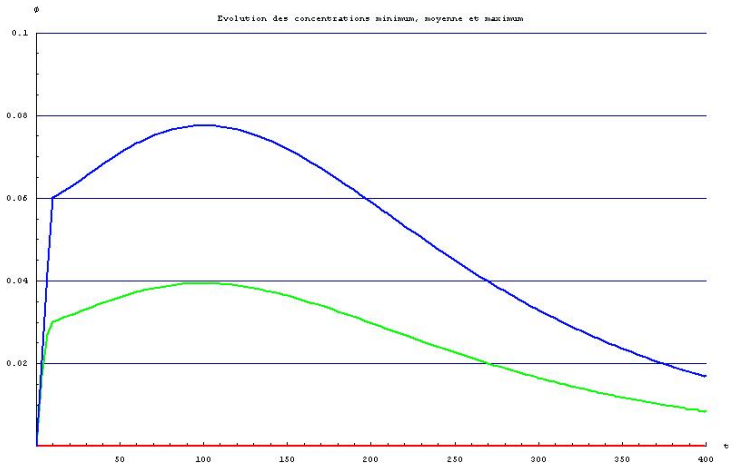


FIGURE 1.19 – *Évolution de la concentration au cours du temps pour* $k = 0.01$

Les évolutions au cours du temps des concentrations minimum (nulle), moyenne et maximum sont représentées sur la figure 1.19. Cette concentration maximum reste faible et donc l'écoulement reste de type dilué. On voit cependant apparaître un maximum de concentration comme dans les cas à débit imposé, mais il ne s'agit pas vraiment d'un pic.

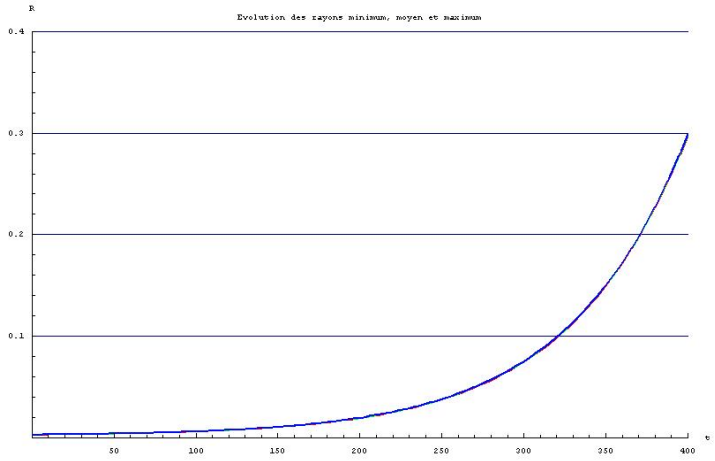


FIGURE 1.20 – *Évolution du rayon au cours du temps pour* $k = 0.01$

L'explosion du rayon est montrée sur la figure 1.20, cette diminution de la concentration est donc principalement due au transport et à l'évacuation des particules qui devient rapidement prédominant par rapport à l'apport de particules par érosion.

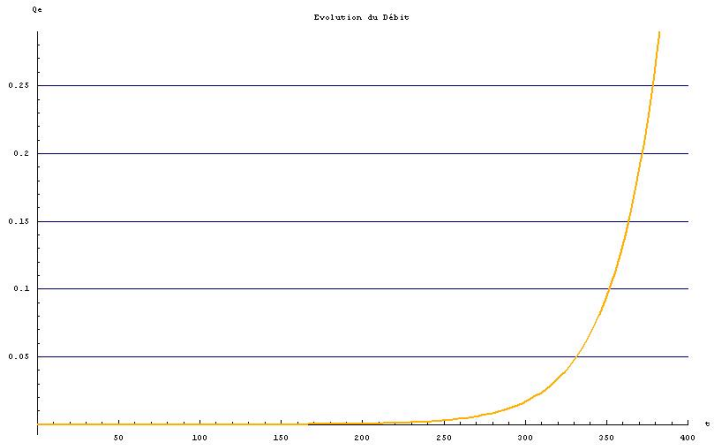


FIGURE 1.21 – *Évolution du débit au cours du temps pour* $k = 0.01$

La figure 1.21 montre un débit qui explose (et pose des problèmes pour être calculé) bien que le rayon augmente ce qui implique une très forte augmentation de la vitesse de l'écoulement. Cette augmentation brutale de la vitesse d'écoulement explique pourquoi la concentration diminue par évacuation rapide des particules par la sortie du tube.

Les profils de concentration et de pression restent linéaires suivant x au cours du temps, la pression est même stationnaire. Le profil de rayon lui est constant suivant x, on est bien dans un cas de suspension diluée. Et les résultats sont bien similaires à ceux trouvés expérimentalement par [Wan et Fell, 2004a],[Wan et Fell, 2004b].

1.3.3 Conclusions sur le modèle 1D

La comparaison de ce modèle avec les résultats expérimentaux, aussi bien dans le cas à débit imposé que à gradient de pression imposé en suspension diluée, en a permis une validation. L'absence de résultats expérimentaux dans le cas d'une suspension dense n'a pas permis de valider ce modèle. Les limites de cette modélisation apparaissent clairement lorsque l'érosion est trop rapide. Le coefficient d'érosion joue donc un rôle majeur dans les hypothèses simplificatrices qui ont été faites.

De plus, le transport des particules devient rapidement prédominant sur l'apport par érosion, notamment sur les cas à pression imposée. La prise en compte de la suspension dense n'est donc qu'un phénomène transitoire à l'échelle de l'évolution d'un renard dans un ouvrage hydraulique. Le comportement du fluide chargé est dans la plupart des cas assimilable à une suspension diluée, les hypothèses simplificatrices qui ont été effectuées ne permettent pas de considérer des cas à forte érosion, nécessaires pour voir apparaître une phase à suspension dense.

Dans le cadre des ouvrages hydrauliques, ces cas extrêmes sont rares et cette modélisation reste un bon outil dans l'analyse des sols érodables saturés soumis à un écoulement en charge.

1.4 Discussions et conclusions

Ce chapitre a posé le cadre de l'étude partant d'un cadre général, celui des ouvrages hydrauliques, vers le point de vue plus particulier de la modélisation d'interface fine avec érosion. La modélisation d'interface fine se justifie par les matériaux employés pour le sol, les argiles étant constituées de très fines particules et ayant un caractère imperméable.

Il a été montré cependant que la modélisation intégrée et la modélisation monodimensionnelle avaient leurs limites et qu'un modèle d'écoulement complet est nécessaire pour décrire l'érosion. De plus, la prise en compte de la concentration en particules dans l'écoulement ne semble que très peu influencer le système pour des érosions faibles. En effet, le transport et l'évacuation des particules deviennent rapidement prédominants sur l'apport de particules par érosion. La concentration en particules reste donc faible dans le domaine d'écoulement pour les érosions faibles. Pour les érosions fortes, la concentration en particules dans l'écoulement n'a d'influence que sur une courte période dans l'évolution totale de la conduite. Cependant durant cette période, le profil de rayon est fortement modifié et amplifié dans la suite du calcul.

Chapitre 2

Formulation du problème

C'est la théorie qui décide de ce que nous pouvons observer.
Albert Einstein (1879-1955)

Dans ce chapitre, une grande partie des calculs menés au chapitre 1 sera reprise avec différentes hypothèses. En premier lieu, l'écoulement sera considéré comme dilué, et les domaines d'écoulement et de sol seront décrits de manière unifiée. De plus, les hypothèses de symétrie simplificatrice n'auront plus lieu d'être. Enfin, un modèle unifié des comportements respectifs des deux domaines sera utilisé pour une implémentation plus simple dans un code numérique.

2.1 Modélisation des milieux

Reprenant le travail effectué au paragraphe 1.2, il s'agit d'établir les relations simplifiées du problème. Le principe de base est de considérer un volume Ω contenant deux milieux. Dans notre cas l'un sera dit "écoulement", l'autre "sol", ces deux milieux étant non miscibles. On pourra alors parler de domaine d'écoulement et de domaine sol. Ces deux domaines formeront une partition du volume Ω. Les phénomènes d'érosion supposent que ces domaines ne resteront pas figés dans le temps, ainsi on notera $\Omega_f(t)$ le domaine occupé par l'écoulement à l'instant t et $\Omega_s(t)$ le domaine occupé par le sol à l'instant t. On notera alors $\Gamma(t)$ l'intersection de $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$, également appelée interface sol-fluide. Le travail effectué au paragraphe 1.3 nous permet de nous affranchir de la résolution des équations sur la phase solide sur chacun des domaines.

Dans cette partie, la démarche utilisée est similaire à [Marigo, 1985] afin d'obtenir les lois de conservation. Seules la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement ont été nécessaires, mais la démarche est également valable pour d'autre grandeurs. Une modélisation unifiée des lois de bilan (1.5) sera présentée, ne tenant pas compte de la phase solide mais du changement de comportement entre les domaines sol et écoulement.

2.1.1 Conservation de la masse

2.1.1.1 La masse volumique

On définit l'indicatrice du domaine d'écoulement $\mathbb{1}_f(t,x)$ telle que :

$$\mathbb{1}_f(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_f(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.1}$$

Cette indicatrice permet de définir la masse volumique pour tout le domaine Ω comme :

$$\rho = \mathbb{1}_f \rho_f + (1 - \mathbb{1}_f)\rho_s \tag{2.2}$$

où ρ_f est la masse volumique homogénéisée du domaine d'écoulement et ρ_s celle du domaine sol. La concentration est supposée constante dans le domaine sol et donc ρ_s est une constante dans ce domaine et dans l'hypothèse de suspension diluée, la concentration est négligée dans le domaine fluide d'où ρ_f est constant dans le domaine d'écoulement.

On exprime immédiatement le gradient de l'indicatrice :

$$\nabla \mathbb{1}_f = -\overrightarrow{n}\delta_{sf} \tag{2.3}$$

où $\overrightarrow{n}$ est la normale à $\Gamma(t)$ et δ_{sf} est la fonction Dirac sur $\Gamma(t)$ définie comme :

$$\int_\Omega (.)\delta_{sf} d\omega = \int_{\Gamma(t)} (.) d\gamma \tag{2.4}$$

On peut également calculer le gradient de masse volumique :

$$\nabla \rho = \mathbb{1}_f \nabla \rho_f + (1 - \mathbb{1}_f)\nabla \rho_s - (\rho_f - \rho_s)\overrightarrow{n}\delta_{sf} \tag{2.5}$$

2.1.1.2 Équation de conservation de la masse

La conservation de la masse dans les deux domaines $\Omega_s(t)$ et $\Omega_f(t)$ s'écrit :

- Dans $\Omega_s(t)$:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla.(\rho_s \overrightarrow{u}_s) = 0 \tag{2.6}$$

- Dans $\Omega_f(t)$:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla.(\rho_f \overrightarrow{u}_f) = 0 \tag{2.7}$$

On définie une vitesse $\overrightarrow{u} = (1 - \mathbb{1}_f)\overrightarrow{u}_s + \mathbb{1}_f \overrightarrow{u}_f$. Cette vitesse est simplement le recollement des vitesses moyennes barycentriques des deux domaines afin d'homogénéiser la notation sur l'ensemble du domaine Ω. Donc :

$$\nabla.(\overrightarrow{u}) = \mathbb{1}_f \nabla.(\overrightarrow{u}_f) + (1 - \mathbb{1}_f)\nabla.(\overrightarrow{u}_s) - (\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_s).\overrightarrow{n}\delta_{sf} \tag{2.8}$$

Dans l'optique d'avoir une formulation sur tout Ω, on cherche à exprimer $\frac{\partial \rho}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mathbb{1}_f}{\partial t}(\rho_f - \rho_s) + \mathbb{1}_f \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + (1 - \mathbb{1}_f)\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \tag{2.9}$$

et on cherche à exprimer $\nabla.(\rho\overrightarrow{u})$:

$$\begin{aligned} \nabla.(\rho\overrightarrow{u}) = \quad & \mathbb{1}_f \nabla.(\rho_f \overrightarrow{u}_f) + (1 - \mathbb{1}_f)\nabla.(\rho_s \overrightarrow{u}_s) \\ & -(\rho_f \overrightarrow{u}_f - \rho_s \overrightarrow{u}_s).\overrightarrow{n}\delta_{sf} \end{aligned} \tag{2.10}$$

En additionnant 2.9 et 2.10, il vient des simplifications grâce aux équations (2.6) et (2.7) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \overrightarrow{u}) = (\rho_f - \rho_s)\frac{\partial \mathbb{1}_f}{\partial t} - (\rho_f \overrightarrow{u}_f - \rho_s \overrightarrow{u}_s).\overrightarrow{n}\delta_{sf} \tag{2.11}$$

Soit $\overrightarrow{c}_\Gamma$ la célérité de l'interface, alors l'indicatrice de Ω_f respecte la relation de transport :

$$\frac{\partial \mathbb{1}_f}{\partial t} + \overrightarrow{c}_\Gamma.\nabla \mathbb{1}_f = 0 \tag{2.12}$$

d'où

$$\frac{\partial \mathbb{1}_f}{\partial t} = \overrightarrow{c}_\Gamma.\overrightarrow{n}\delta_{sf} \tag{2.13}$$

Ce résultat est injecté dans l'équation (2.11) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \overrightarrow{u}) = [\rho_f(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}).\overrightarrow{n} - \rho_s(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}).\overrightarrow{n}]\,\delta_{sf} \tag{2.14}$$

Il est alors possible de séparer les comportements dans le volume $\Omega \backslash \Gamma(t)$ et sur l'interface $\Gamma(t)$. $\Gamma(t)$ est supposée de mesure nulle dans Ω, on peut donc écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \overrightarrow{u}) = 0 & \text{Presque partout dans } \Omega \\ [\![\rho(\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}).\overrightarrow{n}]\!] = 0 & \text{Sur } \Gamma(t) \end{cases} \tag{2.15}$$

2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

2.1.2.1 Remarques préliminaires

La fonction indicatrice présente quelques propriétés intéressantes du fait que cette fonction est à valeur dans $\{0, 1\}$:

- $\mathbb{1}_f(1 - \mathbb{1}_f) = 0$
- $(\mathbb{1}_f)^2 = \mathbb{1}_f$
- $(1 - \mathbb{1}_f)^2 = 1 - \mathbb{1}_f$

Grâce à ces remarques, il vient :

- $\rho \overrightarrow{u} = \mathbb{1}_f \rho_f \overrightarrow{u}_f + (1 - \mathbb{1}_f)\rho_s \overrightarrow{u}_s$
- $\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u} = \mathbb{1}_f \rho_f \overrightarrow{u}_f \otimes \overrightarrow{u}_f + (1 - \mathbb{1}_f)\rho_s \overrightarrow{u}_s \otimes \overrightarrow{u}_s$

2.1.2.2 Équation de conservation

On utilise ici le principe fondamental de la dynamique avec terme source.

On procède de la même manière que pour la conservation de la masse :

- Dans $\Omega_s(t)$:

$$\frac{\partial \rho_s \overrightarrow{u}_s}{\partial t} + \nabla.(\rho_s \overrightarrow{u}_s \otimes \overrightarrow{u}_s) = \nabla.\overline{\overline{T}}_s + \overrightarrow{f}_s \tag{2.16}$$

- Dans $\Omega_f(t)$:

$$\frac{\partial \rho_s \overrightarrow{u}_s}{\partial t} + \nabla.(\rho_s \overrightarrow{u}_f \otimes \overrightarrow{u}_f) = \nabla.\overline{\overline{T}}_f + \overrightarrow{f}_f \tag{2.17}$$

Où $\overline{\overline{T}}_f$ et $\overline{\overline{T}}_s$ sont les tenseurs des contraintes de Cauchy dans les domaines d'écoulement et de sol. $\overrightarrow{f}_f$ et $\overrightarrow{f}_s$ sont les termes de chargements volumiques dans les domaines d'écoulements et de sol.

Dans l'optique d'une formulation homogénéisée, on exprime $\frac{\partial \rho \overrightarrow{u}}{\partial t}$, on rassemble les termes et on utilise la relation (2.13) :

$$\frac{\partial \rho \overrightarrow{u}}{\partial t} = \mathbb{1}_f \frac{\partial \rho_f \overrightarrow{u}_f}{\partial t} + (1-\mathbb{1}_f)\frac{\partial \rho_s \overrightarrow{u}_s}{\partial t} + (\rho_f \overrightarrow{u}_f - \rho_s \overrightarrow{u}_s)\, \overrightarrow{v}_\Gamma . \overrightarrow{n} \delta_{sf} \tag{2.18}$$

De même, on exprime $\nabla . (\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u})$,en utilisant les remarques préliminaires.

$$\begin{aligned} \nabla . (\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}) = \quad & \mathbb{1}_f \nabla . (\rho_f \overrightarrow{u_f} \otimes \overrightarrow{u_f}) + (1-\mathbb{1}_f) \overrightarrow{\nabla} . (\rho_s \overrightarrow{u_s} \otimes \overrightarrow{u_s}) \\ & - (\rho_f \overrightarrow{u}_f \otimes \overrightarrow{u}_f - \rho_s \overrightarrow{u}_s \otimes \overrightarrow{u}_s) . \overrightarrow{n} \delta_{sf} \end{aligned} \tag{2.19}$$

On exprime enfin $\overline{\overline{T}} = \mathbb{1}_f \overline{\overline{T}}_f + (1-\mathbb{1}_f)\overline{\overline{T}}_s$ donc :

$$\nabla . \overline{\overline{T}} = \mathbb{1}_f \nabla . \overline{\overline{T}}_f + (1-\mathbb{1}_f) \nabla . \overline{\overline{T}}_s - (\overline{\overline{T}}_f - \overline{\overline{T}}_s) . \overrightarrow{n} \delta_{sf} \tag{2.20}$$

Finalement, on utilise les relations (2.16) et (2.17) pour simplifier et on pose : $\overrightarrow{f} = \mathbb{1}_f \overrightarrow{f}_f + (1-\mathbb{1}_f)\overrightarrow{f}_s$ ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \rho \overrightarrow{u}}{\partial t} + \nabla . (\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}) = \quad & \nabla . \overline{\overline{T}} + \overrightarrow{f} + \\ & (\overline{\overline{T}}_f - \overline{\overline{T}}_s) . \overrightarrow{n} \delta_{sf} + (\rho_f \overrightarrow{u}_f - \rho_s \overrightarrow{u}_s)\, \overrightarrow{c}_\Gamma . \overrightarrow{n} \delta_{sf} \\ & - (\rho_f \overrightarrow{u}_f \otimes \overrightarrow{u}_f - \rho_s \overrightarrow{u}_s \otimes \overrightarrow{u}_s) . \overrightarrow{n} \delta_{sf} \end{aligned} \tag{2.21}$$

pour une meilleure lecture, on rassemble quelques termes.

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \rho \overrightarrow{u}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} . (\rho (\overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u})) = \quad & \nabla . \overline{\overline{T}} + \overrightarrow{f} + (\overline{\overline{T}}_f - \overline{\overline{T}}_s) . \overrightarrow{n} \delta_{sf} \\ & - [\rho_f \overrightarrow{u}_f ((\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}_f) . \overrightarrow{n}) - \rho_s \overrightarrow{u}_s ((\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}_s) . \overrightarrow{n})]\, \delta_{sf} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Avec les mêmes constatations que pour la conservation de la masse, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho \overrightarrow{u}}{\partial t} + \nabla . (\rho \overrightarrow{u} \otimes \overrightarrow{u}) = \nabla . \overline{\overline{T}} & \text{Dans } \Omega \text{ presque partout} \\ [\![\rho (\overrightarrow{c}_\Gamma - \overrightarrow{u}) . \overrightarrow{n}\, \overrightarrow{u}]\!] + \left[\!\!\left[\overline{\overline{T}} . \overrightarrow{n} \right]\!\!\right] = 0 & \text{Sur } \Gamma(t) \end{cases} \tag{2.23}$$

Une formulation unifiée sur tout le domaine Ω est donc posée. Il est à remarquer que ces relations sont bien les mêmes que (1.5, 1.8, 1.10) en omettant simplement l'équation sur la masse des particules.

2.1.2.3 Hypothèses sur les milieux

Nous faisons ici l'hypothèse de suspension diluée dans le domaine d'écoulement donc la concentration est supposée nulle dans ce domaine, ainsi les relations (1.2, 1.3 et 1.4) deviennent immédiatement :

$$\begin{cases} \rho = \rho_f \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_f \\ \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \end{cases} \tag{2.24}$$

Ce qui nous ramène bien aux relations (2.15 et 2.22). Le tenseur des contraintes de Cauchy sera calculé de la même manière qu'au paragraphe 1.2.3.

Dans le sol nous supposons la concentration comme une constante notée ϕ_g, la compacité du sol. Les sols à étudier sont principalement des argiles donc ils sont supposés cohésifs et sans écoulement de Darcy. En fixant le repère d'étude au sol, il vient $\overrightarrow{u} = 0$ et donc $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. La masse volumique, quant à elle sera constante $\rho = \rho_g$.

2.2 Méthodes de pénalisation

D'après la section 2.1, les équations de conservation ont une forme qui ne permet de jouer que sur la formulation du tenseur des contraintes dans le milieu sol et du terme de densité d'efforts volumiques. Dans le problème d'érosion, le comportement interne au sol est peu important face à l'écoulement : c'est la contrainte tangentielle exercée par le l'écoulement sur l'interface qui pilote l'érosion (c.f. 1.2.3). Le comportement du sol et de l'écoulement sont cherchés de manière à n'avoir qu'une seule relation, dont les paramètres peuvent être discontinus sur l'interface. Cette relation est cherchée de manière à s'affranchir du repérage des domaines (et du maillage). L'ensemble des méthodes utilisant ce principe sont appelées méthodes aux domaines fictifs.

2.2.1 Les méthodes aux domaines fictifs

2.2.1.1 Immersed boundary method (IBM)

La méthode de frontière immergée (Immersed Boundary Method ou IBM) est adaptée aux calculs de mouvements de particules immergées dans un fluide, [Roma *et al.*, 1999, Maitre, 2006, Jamali, 2006, Ramière *et al.*, 2007], [Vander Meûlen, 2006]. On considère un fluide avec une frontière immergée, par exemple un obstacle solide. On utilise les notations de l'article de [Maitre, 2006] :

On suppose un champ de vitesse Eulérien : $(x,t) \in \Omega \times [0,T] \longrightarrow \overrightarrow{u}(x,t)$.

La position cartésienne des structures est donnée par :

$(r,s,t) \in \Gamma \times [0,T] \longrightarrow X(r,s,t)$.

La densité de force est une fonction F connue de (r,s,t).

On pose donc nos équations de mouvement :

$$\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \overrightarrow{u}.\nabla\overrightarrow{u}\right) - \mu\Delta\overrightarrow{u} + \nabla p = \overrightarrow{f} \tag{2.25}$$

$$\nabla.(\overrightarrow{u}) = 0 \tag{2.26}$$

où :

$$\overrightarrow{f}(x,t) = \int_\Gamma \overrightarrow{F}(r,s,t)\delta(x - X(r,s,t))drds \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial X(r,s,t)}{\partial t} = \overrightarrow{u}(X(r,s,t),t) = \int_\Omega \overrightarrow{u}(x,t)\delta(x - X(r,s,t))dx \tag{2.28}$$

Dans ce système, ρ et μ sont des constantes (la masse volumique et la viscosité dynamique), p la pression et $\overrightarrow{u}$ le champ de vitesses. $\overrightarrow{F}$ comme il est défini, représente une force ne s'appliquant que sur la frontière immergée. La fonction δ est la fonction Dirac discrète. On se repère sur l'interface Γ à l'aide de l'abscisse curviligne.

La formulation mélange variables Lagrangiennes et variables Euleriennes et l'interface est donc repérée de manière Lagrangienne (par la variable X). Elle est transportée par l'écoulement grâce à l'équation (2.28). Cette méthode ne convient pas aux problèmes d'érosion car elle se focalise sur les mouvements de corps rigide. En effet elle suppose des obstacles rigides en mouvement alors que les problèmes d'érosion supposent des corps fixes dont la forme change.

2.2.1.2 Domaines fictifs selon Glowinski

Glowinski introduit une méthode de pénalisation faisant intervenir les multiplicateurs de Lagrange, mais la formulation initiale sépare dans un premier temps la partie fluide et la partie solide. Le cas étudié par Glowinski [Glowinski *et al.*, 2001] est l'écoulement Newtonnien incompressible et l'action d'un fluide sur des particules en suspension (par la suite et sauf mention contraire les équations sont valables sur $]0,T[$, les notations utilisées sont celles de Glowinski) : dans Ω_f :

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t}+\overrightarrow{u}.\nabla\overrightarrow{u}\right)=\rho\overrightarrow{g}+\nabla.\overline{\overline{\sigma}} \tag{2.29}$$

$$\nabla.\overrightarrow{u}=0 \tag{2.30}$$

$$\overrightarrow{u}(0,\overrightarrow{x})=\overrightarrow{u}_0(\overrightarrow{x}) \tag{2.31}$$

sur $\partial\Omega$: $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{g_0}$ avec $\int_{\partial\Omega}\overrightarrow{g_0}.\overrightarrow{n}d\partial\Omega=0$. On a également la condition de non glissement sur $\partial\Omega_s$. De plus, dans chaque particule P_i :

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x},t)=\overrightarrow{V_i}(t)+\overrightarrow{\omega_i}(t)\wedge\overrightarrow{G_i(t)x} \tag{2.32}$$

On définit $\overline{\overline{\sigma}}$ de manière classique comme :

$$\overline{\overline{\sigma}}=\overline{\overline{\tau}}-p\overline{\overline{I}} \tag{2.33}$$

Avec $\overline{\overline{\tau}}=2\mu\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u})$ dans le cas d'un fluide Newtonien. Et on a les équations de Newton-Euler pour les corps rigides :

$$M_i\frac{d\overrightarrow{V_i}}{dt}=M_i\overrightarrow{g}-\int_{\partial\Omega_s}\overline{\overline{\sigma}}.\overrightarrow{n}d\partial\Omega_s \tag{2.34}$$

$$\overline{\overline{I}}_i\frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}+\overrightarrow{\omega_i}\wedge\overline{\overline{I}}_i\overrightarrow{\omega_i}=\int_{\partial\Omega_s}\overrightarrow{G_i(t)x}\wedge\overline{\overline{\sigma}}.\overrightarrow{n}d\partial\Omega_s \tag{2.35}$$

avec $\overline{\overline{I}}_i$ le tenseur d'inertie, $\overrightarrow{V_i}$la vitesse du centre de gravité $G_i(t)$ du $i$ème corps rigide et $\overrightarrow{\omega_i}$ sa vitesse de rotation. On complète le tout avec des conditions initiales pour tous les corps rigides. A présent, on écrit la formulation variationnelle du problème. On garde les mêmes conditions initiales et :

$$\begin{aligned}&\rho\int_{\Omega_f}\left[\tfrac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t}+\overrightarrow{u}.\nabla\overrightarrow{u}\right]\overrightarrow{v}d\overrightarrow{x}+2\mu\int_{\Omega_f}\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}):\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{v})d\overrightarrow{x}\\&-\int_{\Omega_f}p\nabla.(\overrightarrow{v})+\sum_{i=1}^{Np}M_i\dot{\overrightarrow{V_i}}.\overrightarrow{Y_i}+\sum_{i=1}^{Np}\left(\overline{\overline{I}}_i\dot{\overrightarrow{\omega_i}}+\overrightarrow{\omega_i}\wedge\overline{\overline{I}}_i\overrightarrow{\omega_i}\right).\overrightarrow{\theta_i}\\&=\rho\int_{\Omega_f}\overrightarrow{g}.\overrightarrow{v}d\overrightarrow{x}+\sum_{i=1}^{Np}M_i\overrightarrow{g}.\overrightarrow{Yi},\ \forall\{\overrightarrow{v},\overrightarrow{Y},\overrightarrow{\theta}\}\in W_0(t)\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\int_{\Omega_f}q\overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{u})\,d\overrightarrow{x}=0,\forall q\in L^2(\Omega_f) \tag{2.37}$$

En n'oubliant pas le champ de vitesse solide ((2.32)) appliqué sur chaque morceau de $\partial\Omega_s$.

Avec

$$W_0(t) = \left\{ \begin{array}{l} \{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{\theta}\} | \overrightarrow{v} \in (H^1(\Omega_f))^d, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ sur } \partial\Omega, \\ \overrightarrow{Y} = \{\overrightarrow{Y_i}\}_{i=1}^{Np}, \overrightarrow{\theta} = \{\overrightarrow{\theta_i}\}_{i=1}^{Np}, \text{ avec } \overrightarrow{Y_i} \in \mathbb{R}^d, \overrightarrow{\theta_i} \in \mathbb{R}^3, \\ \overrightarrow{v(\overrightarrow{x}, t)} = \overrightarrow{Y_i} + \overrightarrow{\theta_i} \wedge \overrightarrow{G_i x} \text{ sur } \partial\Omega_s \end{array} \right\} \tag{2.38}$$

On utilise alors les domaines fictifs pour modifier la formulation variationnelle (complète avec les conditions aux limites). La méthode consiste à :

(i) "remplir" les particules avec le fluide environnant.

(ii) supposer que le fluide dans les particules a un mouvement de corps rigide

(iii) utiliser (i) et (ii) pour transformer la formulation variationnelle

(iv) forcer le mouvement de corps rigide dans chaque particule via un multiplicateur de Lagrange distribué dans le domaine de la particule

(v) utiliser (iii) et (iv) pour obtenir une formulation variationnelle impliquant les multiplicateurs de Lagrange forçant le mouvement de corps rigides dans tous les P_i.

- Hypothèse simplificatrice : on suppose que les corps rigides sont formés d'un matériau homogène de masse volumique ρ_i (on peut même simplifier encore en disant que tous les corps rigides sont issus du même matériau)

En passant les détails de calcul (c.f. [Glowinski *et al.*, 2001]), il vient :

$$\tilde{W}_0(t) = \left\{ \begin{array}{l} \{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{\theta}\} | \overrightarrow{v} \in (H_0^1(\Omega))^d, \overrightarrow{Y} = \{\overrightarrow{Y_i}\}_{i=1}^{Np}, \\ \overrightarrow{\theta} = \{\overrightarrow{\theta_i}\}_{i=1}^{Np}, \text{ avec } \overrightarrow{Y_i} \in \mathbb{R}^d, \overrightarrow{\theta_i} \in \mathbb{R}^3, \\ \overrightarrow{v(\overrightarrow{x}, t)} = \overrightarrow{Y_i} + \overrightarrow{\theta_i} \wedge \overrightarrow{G_i x} \text{ dans } P_i, \forall i = 1, ..., Np \end{array} \right\} \tag{2.39}$$

Pour imposer le mouvement de corps rigides, on utilise une collection de multiplicateurs de Lagrange : $\{\overrightarrow{\lambda}_i\}_{i=1}^{Np}$ telle que $\forall i = 1, ..., Np$, $\overrightarrow{\lambda}_i \in \Lambda_i(t)$ avec $\Lambda_i(t) = (H^1(P_i(t)))^d, \forall i = 1, ..., Np$.

$\forall t \in]0, T[$, trouver $\overrightarrow{u(t)}, p(t), \{\overrightarrow{V_i}(t), \overrightarrow{G_i}(t), \overrightarrow{\omega_i}(t), \overrightarrow{\lambda_i}(t)\}_{i=1}^{Np}$ tels que $\overrightarrow{u}(t) \in (H^1(\Omega))^d$, $\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{g_0}(t)$ sur $\partial\Omega$, $p(t) \in L^2(\Omega)$, $\overrightarrow{V_i}(t) \in \mathbb{R}^d, \overrightarrow{G_i}(t) \in \mathbb{R}^d, \overrightarrow{\omega_i}(t) \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\lambda_i}(t) \in \Lambda_i(t)$, $\forall i = 1, ..., Np$ et

$$\begin{array}{l} \rho_f \int_\Omega \left[\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \overrightarrow{u}.\nabla \overrightarrow{u} \right] \overrightarrow{v} d\overrightarrow{x} - \int_\Omega p \nabla.(\overrightarrow{v}) + 2\mu \int_\Omega \overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}) : \overline{\overline{D}}(\overrightarrow{v}) d\overrightarrow{x} \\ - \sum_{i=1}^{Np} < \overrightarrow{\lambda_i}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{Y_i} - \overrightarrow{\theta_i} \wedge \overrightarrow{G_i \overrightarrow{x}} >_i + \sum_{i=1}^{Np} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_i}\right) M_i \dot{\overrightarrow{V_i}}.\overrightarrow{Y_i} \\ + \sum_{i=1}^{Np} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_i}\right) \left(\overline{\overline{I}_i} \dot{\overrightarrow{\omega_i}} + \overrightarrow{\omega_i} \wedge \overline{\overline{I}_i} \overrightarrow{\omega_i} \right).\overrightarrow{\theta_i} \\ = \rho_f \int_\Omega \overrightarrow{g}.\overrightarrow{v} d\overrightarrow{x} + \sum_{i=1}^{Np} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_i}\right) M_i \overrightarrow{g}.\overrightarrow{Yi}, \forall \{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{\theta}\} \in \tilde{W}_0(t) \end{array} \tag{2.40}$$

$$\int_\Omega q \nabla.\overrightarrow{u} d\overrightarrow{x} = 0, \forall q \in L^2(\Omega) \tag{2.41}$$

$$< \overrightarrow{\mu_i}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{Y_i} - \overrightarrow{\theta_i} \wedge \overrightarrow{G_i \overrightarrow{x}} >_i = 0, \forall \mu_i \in \Lambda_i(t), \forall j = 1, ..., Np \tag{2.42}$$

$$\frac{d\overrightarrow{G_i}}{dt} = \overrightarrow{V_i}, \forall i = 1, ..., Np \tag{2.43}$$

$$\overrightarrow{V_i}(0) = \overrightarrow{V_{0i}}, \overrightarrow{G_i}(0) = \overrightarrow{G_{0i}}, \overrightarrow{\omega_i}(0) = \overrightarrow{\omega_{0i}}, P_i(0) = P_{0i}, \forall i = 1, ..., Np \tag{2.44}$$

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}, 0) = \overrightarrow{u_0}(\overrightarrow{x}), \forall \overrightarrow{x} \in \Omega_f, \overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}, 0) = \overrightarrow{V_{0i}} + \overrightarrow{\omega_{0i}} \wedge \overrightarrow{\overrightarrow{G_{0i}}\overrightarrow{x}}, \forall x \in P_{0i} \tag{2.45}$$

Pour finir il faut choisir un produit scalaire $< ., . >_i$ sur $\Lambda_i(t)$; parmi les choix possibles et présentés par Glowinski, je ne donne que le premier :

$$< \overrightarrow{\mu}, \overrightarrow{v} >_i = \int_{P_i(t)} \left(\overrightarrow{\mu} . \overrightarrow{v} + l_i^2 \nabla \overrightarrow{\mu} : \nabla \overrightarrow{v} \right) d\overrightarrow{x}, \forall (\overrightarrow{\mu}, \overrightarrow{v}) \in (\Lambda_i(t))^2 \tag{2.46}$$

Où les opérateurs "." et ":" sont les produits scalaire et doublement contractant classiques de $\mathbb{R}^d$ et l_i est une longueur caractéristique (le diamètre de P_j par exemple).

Une formulation variationnelle sur Ω tout entier a donc été définie, il faudra alors la résoudre par éléments/volumes finis par exemple, chercher une discrétisation... etc... Mais l'ensemble du problème est posé. Un ajout à cette formulation variationnelle par Glowinski concerne les collisions éventuelles des domaines P_i en effet si l'on regarde bien la formulation, on s'aperçoit que tout le long on a supposé : $\forall (i, j) \in \{1, ..., Np\}^2, P_i \cap P_j = \emptyset,$ si $i \neq j$; or les domaines mouvants sont susceptibles de se chevaucher. Mais le traitement des collisions n'est pas un problème trivial.

Cette méthode n'est pas adaptée aux problèmes d'érosion car elle concerne les corps rigides sans déformation. La modification de la méthode pour utiliser des solides déformables est possible mais très coûteuse en calculs et donc cette méthode n'a pas été retenue pour la modélisation de l'érosion.

2.2.2 Domaines fictifs selon Angot

Pour l'étude de l'érosion, une formulation plus simple [Angot *et al.*, 1999, Angot, 2005] du problème pénalisé, mais restant d'une grande précision, a été choisie. Les cas traités par Angot sont des interactions fluide/solide, c'est pourquoi il se base sur les équations de Navier-Stokes. De plus, les conditions habituelles d'interface entre un fluide et un solide nous donnent une continuité des vitesses et de la pression. L'extension de la pression dans la partie solide se fait naturellement. Angot présente deux méthodes nommées "pénalisation L^2 et H^1". D'après l'auteur, la pénalisation H^1 n'apporte pas d'amélioration significative (au moins sur l'exemple proposé) et donc seule la pénalisation L^2 sera présentée ici. Le problème traité est celui d'un obstacle fixe dans un écoulement en charge. On se place dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles auxquelles on rajoute un terme de pénalisation du champ de vitesse : dans $\Omega \times]0, T[$:

$$\nabla . \overrightarrow{u_\eta} = 0 \tag{2.47}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \overrightarrow{u}_\eta}{\partial t} + \overrightarrow{u}_\eta . \nabla \overrightarrow{u}_\eta \right) - \mu \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u}_\eta + \nabla p_\eta + 1_{\Omega_s} \frac{1}{\eta} (\overrightarrow{u}_\eta - \overrightarrow{v}_0) = \overrightarrow{f} \tag{2.48}$$

dans Ω :

$$\overrightarrow{u}_\eta(., 0) = u_0 \tag{2.49}$$

sur $\partial\Omega$:

$$\overrightarrow{u}_\eta = 0 \tag{2.50}$$

On suppose $\eta << 1$, ce sera un paramètre de réglage et on écrit que $\overrightarrow{u_\eta} = \overrightarrow{u} + \eta\,\overrightarrow{\tilde{u}}$ et $p_\eta = p + \eta\tilde{p}$.

En développant l'équation (2.48) et isolant les termes d'ordre égaux en η, on impose bien un un champ de vitesse $\overrightarrow{v}_0$ à la partie solide et que la partie fluide est régie par les équations de Navier-Stokes. De plus, en supposant la continuité de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\tilde{u}}$, p et $\tilde{p}$ sur $\partial\Omega_s$ et $\overrightarrow{\tilde{u}}(.,0) = 0$ alors $\overrightarrow{\tilde{u}}$ est complètement défini sur tout $\Omega\times]0,T[$. La définition de la vitesse imposée au domaine sol est Eulérienne et permet donc les déformations du solide. On a même l'expression du champ de pression à l'intérieur du solide :

$$\Delta p_s = \nabla.\left(\rho\frac{\partial\overrightarrow{v_0}}{\partial t} + \rho\overrightarrow{v_0}.\nabla\overrightarrow{v_0} - \mu\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{v_0}\right) \tag{2.51}$$

Des résultats de convergence et d'estimation de l'erreur sont disponibles dans l'article [Angot *et al.*, 1999].

2.3 Système d'équations final

Les problèmes d'érosions sont des problèmes où l'on voit apparaître deux échelles de temps, l'une reliée à la vitesse de l'écoulement, et l'autre à la célérité de l'interface. Ces deux vitesses d'évolution sont, dans bien des cas, très différentes. Il se pose alors la question de considérer l'écoulement comme stationnaire vis à vis de l'érosion. Le paragraphe 5.3.3.1 montre que pour des coefficients d'érosion suffisamment petits, l'écoulement peut être considéré comme stationnaire face à la vitesse d'érosion. La méthode utilisée pour calculer et traduire le mouvement d'interface par érosion est indépendante du type d'écoulement. Par souci d'économie de temps de calcul, nous allons utiliser deux types d'écoulement, l'un avec les équations de Navier-Stokes complètes et l'autre avec les équations de Stokes stationnaires.

2.3.1 Le Système Navier-Stokes

Cette partie résume les relations précédemment énoncées. Afin de se rapprocher de la physique, on écrit le coefficient de pénalisation de la manière suivante :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{\mu_f}{K_s} \tag{2.52}$$

Ainsi, les lois de conservation s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla.\overrightarrow{u} = 0 \\ \rho_f\left[\frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u}.\overline{\overline{\nabla}})\overrightarrow{u}\right] = -\nabla p + 2\overrightarrow{\nabla}.\left(\mu\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u})\right) - \frac{\mu_f}{K}\overrightarrow{u} \end{cases} \tag{2.53}$$

La viscosité μ peut être considérée comme constante dans le cas d'un écoulement laminaire inertiel ou bien décrite à l'aide d'un modèle de turbulence (c.f. Annexes). Le paramètre de pénalisation K sera défini comme :

$$K^{-1}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in \Omega_f(t) \\ K_s^{-1} & \text{Si } x \in \Omega_s(t) \end{cases} \tag{2.54}$$

K_s sera le paramètre de pénalisation du champ de vitesse fluide dans le sol, homogène à une perméabilité. Dans ce cas, le domaine sol sera considéré comme fixe.

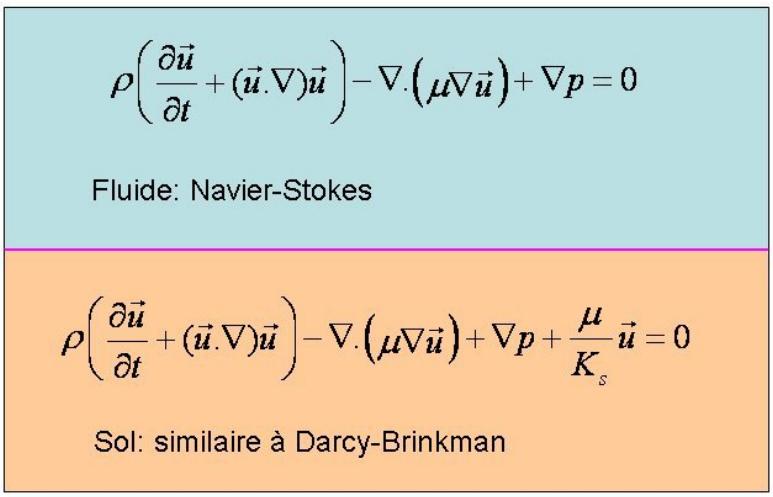


FIGURE 2.1 – *Visualisation des équations en fonction du domaine*

2.3.2 Le Système Stokes stationnaire

Dans cette partie on considère la pénalisation d'Angot uniquement sur le système de Stokes stationnaire :

$$\begin{cases} \nabla.\overrightarrow{u} = 0 \\ \nabla p - \mu_f \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{u} + \frac{\mu_f}{K}\overrightarrow{u} = 0 \end{cases} \tag{2.55}$$

Cette fois la viscosité ne peut être considérée comme turbulente et est donc constante. D'autre part, seul l'écoulement est considéré comme stationnaire, l'érosion quant à elle est toujours un phénomène dépendant du temps. Ce problème simplifié présente l'intérêt d'être un problème linéaire et donc plus facile à résoudre numériquement. Il prend tout de même en compte la pénalisation L^2 d'Angot afin de repérer les différents milieux. Et la pénalisation est considérée de la même manière que dans le cas Navier-Stokes.

2.4 Discussions et conclusions

Ce chapitre s'est attaché à reformuler les équations dans l'hypothèse de milieux monophasiques tout en cherchant une formulation unifiée des comportements des différents domaines. Le domaine d'écoulement est supposé monophasique par l'hypothèse de suspension diluée et le domaine sol est vu comme un milieu homogénéisé. Dans cette formulation, la géométrie du système n'est pas utilisée pour simplifier les relations comme c'était le cas dans la formulation axisymétrique par exemple. La formulation unifiée tient en effet compte de la géométrie et de son évolution.

Différentes méthodes existent pour décrire un obstacle immergé, nous avons choisi la formulation d'Angot pour sa simplicité et sa robustesse. Le système d'équations final représente bien les équations classiques de Navier-Stokes dans le domaine d'écoulement

et ressemble aux équations de Darcy-Brinkman dans le sol, faisant intervenir un coefficient homogène à une perméabilité. Ce coefficient de pénalisation doit être choisi très petit pour forcer une vitesse nulle dans le sol. Il est à noter que la méthode autorise le mouvement de la zone de sol, il faudra alors repérer ce mouvement par son champ de vitesse eulérien. La méthode de pénalisation suppose toutefois que la localisation des domaines est connue. D'autres méthodes sont donc nécessaires pour repérer et suivre les domaines.

Chapitre 3

Le suivi d'interface

Je fais abstraction de l'étendue ou de l'espace que ce corps renferme, pour ne considérer que ses bornes en tous sens ; et ces bornes me donnent l'idée de surface.
Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

Afin de modéliser l'évolution de l'érosion d'un sol par un écoulement, la première étape consiste à repérer les positions des différents milieux. Il est également important de pouvoir faire évoluer ces positions. Le choix a été fait de ne pas faire évoluer le maillage au cours du calcul et il s'agit donc d'avoir une méthode capable de s'affranchir du maillage. Dans un premier temps il sera traité un état de l'art en matière de suivi d'interface sur maillage fixe, ensuite sera détaillée la méthode Level Set retenue pour cette étude.

3.1 Les méthodes de suivi d'interface

Avant de présenter les principales méthodes de suivi d'interface, il est important d'identifier les multiples problèmes pouvant survenir lorsque l'on cherche à localiser et suivre une interface sur un maillage quelconque.

- En premier lieu, l'interface est totalement arbitraire, sa topologie peut être plus ou moins complexe. Une méthode doit posséder la faculté de localiser le plus finement possible l'interface sur un maillage quelconque donné. Cette capacité est fondamentale pour imposer précisément à une solution discrète des conditions de saut sur la grille de calcul.
- Non seulement l'interface peut avoir une topologie complexe, mais elle peut être également en mouvement. La nécessité de la suivre dans le temps est la caractéristique qui pose le plus de difficultés. En effet, cette dynamique implique que sous certaines conditions l'interface peut subir dans le temps de multiples connexions et ruptures, le nombre de sous-domaines peut très largement évoluer au cours du temps. La gestion de ces phénomènes n'est pas évidente à réaliser et nécessite dans la majorité des cas une méthode Eulerienne comme nous le verrons par la suite.
- Une autre conséquence directe et purement numérique du suivi de l'interface est la conservation de la masse. Si l'on commet des erreurs sur le mouvement local de l'interface, les répercutions peuvent être globales puisque il est possible de perdre

ou gagner sur la taille initiale d'un sous-domaine qui devrait théoriquement rester fixe.
- Ensuite, il doit être possible de calculer le plus facilement et le plus précisément possible les propriétés géométriques de l'interface, comme la normale ou la courbure. Le calcul de ces propriétés est dans bien des cas indispensable, voire fondamental, comme lorsque l'on veut imposer une condition de saut suivant la normale à l'interface.
- Enfin la méthodologie, qui est généralement développée pour un espace bi-dimensionnel, doit être facilement extensible au cas tri-dimensionnel, ce qui est loin d'être toujours le cas.
- Rapidement, il peut être évoqué la capacité de conserver l'interface sans diffusion, la capacité de s'adapter facilement à tout type de maillage, la possibilité de pouvoir localiser et suivre plus de deux milieux sans complications majeures. La méthode doit également être facilement implémentable et être performante en terme de coût de calcul. Pour finir, le potentiel de la méthode quant à de futures extensions au modèle et améliorations de la performance doit être considéré.

Dans tout ce qui suit, aucune méthode basée ou nécessitant une modification quelconque du maillage ne sera discutée. Le maillage fixe, cartésien est utilisé.

3.1.1 Les méthodes Lagrangiennes

3.1.1.1 Les marqueurs de volume

Dans le milieu des années 60, Harlow et Welsch [Harlow et Welch, 1965] ont introduit pour la toute première fois une méthode capable de suivre dans le temps une interface, c'est la méthode MAC pour "Marker and Cells" [1]. La méthode était limitée aux écoulements à surface libre, ce qui limite le champ d'investigation au mouvement d'une seule phase, le mouvement de la seconde étant considéré comme négligeable. Cependant, le concept était tout à fait novateur.

Une grille fixe est utilisée pour simuler le mouvement d'un fluide qui n'en occupe qu'une partie, partie délimitée par la surface libre. Des marqueurs sont distribués uniformément dans la phase dont l'on veut suivre le mouvement comme sur la figure 3.1. Ces marqueurs sont transportés par le champ de vitesse local interpolé. La localisation de l'interface sur la grille est limitée à la présence ou non de marqueurs d'une cellule à l'autre du maillage. L'extension de cette méthode MAC aux écoulements diphasiques a été réalisée par Daly [Daly *et al.*, 1965]. Il a ainsi pu simuler l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

La gestion dans le temps des ruptures et reconnections de l'interface est correcte avec cette méthode, tout comme la conservation de la masse. Cependant, elle nécessite un très grand nombre de marqueurs en comparaison du nombre de points de discrétisation du champ hydrodynamique, ce qui peut être pénalisant en terme de temps de calcul (le stockage mémoire étant aujourd'hui moins gênant que le temps de calcul). Ils doivent être cependant régulièrement redistribués pour assurer un minimum d'homogénéité, c'est là où commencent les difficultés. Il n'est pas du tout rare que l'écoulement tende à fortement concentrer les marqueurs, ou au contraire à les disperser. Enfin, le principal inconvénient de cette méthode est de taille puisque la localisation de l'interface n'est pas connue avec précision, l'accès aux propriétés géométriques locales de l'interface est plus que

1. Il existe souvent une confusion dans la littérature entre la méthode MAC pour "Marker and Cells" et le maillage MAC, décrit plus loin mais introduit par les mêmes auteurs

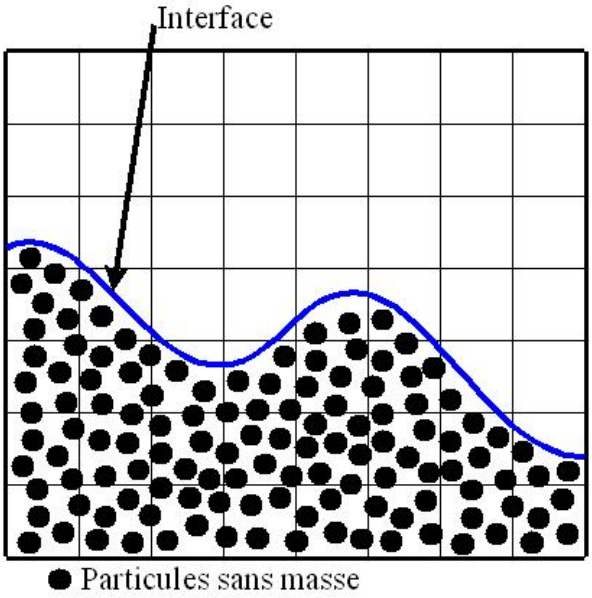


FIGURE 3.1 – *Schématisation de la méthode des marqueurs de volume MAC de Harlow et Welch*

délicat. La qualité de la discrétisation des sauts à l'interface en est fortement affectée. En conclusion, si le concept était novateur, cette méthode est aujourd'hui quasiment obsolète.

3.1.1.2 Marqueurs de front

Après avoir développé l'extension de la méthode MAC pour traiter les écoulements diphasiques, Daly [Daly et Pracht, 1967] a continué ses travaux imaginatifs en proposant de distribuer les marqueurs non pas dans le fluide mais sur l'interface elle-même. Les marqueurs sont ici connectés entre eux par des segments de droite ou des polynômes dit de "splines" qui peuvent être de degré plus ou moins important en fonction de la finesse de description que l'on désire. Ils forment ainsi une ou des chaînes de marqueurs qui peuvent être fermées ou pas, comme schématisé figure 3.2.

L'énorme avantage de cette méthode est que la position de l'interface est connue instantanément et avec précision puisque bien en dessous de l'échelle de la maille associée au champ hydrodynamique. La finesse de la localisation de l'interface sur un maillage qui peut être tout à fait quelconque permet ainsi de construire une discrétisation précise des conditions de saut à l'interface.

Cette technique pose malheureusement plusieurs problèmes. Tout comme les marqueurs de volumes, une redistribution régulière est nécessaire afin d'assurer une bonne répartition en chaque instant des marqueurs de l'interface. Le problème le plus épineux reste que les connexions et ruptures de l'interface ne se font pas naturellement et nécessitent l'intervention d'algorithmes complexes, coûteux et relativement arbitraires.

Enfin, l'extension au cas tridimensionnel n'est pas immédiate. Partant du constat que les marqueurs connectés entre eux constituent un maillage de l'interface indépendant de celui du champ hydrodynamique, on peut arriver à constituer un maillage bidimensionnel de l'interface. Mais cette opération est déjà délicate.

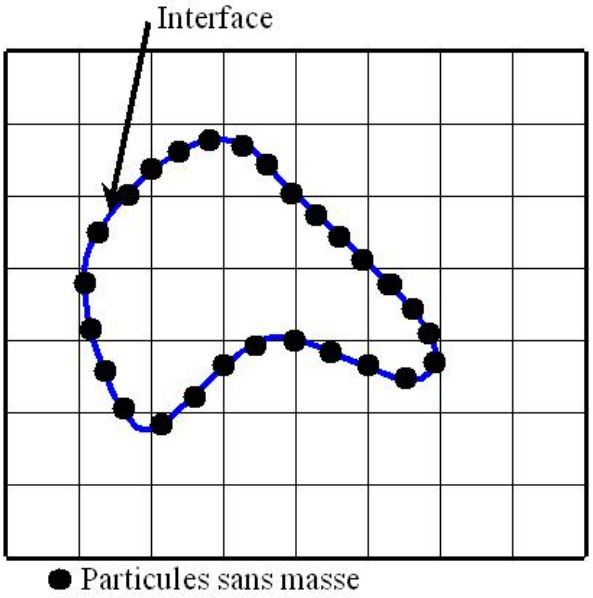


FIGURE 3.2 – *Schématisation de la méthode des marqueurs de front*

3.1.1.3 Paramétrisation de l'interface

Dans cette représentation, on utilise une représentation paramétrique de l'interface, ainsi en dimension deux :

$$\Gamma(t) = (x(s,t), y(s,t)) \tag{3.1}$$

Lorsque l'on regarde l'équation du mouvement de cette interface suivant un champ de vitesse $\overrightarrow{u} = (u, v)$ cela nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= u \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}^2 + \frac{\partial y}{\partial s}^2\right)^{1/2}} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -v \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}^2 + \frac{\partial y}{\partial s}^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cette représentation donne une position très précise de l'interface. Cette méthode est très proche de celle des marqueurs de front, à ceci près que la discrétisation de l'interface est plus naturelle. De plus il est plus facile d'avoir une expression analytique de la normale à l'interface. Cependant, tout comme la méthode des marqueurs de front, l'extension au cas tridimensionnel est compliquée et les connexions et ruptures nécessitent les mêmes algorithmes complexes, coûteux et arbitraires.

3.1.2 Les méthodes Physique

La méthode physique est classiquement appelée VOF pour "Volume of Fluid", elle est la première méthode de suivi d'interface utilisant le concept de transport d'un champ scalaire qui ait été développée. Durant la fin des années 70 et le début des années 80, une série de travaux pionniers a jeté les bases de la méthode. On peut citer les travaux de DeBar [DeBar, 1974], Noh et Woodward [Noh et Woodward, 1976] ou Hirt et Nichols [Hirt et Nichols, 1981]. De nombreuses améliorations ont depuis été apportées, une large synthèse a été réalisée par Pillod et Puckett [Pilliod Jr et Puckett, 2004].

Dans cette approche, on considère une fonction caractéristique $\chi(\overrightarrow{x},t)$ qui vaut zéro dans un milieu et un dans l'autre milieu. Tout comme les marqueurs, elle est advectée passivement par un champ de vitesse local, elle est la solution d'une équation de transport équivalente à l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \overrightarrow{u}.\nabla\chi \tag{3.3}$$

Le lieu de discontinuité détermine la position de l'interface. Si l'on considère un maillage cartésien uniforme bidimensionnel de pas Δx et Δy, nous pouvons définir l'équivalent discret de la fonction caractéristique χ que nous noterons f tel que :

$$f_{ij} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int\int_{(i,j)} \chi(x,y)dxdy \tag{3.4}$$

Si le champ de vitesse est à divergence nulle, nous obtenons immédiatement la formulation conservative de l'équation de transport :

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} + \nabla.(\overrightarrow{u}\, f_{ij}) = 0 \tag{3.5}$$

Lorsque l'interface coupe une cellule, la valeur de f_{ij} est telle que $0 < f_{ij} < 1$. Un exemple de fonction est donnée figure 3.3, elle correspond à la représentation d'une particule. L'équation (3.5) de transport de la fonction est une loi de conservation hyperbolique, on peut alors se référer au vaste nombre de schémas qui ont été développés pour discrétiser ce type d'équation. En particulier, une discrétisation conservative de l'équation permet d'assurer la conservation de la masse, sous réserve d'imposer la contrainte $0 < f_{ij} < 1$.

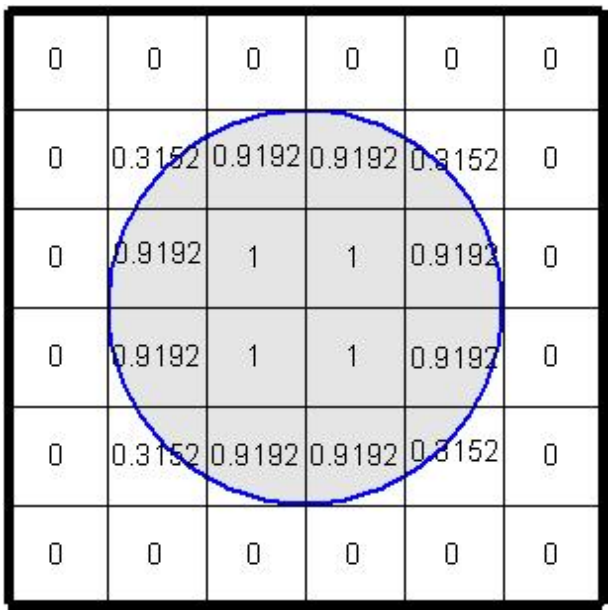


FIGURE 3.3 – *Schématisation d'un milieu circulaire (en gris) et les valeur de χ correspondantes sur un maillage cartésien*

Toutefois, dans la majorité des cas, l'équation (3.5) n'est pas discrétisée directement car la fonction est discontinue et le traitement numérique de l'advection d'une discontinuité est un problème délicat en plus des problèmes éventuels de conservation de la

masse. Pour contourner ce problème, on préfère souvent reconstruire l'interface afin de construire des flux numériques grâce à des considérations géométriques locales assurant la conservation de la masse. Au delà de ce choix, il est de tout manière nécessaire dans bien des situations de calculer la normale à l'interface pour appliquer des conditions de saut dans le système de coordonnées associé. Les algorithmes de reconstruction approchent l'interface de manière linéaire, à l'intérieur de chaque cellule. L'interface est représentée par un segment de droite, ces algorithmes sont donc équivalents à trouver la normale. On s'assure dans tout les cas que le volume défini par le segment de droite correspond au volume donné par la fonction f_{ij}. Les algorithmes de reconstruction de l'interface ont fait l'objet d'améliorations successives au fil des deux dernière décennies de développement des méthodes VOF. En voici quelques exemples.

3.1.2.1 Simple line interface calculation (SLIC)

En fait il s'agit d'un algorithme strictement 1D, qui utilise des blocs de 3×1 ([Noh et Woodward, 1976]) cellules, recherchant l'interface comme une ligne parallèle à un bord de la cellule. Mais certaines versions se basent sur des blocs 3×3 ([Chorin, 1980]). La figure 3.4 montre les résultats que l'on obtient avec cette méthode. La fraction volumique nous donne un rapport de longueur, ensuite, en estimant les cellules qui sont à côté, on décide de quel côté on met les deux phases.

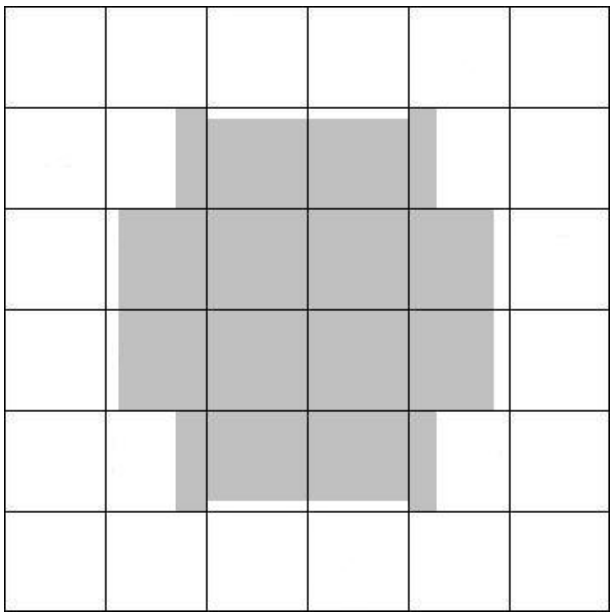


FIGURE 3.4 – *Résultats de la méthode SLIC sur le cas test (en gris, la position de la particule trouvée par la méthode)*

Comme on peut le voir sur la figure 3.4, on privilégie une direction (ici verticale).

3.1.2.2 Central difference (CD)

Dans cet algorithme, on essaye d'exprimer la pente de la droite $(\tilde{m})$ en prenant la moitié de la somme des différences de fraction volumique à gauche et à droite. Plus clairement, si la cellule centrale du bloc 3×3 est la cellule numéro (i, j), on a :

$$\tilde{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{1} f_{i-1,j+k} - f_{i+1,j+k} \tag{3.6}$$

Ici, deux cas de figure sont considérés : la ligne d'interface intersecte deux côtés opposés du bloc 3×3, ou deux côtés adjacents (voir figure3.5).

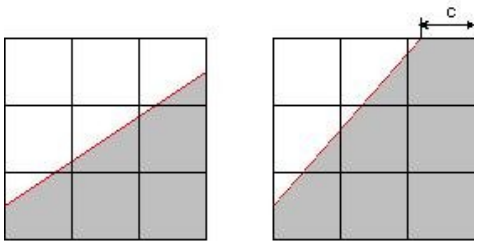


FIGURE 3.5 – *Les deux cas de calcul avec intersection de cotés opposés ou adjacents*

Nous allons commencer par étudier le cas où l'interface coupe des côtés opposés, pour cela nous allons prendre le même cas que dans le paragraphe précédent, à la différence de l'origine du repère qui sera prise en bas à gauche car prendre le point central ne change pas le calcul mais peut devenir une source d'erreur au niveau des indices de cellule. Les cellules sont des carrés de coté h et l'équation de l'interface est $y = mx + b$, on calcule alors A_1, A_3 les sommes de fractions volumiques respectivement à gauche et à droite de la cellule centrale.

On peut montrer que pour toutes lignes d'interface coupant les côtés opposés du bloc, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{1} f_{i-1,j+k} &= A_1 = \frac{m}{2} + \frac{b}{h} \\ \sum_{k=-1}^{1} f_{i+1,j+k} &= A_3 = \frac{5}{2}m + \frac{b}{h} \end{aligned} \tag{3.7}$$

On peut donc retrouver sur les valeurs exactes de m et b. En examinant ce qui se passe dans le second cas, les expressions de A_1 et A_3 changent pour prendre en compte le paramètre c (figure 3.5) :

$$\begin{aligned} A_1 &= m^2 + bh \\ A_3 &= \tfrac{5}{2}m + \tfrac{b}{h} - \tfrac{3}{2}cm - \tfrac{bc}{2h} + \tfrac{3}{2}h \end{aligned} \tag{3.8}$$

En utilisant la formule (3.8),

$$\tilde{m} = \frac{A_3 - A_1}{2} = m - \frac{3}{4}cm - \frac{bc}{4h} + \frac{3}{4}c \tag{3.9}$$

Même si c peut s'exprimer en fonction de h, m et b, on ne retrouve pas $\tilde{m} = m$ et donc on ne retrouve pas la pente d'origine.
Dans la pratique, on ne sait pas si l'interface est une fonction de x (par exemple une ligne verticale n'est fonction que de y) une solution consiste à intervertir les rôle de x et y et de choisir :

$$\tilde{m} = \min\{\tilde{m}^x, \tilde{m}^y\} \tag{3.10}$$

Cette stratégie ne donnera une solution exacte que pour une ligne coupant deux côtés opposés.

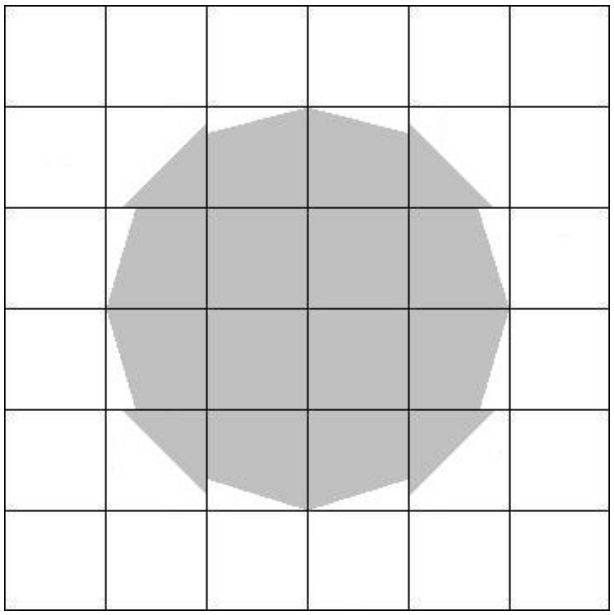


FIGURE 3.6 – *Résultats de la méthode CD sur le cas test (en gris, la position de la particule trouvée par la méthode)*

3.1.2.3 Méthode de Parker et Youngs

Cette méthode est introduite par Parker et Youngs [Parker et Youngs, 1992] et procède de la manière suivante :
On se donne un paramètre α et on calcule des fractions de volume nord en regardant les cellules au dessus de celle considérée, sud en regardant les cellule en dessous, est les cellule de droite et ouest les cellules de gauche comme :

$$\begin{aligned} f_E &= \frac{1}{2+\alpha}\left(f_{i+1,j-1} + \alpha f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}\right) \\ f_W &= \frac{1}{2+\alpha}\left(f_{i-1,j-1} + \alpha f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1}\right) \\ f_N &= \frac{1}{2+\alpha}\left(f_{i-1,j+1} + \alpha f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}\right) \\ f_S &= \frac{1}{2+\alpha}\left(f_{i-1,j-1} + \alpha f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ces expressions nous permettent d'approximer ∇f par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_W - f_E}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f_N - f_S}{2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

que l'on relie à la pente calculée de l'interface par :

$$\tilde{m} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{3.13}$$

D'après les auteurs, il semble que $\alpha = 2$ donne les meilleurs résultats.

On teste donc un cas simple, $y = 2/3x + 1/2$ sera notre interface, les fractions de volumes correspondantes sont celles de la figure 3.3 :

Le calcul des valeurs nord, sud, est, ouest donne :

$$\begin{array}{l} f_E = \frac{157}{192} \\ f_W = \frac{35}{192} \\ f_N = \frac{9}{64} \\ f_S = \frac{55}{64} \end{array} \tag{3.14}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{61}{192} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{23}{64} \end{array} \tag{3.15}$$

d'où $\tilde{m} = \frac{61}{69} \approx 0.884$, ce qui est assez loin de la valeur de départ. Et de plus il semble nécessaire d'avoir un maillage carré.

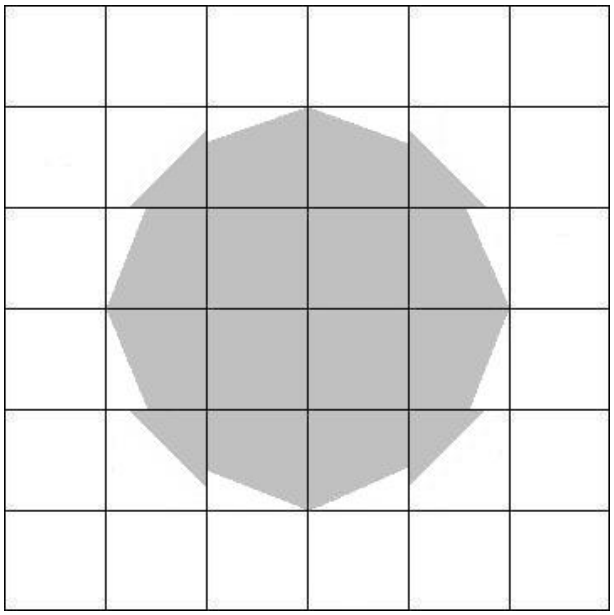


FIGURE 3.7 – *Résultats de la méthode de Parker et Young sur le cas test (en gris, la position de la particule trouvée par la méthode)*

Dans la méthode de Parker et Young il est à noter que dans les quatre cellules de coin, on trouve exactement 1 ou -1 pour la valeur de la pente et ce quelque soit la valeur de α. On peut noter que dans les autres cellules d'interface la fraction volumique n'est pas tout à fait respectée.

3.1.2.4 Reconstruction d'interface par moindre carré (LVIRA et ELVIRA)

Ces deux méthodes, très ressemblantes, ont été introduites par Puckett [Puckett, 1991]. LVIRA/ELVIRA : "(Efficient) Least Squares VOF interface reconstruction algorithm". On prend une grille de 3×3 cellules. La cellule centrale est appelée i, j. Soit $f(x)$ une courbe passant dans la cellule i, j. Soient $f_{k,l}$ pour $k \in \{i-1, i, i+1\}$ et $l \in \{j-1, j, j+1\}$ les fractions volumiques correspondantes. Soit $\tilde{f}$ une approximation linéaire de f, de pente $\tilde{m}$ et de fractions volumiques correspondantes $\tilde{f}_{k,l}$. On fait l'hypothèse que $\tilde{f}_{i,j} = f_{i,j}$. On définit $E^2_{i,j}$ l'erreur L^2 entre les fractions volumiques dans le bloc 3×3 centré en i, j :

$$E^2_{i,j}(\tilde{m}) = \left(\sum_{k,l=-1}^{1} (\tilde{f}_{i+k,j+l}(\tilde{m}) - f_{i+k,j+l})^2 \right)^{1/2} \tag{3.16}$$

On cherche alors à minimiser cette fonction de la pente (on fait "tourner" la droite) tout en gardant $\tilde{f}_{i,j} = f_{i,j}$. Il est à noter que l'on peut choisir sur le même modèle de calculer l'erreur $E^\infty_{i,j}$ ou $E^1_{i,j}$. Il s'agit d'une méthode exacte si $f(x)$ est linéaire.

Le modèle ELVIRA reste basé sur ce principe [Pilliod Jr, 1992], mais choisit $\tilde{m}$ parmi six candidats. Les trois premiers sont les différences arrière, centrale et avant des sommes des fractions volumiques en colonne, soit :

$$\begin{aligned} \tilde{m}^x_b &= \sum_{l=-1}^{1} f_{i,j+l} - f_{i-1,j+l} \\ \tilde{m}^x_c &= \frac{1}{2} \sum_{l=-1}^{1} f_{i+1,j+l} - f_{i-1,j+l} \\ \tilde{m}^x_f &= \sum_{l=-1}^{1} f_{i+1,j+l} - f_{i,j+l} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Les trois suivants sont identiques mais sur l'axe y :

$$\begin{aligned} \tilde{m}^y_b &= \sum_{k=-1}^{1} f_{i+k,j} - f_{i+k,j-l} \\ \tilde{m}^y_c &= \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^{1} f_{i+k,j+l} - f_{i+k,j-l} \\ \tilde{m}^y_f &= \sum_{k=-1}^{1} f_{i+k,j+l} - f_{i+k,j} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dans ce cas, il ne faut pas oublier d'interpréter les valeurs de l'erreur correctement.

On n'utilise alors la minimisation (3.16) que pour les six candidats présentés en (3.17) et (3.18). Le model ELVIRA semble plus rapide étant donné que l'on utilise moins de valeurs pour $\tilde{m}$ mais perd de la précision. On peut noter également que l'on a un mixage des méthodes vues précédemment.

Les résultats sur notre cas test sont montrés par la figure 3.8.

3.1.2.5 Conclusion

En résumé, sous quelques réserves préliminaires, la résolution numérique de l'équation d'advection possède la propriété très intéressante de conserver la masse. Cependant, même si les algorithmes de reconstruction peuvent s'avérer efficaces pour calculer la normale et assurer la conservation de la masse, la position de l'interface n'est pas connue de manière très précise. Cela peut être pénalisant lorsqu'on couple la méthode à un solveur des équations de Navier-Stokes et qu'on cherche à discrétiser les conditions de saut. On peut également souligner que le passage d'un espace bi-dimensionnel à un espace tridimensionnel n'est pas immédiat, la géométrie de la reconstruction de l'interface n'étant plus la même. Il reste que la méthode est relativement peu coûteuse et massivement parallélisable. De plus, la méthode VOF permet de gérer naturellement les changements de topologie de l'interface, les ruptures et les connexions.

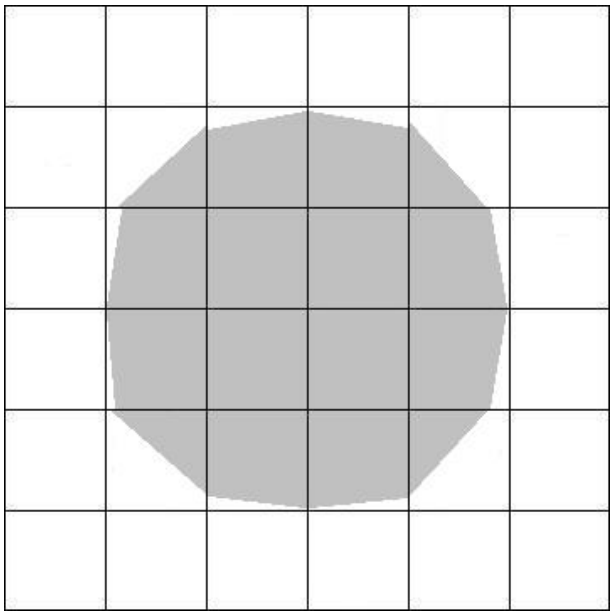


FIGURE 3.8 – *Résultats de la méthode ELVIRA sur le cas test (en gris, la position de la particule trouvée par la méthode)*

3.1.3 La méthode analytique

Cette méthode, appelée Level-Set, a été originellement développée par Osher et Sethian [Osher et Sethian, 1981] pour capter les mouvements d'une interface dont la vitesse est dépendante de la courbure locale. On introduit donc une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, telle que cette fonction soit positive dans un milieu et négative dans l'autre. Ainsi l'interface est repérée par la ligne de niveau $\psi = 0$. L'équation du mouvement d'interface est alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \overrightarrow{u}.\nabla\psi = 0 \tag{3.19}$$

Cette méthode reprend les avantages de la méthode physique mais permet de retrouver plus facilement la position de l'interface. Il s'agit là de la méthode retenue pour cette étude.

3.2 La Méthode Level Set

Afin de simuler l'érosion d'un sol par un fluide, il est nécessaire d'une part de connaître avec précision la position de l'interface et d'autre part de bien connaître la normale à l'interface. De plus, le mouvement de l'interface n'est a priori pas connu puisqu'il est une conséquence du mouvement hydrodynamique et donc des changements de topologies sont à prévoir. Notre choix s'est donc porté sur la méthode Level Set qui donne un accès précis à la géométrie de l'interface, la position de l'interface avec une bonne précision et pour l'élégance de sa formulation mathématique. En outre il semble que cette méthode possède plus de potentialité en terme d'extensions possibles, d'améliorations et de perspectives.

3.2.1 Principe de la méthode

Étant donné une interface $\Gamma(t)$, la méthode Level Set consiste à introduire une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière (au moins L^2) définissant l'interface de manière implicite par la ligne de niveau (Level Set en anglais) $\psi = 0$, c'est à dire :

$$\Gamma(t) = \{\overrightarrow{x} | \psi(\overrightarrow{x}, t) = 0\} \tag{3.20}$$

De plus, cette fonction permet de différencier les milieux de chaque coté de l'interface car on supposera cette fonction telle qu'elle sera négative dans un milieu et positive dans l'autre.

L'évolution au cours du temps de la fonction Level Set est donnée par la relation de transport suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}.\nabla\right)\psi = 0 \tag{3.21}$$

où $\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}$ est le champ de vitesse de déplacement de l'interface défini sur tout le domaine avec $\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}|_{\Gamma(t)} = \overrightarrow{c}_\Gamma$. Il s'agit d'une extension à tout le domaine de la célérité de l'interface. $\overrightarrow{c}_\Gamma$ ne représente que la célérité de la ligne de niveau 0 de la fonction Level Set, l'extension $\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}$ doit faire évoluer toutes les lignes de niveau. Cette extension doit être suffisamment régulière (au moins L^2) pour garder la régularité de la fonction Level Set. Un algorithme permettant d'obtenir cette extension est décrit au paragraphe 3.2.3.1.

Le formalisme ainsi obtenu s'inscrit dans le cadre général des systèmes d'équations aux dérivées partielles, pour lesquels des phénomènes de propagation d'interface doivent être décrits.

A partir de cette première ébauche, on peut déjà déduire certaines remarques :

- Les propriétés algébriques remarquables de la méthode sont évidentes. En effet le vecteur normal à l'interface peut être calculé facilement grâce à la fonction ψ :

$$\overrightarrow{n} = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \tag{3.22}$$

  On peut en déduire aisément la courbure de l'interface :

$$\kappa(\psi) = -\nabla \overrightarrow{n} \tag{3.23}$$

  Les vecteurs unitaires tangents à l'interface peuvent également être calculés complétant $\overrightarrow{n}$ en une base orthonormale.
- On constate également que la méthode peut être généralisée à N dimensions sans contraintes particulières.
- A l'aide de la fonction de Heavyside H, il vient que $H(\psi) = \chi$, ce qui nous ramène à la méthode VOF et donc aux propriétés de cette méthode. En revanche, les propriétés géométriques de l'interface (telles que la normale ou la courbure) sont plus accessibles à l'aide de la méthode Level Set.
- Dans la pratique, la fonction Level Set est choisie comme la distance algébrique à l'interface. La fonction distance algébrique respecte bien les hypothèses fondamentales de ψ tout en apportant une information supplémentaire qui sera utile par la suite, ainsi qu'une bonne régularité de la fonction. La résolution numérique de l'équation 3.21 peut conduire à la perte de la propriété de distance algébrique (notamment lorsque la vitesse de transport n'est pas suffisamment régulière). Des algorithmes supplémentaires sont alors nécessaires pour réinitialiser la fonction Level Set à la distance algébrique.

3.2.2 Méthodes numérique pour lois hyperboliques

L'un des principaux attraits de la méthode Level Set réside dans sa formulation mathématique sous forme d'équation aux dérivées partielles. La qualité des calculs effectués dépend alors fortement des discrétisations spatiales et temporelles qui ont été développées. Dans ce contexte, les travaux réalisés sur la discrétisation des équations d'Euler ou de Navier-Stokes compressible en régime supersonique semblent adaptés au formalisme Level Set. En effet, des schémas numériques performants ont été spécialement conçus pour le calcul de la propagation d'ondes de choc dans les milieux fluides. La prédiction de tels phénomènes nécessite des méthodes numériques très robustes, capables de décrire des surfaces de discontinuité de certaines variables. En contrepartie de leur grande robustesse, ces schémas introduisent des erreurs numériques dissipatives qui ont tendance à lisser les solutions obtenues, notamment dans les zones de forts gradients (on parle de dissipation numérique).

Ce phénomène devient particulièrement nuisible sur les simulations de type interaction "turbulence-onde de choc". En effet, si la dissipation numérique introduite par le schéma est trop importante, la description de la turbulence en est affectée et il en résultera une surévaluation de la dissipation d'énergie cinétique turbulente.

Ainsi de nombreuses études ont été effectuées pour diminuer les erreurs numériques introduites dans ce type de simulations. Cependant, un compromis entre la robustesse du calcul et la précision souhaitée est inévitable. Dans [Shu et Osher, 1989] les auteurs proposent une discrétisation intéressante pour les lois hyperboliques, qui présente l'avantage d'être "intrinsèquement robuste" quelles que soient les singularités de la solution, tout en introduisant une dissipation moindre par rapport aux méthodes déjà existantes ; ces schémas sont appelés ENO (Essentially Non Oscillatory).

Dans [Jiang et Shu, 1996], les auteurs proposent des améliorations de ces schémas, qui constituent actuellement l'un des meilleurs compromis (robustesse/précision) pour les simulations d'écoulements supersoniques turbulents, ce sont les schémas WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory).

Les études de [Osher et Sethian, 1981] ont montré que les schémas ENO et/ou WENO sont adaptés pour la discrétisation de l'équation de propagation de l'interface (3.21). En effet leur grande robustesse permet d'une part d'accepter les singularités susceptibles de se développer dans les solutions d'équations hyperboliques et d'autre part, grâce à leur précision d'ordre élevé, on peut espérer obtenir une assez bonne description des structures fines de l'interface.

3.2.2.1 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle de l'équation est explicite et nécessite un critère sur le pas de temps pour assurer la stabilité des calculs. Pour ce type d'équation on peut obtenir la stabilité en utilisant la condition de Courant-Friedrichs-Lewy, à savoir que les ondes numériques dues aux erreurs de troncature doivent se propager au moins aussi vite que les ondes physiques.

$$\frac{\Delta \overrightarrow{x}}{\Delta t} > |\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext}| \tag{3.24}$$

Cette condition peut également être interprétée comme une condition qui interdit à une courbe caractéristique de la solution "d'avancer" de plus d'une maille $\Delta \overrightarrow{x}$ pendant un intervalle de temps Δt. En pratique on écrit :

$$\Delta t = cfl \frac{\min \Delta \overrightarrow{x}}{\| \overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext} \|_{\infty}} \tag{3.25}$$

Où $cfl \in]0,1[$ est appelé coefficient de Courant-Friedrichs-Lewy et peut varier suivant les schémas numériques utilisés.

En général, la discrétisation temporelle d'équations de transport pose moins de difficultés que la discrétisation spatiale. En effet, les méthodes les plus couramment utilisées pour les équations différentielles ordinaires s'adaptent très bien à la discrétisation temporelle des équations aux dérivées partielles.

3.2.2.1.1 Schéma d'Euler explicite

Le schéma d'Euler explicite est le plus simple, précis à l'ordre 1. Son application à l'équation (3.21), donne l'algorithme suivant :

$$\psi^{n+1} = \psi^n - \Delta t \left((\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext})^n . \nabla \right) \psi^n \tag{3.26}$$

Peu coûteux en calcul, ce schéma s'avère souvent insuffisant pour des simulations complexes.

3.2.2.1.2 Schéma à pas multiples (Runge-Kutta)

Très souvent utilisé, le schéma de Runge-Kutta offre un très bon compromis entre stabilité numérique et précision. Le principe des schémas à pas multiples est d'évaluer plusieurs valeurs intermédiaires de la variable intégrée à l'intérieur d'un pas de temps. Chaque évaluation intermédiaire constitue un pas (d'où schéma à pas multiples) supplémentaire. L'ordre de précision du schéma peut être augmenté en augmentant le nombre de pas intermédiaires. Ici est donnée la démarche permettant d'obtenir la discrétisation d'ordre 2 à titre d'exemple et celle d'ordre 4 qui est implémentée dans le code final.

- Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{cases} r_c^1 = \Delta t \left((\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext})^n . \nabla \right) \psi^n \\ y_c^2 = \psi^n + \Delta t \ r_c^1 \\ r_c^2 = \Delta t \left((\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext})^n . \nabla \right) y_c^2 \\ \psi^{n+1} = \psi^n + \frac{\Delta t}{2} (r_c^1 + r_c^2) \end{cases} \tag{3.27}$$

- Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{cases} r_c^1 = \Delta t \left((\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext})^n . \nabla \right) \psi^n \\ y_c^2 = \psi^n + \frac{\Delta t}{2} \ r_c^1 \\ r_c^2 = \Delta t \left((\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext})^n . \nabla \right) y_c^2 \\ y_c^3 = \psi^n + \frac{\Delta t}{2} \ r_c^2 \\ r_c^3 = \Delta t \left((\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext})^n . \nabla \right) y_c^3 \\ y_c^4 = \psi^n + \Delta t \ r_c^3 \\ r_c^4 = \Delta t \left((\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext})^n . \nabla \right) y_c^4 \\ \psi^{n+1} = \psi^n + \frac{\Delta t}{6} (r_c^1 + 2r_c^2 + 2r_c^3 + r_c^4) \end{cases} \tag{3.28}$$

En suivant la méthode exposée ci-dessus, on voit que le schéma de Runge-Kutta d'ordre n peut être décomposé comme la succession de n pas d'Euler, avec des pondérations à chaque pas. L'inconvénient lié à l'utilisation de ce type de schémas est une

augmentation importante du temps de calcul à chaque itération cependant, la précision obtenue est fortement améliorée et la diffusion numérique atténuée.

3.2.2.2 Discrétisation spatiale

Il s'agit maintenant essentiellement de discrétiser le terme $(\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}.\nabla)\,\psi$. Tous les schémas étudiés dans ce travail de thèse sont des schémas de type différences finies (discrétisation suivant une seule direction du maillage) adaptés à des maillages cartésiens. Par souci de simplicité seules les dérivées suivant l'axe des x seront présentées.

3.2.2.2.1 Schéma Amont ("Upwind")

Les schémas centrés sont instables lorsqu'ils sont appliqués aux équations hyperboliques. En revanche, en s'inspirant de la méthode des caractéristiques, on peut élaborer un schéma très simple et très robuste. En effet si la vitesse $(c_\Gamma^{ext})_{i,j} = \|(\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext})_{i,j}\| > 0$, les valeurs de ψ évoluent de la gauche vers la droite, donc si l'on se place en un point à un instant donné, la méthode des caractéristiques indique de décentrer notre dérivée vers la gauche pour connaître la valeur de ψ à un instant ultérieur ; et inversement si $(c_\Gamma^{ext})_{i,j} < 0$, il faut décentrer vers la droite. Ce petit raisonnement conduit à la construction d'un schéma amont (décentré suivant la direction de propagation des courbes caractéristiques) d'ordre 1.

Si $(c_\Gamma^{ext})_{i,j} > 0$,

$$\psi_x^+ = \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{ij} = \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1j}}{\Delta x} \tag{3.29}$$

autrement si $(c_\Gamma^{ext})_{i,j} < 0$,

$$\psi_x^- = \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{ij} = \frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{\Delta x} \tag{3.30}$$

en revenant au problème $(\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}.\nabla)\,\psi$ on peut écrire la dérivée en terme de maxima et minima :

$$(c_\Gamma^{ext})_{ij} \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{ij} = \max\left((c_\Gamma^{ext})_{ij}, 0\right)\psi_x^+ + \min\left((c_\Gamma^{ext})_{ij}, 0\right)\psi_x^- \tag{3.31}$$

Bien que très dissipatif, ce schéma est bien connu pour sa grande stabilité numérique même lorsqu'on l'applique à des équations hyperboliques de convection. De plus, la procédure consistant à décentrer le "stencil" du schéma (i.e. les cellules utilisées pour le calcul de la dérivée) suivant la direction de propagation des courbes caractéristiques a été reprise dans la construction de la plupart des schémas numériques d'ordre élevé utilisés pour discrétiser ce genre d'équations.

3.2.2.2.2 Schéma Weighted Essentially Non Oscillatory d'ordre 5 (WENO5)

[Liu *et al.*, 1994] ont mis en évidence que le fait de choisir le "stencil", où la solution est la plus lisse, peut engendrer une dissipation importante dans les régions où la solution devrait être bien résolue. Ils ont alors proposé une méthode "Weighted Essentially Non Oscillatory", une formulation ENO pondérée, dans laquelle on prend une combinaison

des différentes approximations ENO possibles. Bien sûr, si l'une des approximations ENO est interpolée à travers une discontinuité, on lui attribue un poids maximum de manière à ce que sa contribution, et donc les erreurs numériques en découlant, soient minimisées. Originellement d'ordre 4, la précision de ce schéma a été augmentée jusqu'à l'ordre 5 par [Jiang et Shu, 1996].

Il s'agit là de faire comme au chapitre précédent, mais le calcul des ψ_x^+ et ψ_x^- est plus compliqué :
pour déterminer ψ_x^-, on pose :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\psi_{i-2j}-\psi_{i-3j}}{\Delta x} \\ v_2 &= \frac{\psi_{i-1j}-\psi_{i-2j}}{\Delta x} \\ v_3 &= \frac{\psi_{ij}-\psi_{i-1j}}{\Delta x} \\ v_4 &= \frac{\psi_{i+1j}-\psi_{ij}}{\Delta x} \\ v_5 &= \frac{\psi_{i+2j}-\psi_{i+1j}}{\Delta x} \end{aligned} \tag{3.32}$$

pour déterminer ψ_x^+, on pose :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\psi_{i+3j}-\psi_{i+2j}}{\Delta x} \\ v_2 &= \frac{\psi_{i+2j}-\psi_{i+1j}}{\Delta x} \\ v_3 &= \frac{\psi_{i+1j}-\psi_{ij}}{\Delta x} \\ v_4 &= \frac{\psi_{ij}-\psi_{i-1j}}{\Delta x} \\ v_5 &= \frac{\psi_{i-1j}-\psi_{i-2j}}{\Delta x} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ensuite on définit les coefficients de régularité :

$$\begin{aligned} S1 &= \tfrac{13}{12}(v_1 - 2v_2 + v_3)^2 + \tfrac{1}{4}(v_1 - 4v_2 + 3v_3)^2 \\ S2 &= \tfrac{13}{12}(v_2 - 2v_3 + v_4)^2 + \tfrac{1}{4}(v_2 - v_4)^2 \\ S3 &= \tfrac{13}{12}(v_3 - 2v_4 + v_5)^2 + \tfrac{1}{4}(3v_3 - 4v_4 + v_5)^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

et les poids

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{10}\tfrac{1}{(\epsilon+S_1)^2} & w_1 &= \tfrac{a_1}{a_1+a_2+a_3} \\ a_2 &= \tfrac{6}{10}\tfrac{1}{(\epsilon+S_2)^2} & w_2 &= \tfrac{a_2}{a_1+a_2+a_3} \\ a_3 &= \tfrac{3}{10}\tfrac{1}{(\epsilon+S_3)^2} & w_3 &= \tfrac{a_3}{a_1+a_2+a_3} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Les auteurs recommandent de prendre $\epsilon = 10^{-6}$.

On calcule finalement :

$$\psi_x^{+,-} = w_1\left(\frac{v_1}{3} - \frac{7v_2}{6} + \frac{11v_3}{6}\right) + w_2\left(\frac{-v_2}{6} + \frac{5v_3}{6} + \frac{v_4}{3}\right) + w_3\left(\frac{v_3}{3} + \frac{5v_4}{6} - \frac{v_5}{6}\right) \tag{3.36}$$

3.2.3 Algorithmes supplémentaires

3.2.3.1 Extension des vitesses

La célérité de l'interface est donnée sur la surface or, pour résoudre l'équation (3.21) il est nécessaire d'utiliser un champ de vitesse défini sur tout le domaine (ou, au moins, sur plusieurs mailles autour de l'interface). Afin de prévenir de trop lourds calculs de réinitialisation, nous devons étendre la définition du champ de vitesse à tout le domaine. Pour cela, la vitesse sera "transportée" depuis l'interface vers le reste du domaine. Plus cette vitesse sera régulière, plus le calcul Level Set sera stable. C'est pourquoi nous allons transporter la vitesse d'interface suivant le champ de normales calculées grâce à

la relation (3.22). Pour se faire, il suffit de résoudre à l'aide d'un temps fictif t^* jusqu'à l'état stationnaire la relation :

$$\frac{\partial \overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}}{\partial t^*} + sgn(\psi)\overrightarrow{n}\nabla \overrightarrow{c}_\Gamma^{ext} = 0 \tag{3.37}$$

avec la condition limite :

$$\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext} = \overrightarrow{c}_\Gamma \text{ sur } \Gamma(t) \tag{3.38}$$

Pour des raisons de stabilité, il est préférable de résoudre cette équation en deux temps : d'abord dans l'une des phases, puis dans l'autre. On pose $\overrightarrow{w} = sgn(\psi)\overrightarrow{n}$, on décompose ce champ en deux morceaux à l'aide de la fonction de Heavyside H : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2$, avec $\overrightarrow{w}_1 = H(\psi).\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{w}_2 = H(-\psi).\overrightarrow{n}$

3.2.3.2 Redistanciation

L'une des principales difficultés pour la simulation d'écoulements diphasiques incompressibles avec la méthode Level Set réside dans l'écartement ou le resserrement des lignes de niveau lorsque l'on transporte la fonction ψ. En effet, le champ de vitesse étant généralement fortement cisaillé dans les applications que l'on veut simuler, la méthode devient alors trop imprécise pour être utilisable telle quelle.

La notion de distance algébrique à l'interface est alors essentielle, le principe est de transporter la ligne de niveau zéro, à la vitesse dictée par la physique du problème, puis de recalculer les autres lignes de niveau de manière à ce qu'elles respectent la propriété de distance algébrique à l'interface, c'est à dire :

$$|\nabla\psi| = 1 \tag{3.39}$$

Numériquement, on voit bien que la précision sur la fonction ψ sera optimale si cette propriété est respectée, car les gradients de ψ sont toujours de l'ordre de 1. De plus les lignes de niveau seront équidistantes ce qui facilitera le couplage avec la physique. Enfin la position de l'interface à l'intérieur d'une maille sera connue avec une meilleure précision, puisque les valeurs aux nœuds du maillage nous donneront la distance à laquelle l'interface se trouve.

[Sussman *et al.*, 1994] ont mis au point un algorithme de réinitialisation de la fonction ψ. Le principe de cet algorithme est de corriger de façon itérative la position des lignes de niveau par rapport à la ligne de niveau zéro, de manière à ce qu'elle respecte la propriété de distance algébrique. L'algorithme se présente sous la forme d'une équation aux dérivées partielles instationnaire que l'on doit résoudre à la fin de chaque pas de temps, jusqu'à ce que l'on aboutisse à un état stationnaire qui correspondra à une réinitialisation complète de la fonction ψ dans l'ensemble du domaine. Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial d}{\partial t^*} = sgn(\psi)(1 - \nabla d) \tag{3.40}$$

où t^* est un temps fictif correspondant au temps de réinitialisation de la fonction ψ. Cette équation est résolue avec la condition initiale suivante :

$$d(\overrightarrow{x}, t, t^* = 0) = \psi(\overrightarrow{x}, t) \tag{3.41}$$

Cette équation, qui ne traduit aucun principe physique, mais d'un point de vue formel, elle ne modifie pas la position de la ligne de niveau zéro, qui est la seule ligne

de niveau dont on connaît la vitesse de propagation. Les autres lignes peuvent alors être convectées de manière indépendante, en particulier en imposant de respecter cette propriété de distance algébrique à l'interface.

On peut mettre l'équation (3.40) sous une forme particulière pour faire apparaître une vitesse de propagation des courbes caractéristiques :

$$\frac{\partial d}{\partial t^*} + \overrightarrow{w}.\nabla d = sgn(\psi) \tag{3.42}$$

avec

$$\overrightarrow{w} = sgn(\psi)\frac{\nabla d}{|\nabla d|} \tag{3.43}$$

Sous sa nouvelle forme, on reconnaît aisément une équation hyperbolique non linéaire [Sussman *et al.*, 1994], qui ressemble beaucoup à l'équation (3.21). On peut donc utiliser cette nouvelle forme pour adapter les méthodes de résolution de l'équation (3.21) à l'équation (3.42). On remarque également que les courbes caractéristiques sont orientées dans la direction normale extérieure à l'interface. Ceci signifie que le processus de réinitialisation se propagera des points les plus proches de l'interface vers les points les plus éloignés. Or on sait que notre fonction ψ doit vérifier la propriété de fonction distance essentiellement près de l'interface pour que le calcul de la courbure soit plus précis. Ainsi en pratique, seulement 2 itérations de l'algorithme, à chaque pas de temps physique, sont suffisantes pour réinitialiser correctement la fonction ψ, à condition que la fonction ψ soit une distance algébrique.

3.2.3.3 Autre méthode pour la redistanciation : Fast Marching

3.2.3.3.1 Principe général

La résolution du problème de transport (3.40) peut poser des soucis de précision notamment lorsque que le gradient de la fonction Level Set change de signe (au centre d'un cercle, ou au milieu d'un canal, par exemples), mais surtout sa résolution demande beaucoup d'opérations. L'algorithme fait un grand nombre d'opérations inutiles car à chaque itération sur le temps fictif, tous les points sont recalculés. C'est partant de cette constatation que l'idée d'un changement de point de vue est née. Les ingrédients numériques de la méthode sont donnés par [Sethian, 1996], se basant sur les travaux de [Tsitsiklis, 1995] sur les trajectoires optimales. Il s'agit en fait de calculer un "plus court chemin" de notre point de maillage vers l'interface.

On dispose donc d'une interface Γ dans un domaine Ω et d'une fonction Level set ψ set comme définies précédemment. On suppose avoir un champ de référence ψ^R qui a au moins la propriété d'être négatif dans la partie fluide et positif dans la partie sol, mais qui n'est pas forcément une distance signée à l'interface. On veut que ψ soit solution de l'équation eikonale :

$$\begin{cases} |\nabla\psi| = 1 & \forall x \in \Omega \\ \psi = 0 & \text{Sur } \Gamma \end{cases} \tag{3.44}$$

L'idée de la méthode est toujours de transporter l'information de la distance à l'interface mais cette fois par un moyen numérique et non analytique. Pour des raisons de stabilité, tout comme dans la méthode précédente, nous transporterons cette information dans un seul sens. L'algorithme que nous avons utilisé transporte l'information dans les

valeurs négatives de ψ^R. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme à $-\psi$ pour redistancier dans tout le domaine.

On se place à présent dans un point de vue numérique, ψ est discrétisé sur un maillage et on cherche sa valeur en chaque nœud. Nous allons partitionner l'ensemble des nœuds en trois sous-ensembles :

- **Known**, noté K qui est l'ensemble des points où les valeurs de ψ sont connues
- **Narrow Band**, noté NB qui est l'ensemble des points où les valeurs de ψ sont inconnues et dont la distance à K est inférieure ou égale au pas d'espace
- **Far**, noté F l'ensemble des points qui ne sont ni dans K ni dans NB.

La méthode de Fast Marching repose sur le fait que NB constitue un front que l'on va faire avancer jusqu'à ce que tous les points soient dans K.

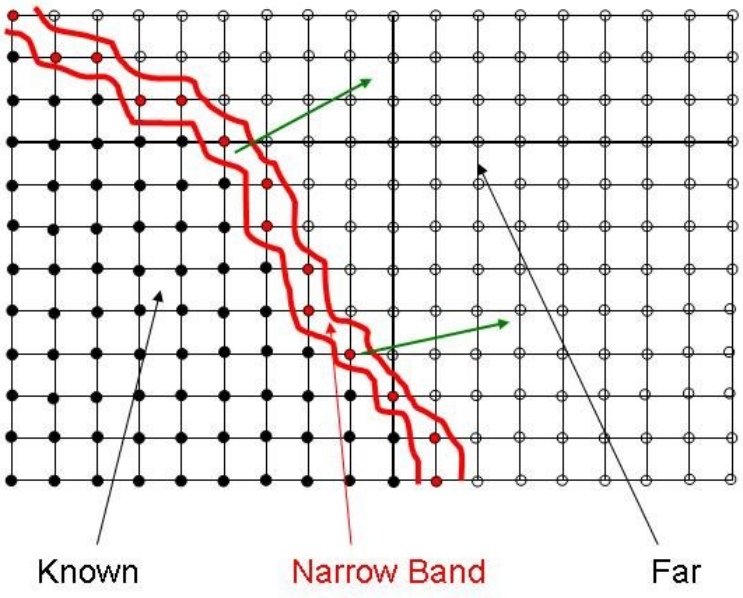


FIGURE 3.9 – *Partionnement de l'ensemble des nœuds pour la méthode Fast Marching. Les flèches vertes indiquent le sens de propagation de la Narrow Band*

L'idée générale consiste à calculer ψ pour les points de la Narrow Band puis à les inclure dans Known et à ajouter leurs voisins non calculés dans la Narrow Band. Ainsi, la zone de calcul de la Narrow Band se propage en coïncidence avec l'évolution du front distinguant les nœuds en lesquels ψ est solution de (3.44). L'algorithme se compose d'une phase d'initialisation et une phase itérative dont les étapes sont les suivantes :

Phase d'initialisation

- Initialisation de Known (Tous les points où $\psi^R > 0$. Initialisation de NB : sont dans la Narrow Band les points qui ne sont pas dans K mais qui ont un voisin dans K. Initialisation de Far : le reste des points.
- Calcul de ψ sur tous les points de NB.
- On affecte la valeur $+\infty$ en machine à $\psi(i,j)$ pour tous les points (i,j) de Far

Phase itérative : "Déplacement de la Narrow Band"

Début de boucle

- Détermination du point $P_m = (i_{min}, j_{min})$ de NB tel que

$$\psi(i_{min}, j_{min}) = \min_{(i,j)\in NB} \psi(i,j)$$

Et ajout dans K, suppression de NB
- Ajout éventuel dans NB des voisins de P_m étant dans F.
- Calcul de la valeur de ψ en ces points récemment ajoutés

Fin de boucle

3.2.3.3.2 Calcul de $\psi(i,j)$

Dans ce paragraphe, on suppose que le point $U = (i,j)$ est dans NB et on cherche à calculer $\psi(i,j)$. Pour simplifier les notations, nous utiliserons la configuration de la figure figure 3.10 :

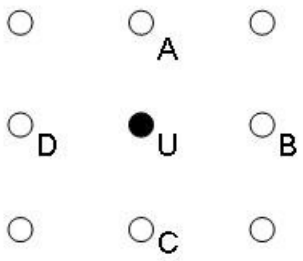


FIGURE 3.10 – *Configuration des points du maillage pour le calcul de ψ au point U*

On sait que $U \in NB$ donc U a au moins un voisin de connu. Plusieurs cas sont possibles :

- **Un seul voisin est dans K**
  On suppose sans perdre de généralité que c'est B qui est dans K. Dans ce cas, l'équation (3.44) se résume à :

$$\left(\frac{B-U}{dx}\right)^2 = 1$$

  La solution de cette relation est : $U = B \pm dx$.
  or on sait que B est dans K donc $U < B$, d'où :
  $U = B - dx$
- **Deux voisins opposés sont dans K**
  On suppose sans perdre la généralité que ce sont B et D qui sont dans K.
  On a alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{B-U}{dx}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{U-D}{dx}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

  On définit l'opérateur de minimum algébrique comme :

$$\text{minalg}(B,D) = \begin{cases} B & \text{Si } |B| <= |D| \\ D & \text{Si } |B| > |D| \end{cases}$$

  Cet opérateur permet d'utiliser les propriétés de la distance au sens d'un minimum tout en gardant le caractère algébrique de la distance signée. minalg(B,D) renvoie le point le plus proche de l'interface qu'il soit d'un coté ou de l'autre de l'interface.
  Ainsi on se ramène au cas précédent et :
  $U = \text{minalg}(B,D) - dx$

- **Deux voisins adjacents sont dans K**
  On suppose que A et B sont dans K, l'équation eikonale se traduit alors par :

$$\left(\frac{B-U}{dx}\right)^2 + \left(\frac{A-U}{dy}\right)^2 = 1 \tag{3.45}$$

  Du fait que ψ doit être une fonction distance, on sait que U doit vérifier :

$$\begin{cases} A - dy \leq U \leq A \\ B - dx \leq U \leq B \end{cases}$$

  que l'on peut traduire par :

$$\max(A - dy, B - dx) \leq U \leq \min(A, B) \tag{3.46}$$

  Afin que l'ensemble de l'espace solution soit non vide, A et B doivent vérifier la relation :

$$\max(A - dy, B - dx) \leq \min(A, B) \tag{3.47}$$

  La relation (3.45) définit une équation du second degré dont le discriminant réduit est :

$$\delta = dx^2dy^2(-A^2 + 2AB - B^2 + dx^2 + dy^2)$$

  d'où $\delta \geq 0 \Longleftrightarrow dx^2+dy^2 \geq (A-B)^2$. Comme A et B sont dans K, ils représentent une distance à l'interface, et ils sont placés en diagonale donc on peut majorer la distance AB par : $|A - B| \leq \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ grâce au théorème de Pythagore. Ce qui correspond au cas où le gradient de ψ serait dans la direction AB.
  Il vient donc que $0 < \delta < dx^2dy^2(dx^2 + dy^2)$
  L'équation (3.45) a donc deux solutions :

$$\begin{cases} u1 = \frac{Adx^2+Bdy^2+\sqrt{\delta}}{dx^2+dy^2} \\ u2 = \frac{Adx^2+Bdy^2-\sqrt{\delta}}{dx^2+dy^2} \end{cases}$$

  Prouvons l'unicité de la solution :
  Soit $M = \frac{Adx^2+Bdy^2}{dx^2+dy^2}$ et $N = \frac{\sqrt{\delta}}{dx^2+dy^2}$.
  Supposons que $u1$ et $u2$, solutions de (3.45), satisfassent tous les deux (3.46). Il existe alors un couple (A, B) tel que :

$$\begin{cases} u1 = M + N \leq \min(A, B) \\ u2 = M - N \leq \min(A, B) \end{cases}$$

  Or $\min(A, B) \leq M \leq \max(A, B)$ par construction de M donc :

$$\begin{cases} \min(A, B) + N \leq M + N \leq \min(A, B) \\ \min(A, B) - N \leq M - N \leq \min(A, B) \end{cases}$$

  Cette relation n'est possible que si $N = 0$ et donc que $u1 = u2$
  Il y a donc bien existence et unicité de la solution.
- **Trois voisins sont dans K**
  On suppose que A, B et D sont dans K. on a alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{B-U}{dx}\right)^2 + \left(\frac{A-U}{dy}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{U-D}{dx}\right)^2 + \left(\frac{A-U}{dy}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Ce cas est un mélange des deux cas précédents, on utilise le cas numéro 2 pour réduire le système à une seule équation :

$$\left(\frac{\text{minalg}(B,D)-U}{dx}\right)^2+\left(\frac{A-U}{dy}\right)^2=1$$

et le cas numéro 3 pour avoir les solutions :

$$\delta = dx^2dy^2(-A^2+2A\text{minalg}(B,D)-\text{minalg}(B,D)^2+dx^2+dy^2)$$

$$\begin{cases} u1=\frac{Adx^2+\text{minalg}(B,D)dy^2+\sqrt{\delta}}{dx^2+dy^2} \\ u2=\frac{Adx^2+\text{minalg}(B,D)dy^2-\sqrt{\delta}}{dx^2+dy^2} \end{cases}$$

- **Les quatre voisins sont dans K**
  De la même manière qu'au cas précédent, on résout :

$$\left(\frac{\text{minalg}(B,D)-U}{dx}\right)^2+\left(\frac{\text{minalg}(A,C)-U}{dy}\right)^2=1$$

3.3 Discussions et conclusions

Ce chapitre a traité des méthodes permettant le suivi d'une interface. Trois familles de suivi se distinguent : Les méthodes géométriques, les méthodes physiques et les méthodes analytiques.

Les méthodes géométriques sont basées sur une représentation directe de la position de l'interface ce qui apporte une grande précision sur le calcul de son mouvement, mais deviennent très limitées lorsque l'interface change de topologie. Ces méthodes sont également difficiles à mettre en œuvre dans le cas tridimensionnel.

Les méthodes physiques décrivent l'interface par le biais d'une variable de milieu. La position de l'interface n'est pas connue avec précision et dépend du maillage utilisé. Cependant, les changements de topologie peuvent être pris en compte. Dans les problèmes d'érosion, il est nécessaire d'avoir une bonne précision de la position et de la normale à l'interface et donc ces méthodes ne sont pas adaptées pour notre problème. Des améliorations de ces méthodes utilisent des algorithmes supplémentaires pour reconstituer la position et la normale à l'interface à l'aide du champ de variable. Ces améliorations nécessitent toutefois des calculs supplémentaires et gênèrent une erreur supplémentaire sur le calcul de la normale.

La méthode analytique, quant à elle, repère l'interface par une équation implicite ce qui permet d'avoir une bonne précision sur la position de l'interface. La méthode Level Set permet également d'obtenir simplement le champ de normales à l'interface. L'erreur commise lors du calcul de position et de normale ne dépend que du schéma numérique utilisé pour calculer les gradients. Combinée à des schémas numériques robustes, cette méthode est celle qui a été retenue pour le suivi d'interface dans les problèmes d'érosion. Malgré les schémas robustes, la méthode occasionne une diffusion numérique de l'interface. Des algorithmes supplémentaires sont à utiliser pour réinitialiser la fonction lorsque celle-ci s'écarte trop de la distance signée à l'interface. Cependant ces algorithmes ne sont nécessaires que proche de l'interface, or la fonction Level Set nous donne justement cette distance. Ceci nous done donc un critère permettant de limiter les calculs nécessaires.

Chapitre 4

Modélisation numérique

Mais en vertu de quel principe biologique fondamental, le plus grand nombre serait-il préservé de l'erreur ?
Henri Laborit (1914-1995)

De nombreuses méthodes sont disponibles dans la littérature pour résoudre des écoulements dans des géométries complexes. Il ne sera décrit dans ce chapitre que la méthode utilisée dans le code final. Elle sera présentée pour les équations de Navier-Stokes pénalisées par souci de généralité, mais elle sera dans les faits utilisée pour résoudre le système de Stokes stationnaire.

4.1 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes

La méthode retenue pour cette étude est tirée des travaux de [Vincent, 1999], [Vincent et Caltagirone, 2000], [Vigneaux, 2007] ainsi que de [Chantalat *et al.*, 2009]. Il s'agit d'une méthode aux Volumes Finis sur maillage MAC cartésien.

Dans la méthode Level Set, on choisit d'avoir $\psi > 0$ dans le sol. Ainsi, le coefficient de pénalisation peut s'écrire sur tout le domaine :

$$\frac{\mu_f}{K} = \frac{\mu_f H(\psi)}{K_s} \tag{4.1}$$

Avec H la fonction de Heavyside. D'où la formulation de pénalisation 2.53 devient :

$$\rho\left[\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + (\overrightarrow{u}.\nabla)\overrightarrow{u}\right] - \nabla.\left(2\mu\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u})\right) + \nabla p + \frac{\mu_f H(\psi)}{K_s}\overrightarrow{u} = 0 \tag{4.2}$$

$$\nabla.\overrightarrow{u} = 0 \tag{4.3}$$

où il apparaît l'expression de la viscosité μ (pouvant être donnée à l'aide d'un modèle de turbulence) et de la fonction Level Set ψ. La fonction Level Set sera supposée connue tout au long de l'étape de calcul de l'écoulement sur un pas de temps.

4.1.1 Discrétisation en temps

Les équations sont tout d'abord discrétisées en temps. On suppose l'état en un instant n connu et on cherche l'état à l'instant $n+1$, on note δt le pas de temps. Une formulation mixte implicite-explicite pour l'équation est utilisée, ainsi seul le terme non linéaire sera explicite :

$$\frac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{n+1} - \nabla.\left(2\mu^n\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^{n+1})\right) + \nabla p^{n+1} + \frac{\mu_f H(\psi^n)}{K_s}\overrightarrow{u}^{n+1} = \frac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{n} - \rho(\overrightarrow{u}^{n}.\nabla)\overrightarrow{u}^{n} \quad (4.4)$$

$$\nabla.\left(\overrightarrow{u}^{n+1}\right) = 0 \quad (4.5)$$

Dans 4.4 et 4.5, sont rassemblées dans le même membre les variables prises au même pas de temps. Cette écriture sera nommée explicite car le terme non linéaire est écrit au pas de temps précédent. Il est possible d'écrire cette équation de manière plus implicite comme :

$$\frac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{n+1} + \rho(\overrightarrow{u}^{n}.\nabla)\overrightarrow{u}^{n+1} - \nabla.\left(2\mu^n\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^{n+1})\right) + \nabla p^{n+1} + \frac{\mu_f H(\psi^n)}{K_s}\overrightarrow{u}^{n+1} = \frac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{n} \quad (4.6)$$

Cette formulation sera appelée formulation mixte par la suite ou encore de manière complètement implicite :

$$\frac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{n+1} + \rho(\overrightarrow{u}^{n+1}.\nabla)\overrightarrow{u}^{n+1} - \nabla.\left(2\mu^n\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^{n+1})\right) + \nabla p^{n+1} + \frac{\mu_f H(\psi^n)}{K_s}\overrightarrow{u}^{n+1} = \frac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{n} \quad (4.7)$$

4.1.2 L'algorithme de Lagrangien Augmenté

4.1.2.1 Présentation de l'algorithme

L'algorithme de Lagrangien Augmenté est un schéma itératif utilisé pour résoudre le couplage vitesse-pression [Fortin et Glowinski, 1982]. L'initialisation se fait par la valeur au pas de temps n précédent et à la convergence, on obtient la valeur des champs au pas $n+1$. Ainsi, lors d'une itération m du schéma, l'équation (4.5) est utilisée pour corriger la pression :

$$p^{m+1} = p^m - r_2\nabla.\overrightarrow{u}^{m+1} \quad (4.8)$$

Un coefficient r_2 est introduit et sera détaillé plus tard. On peut alors exprimer le gradient de pression :

$$\nabla p^{m+1} = \nabla p^m - r_2\nabla(\nabla.\overrightarrow{u}^{m+1}) \quad (4.9)$$

Le terme de pression est alors remplacé dans l'équation (4.4) dans cette équation on utilise un autre paramètre (r_1) pour introduire le gradient de la divergence de vitesse :

$$\begin{aligned}&\tfrac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{m+1} - \nabla.\left(2\mu^n\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^{m+1})\right) - r_1\nabla(\nabla.\overrightarrow{u}^{m+1}) + \tfrac{\mu_f H(\psi^n)}{K_s}\overrightarrow{u}^{m+1}\\ &= \tfrac{\rho}{\delta t}\overrightarrow{u}^{n} - \nabla p^m - \rho(\overrightarrow{u}^{n}.\nabla)\overrightarrow{u}^{n}\end{aligned} \quad (4.10)$$

Les deux paramètres de ce schéma (r_1 et r_2) sont à régler en fonction du problème.

4.1.2.2 Paramétrage du schéma

Une autre méthode pour choisir ces coefficients consiste à estimer localement le paramètre du Lagrangien $r = r1 = r2$. Alors $r(t, M)$ devient une fonction du temps t et de la position spatiale M [Vincent *et al.*, 2004]. Il doit être de deux ou trois ordres de grandeur plus grand que le plus grand terme de l'équation de conservation. En toute rigueur le passage de la relation 4.8 à la relation 4.9 suppose que le gradient spatial de r intervient dans les relations, mais il est négligé en première approche. Soient t_0 et u_0 un temps de référence et une vitesse de référence (typiquement on choisira $t_0 = dt_{cfl}$ et $u_0 = \|u\|_\infty$). A l'aide de ces deux grandeurs on peut définir une longueur de référence $L_0 = u_0 t_0$ et une pression de référence : $p_0 = \rho u_0^2$.

On réécrit donc l'équation (4.10) en version adimensionnée :

$$\begin{aligned}&\rho\frac{u_0}{t_0}\frac{\overrightarrow{u}^{*,m+1}-\overrightarrow{u}^{*,m}}{\delta t} - \frac{u_0}{L_0^2}\nabla.\left(2\mu^n\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^{*,m+1})\right) - r\frac{u_0}{L_0^2}\nabla(\nabla.\overrightarrow{u}^{*,m+1}) + \frac{\mu_f H(\psi^n)}{K_s}u_0\overrightarrow{u}^{*,m+1}\\ &= -\frac{p_0}{L_0}\nabla p^{*,m} - \rho\frac{u_0^2}{L_0}(\overrightarrow{u}^{*,n}.\nabla)\overrightarrow{u}^{*,n}\end{aligned} \tag{4.11}$$

On cherche ensuite à laisser le coefficient r seul devant le gradient de divergence de $\overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned}&\rho\frac{L_0^2}{t_0}\frac{\overrightarrow{u}^{*,m+1}-\overrightarrow{u}^{*,m}}{\delta t} - \nabla.\left(2\mu^n\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^{*,m+1})\right) - r\nabla(\nabla.\overrightarrow{u}^{*,m+1}) + \frac{\mu_f H(\psi^n)}{K_s}L_0^2\overrightarrow{u}^{*,m+1}\\ &= -\frac{p_0 L_0}{u_0}\nabla p^{*,m} - \rho L_0 u_0(\overrightarrow{u}^{*,n}.\nabla)\overrightarrow{u}^{*,n}\end{aligned} \tag{4.12}$$

Et donc il vient :

$$r(t, M) = K\max\left(\rho(t, M)u_0^2 t_0; \mu(t, M), \frac{\mu_f u_0^2 t_0^2 H(\psi)}{Ks}\right) \tag{4.13}$$

Avec $10 < K < 1000$.

De la même manière on peut définir K_1 et K_2 afin de donner des valeurs différentes à r_1 et r_2.

4.1.3 La formulation Volumes Finis sur maillage MAC

4.1.3.1 Le maillage décalé

La discrétisation de nos champs sur un maillage décalé est faite comme décrit dans la méthode Marker and Cell (MAC) [Harlow et Welch, 1965]. Il consiste à décaler certains champs, ici le champ de vitesse. Cela a pour effet une meilleure approximation des gradients.

Comme on peut le constater sur la figure 4.1, la pression est donnée au centre de la cellule et la vitesse est décalée sur les bords de la cellule de manière à n'avoir que la composante normale au bord de la cellule. Sur un maillage cartésien, ce découpage est simple car il ne s'agit que de l'une ou l'autre des composantes.

En deux dimensions, on notera (x_i, y_j) les coordonnées du centre de la cellule (i, j). La discrétisation des champs se fait alors comme :

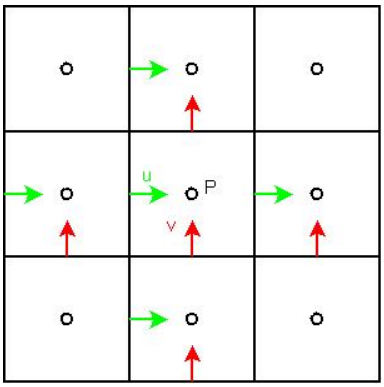


FIGURE 4.1 – *Schématisation du maillage décalé en dimension deux*

$$\begin{aligned} p_{ij} &= p(x_i, y_j) \\ u_{ij} &= u(x_{i-1/2}, y_j) \\ v_{ij} &= v(x_i, y_{j-1/2}) \\ \psi_{ij} &= \psi(x_i, y_j) \\ \mu_{ij} &= \mu(x_i, y_j) \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.1.3.2 Discrétisation des équations

Tout comme les variables, les équations vont être décalées de la même manière que leur variable correspondante. Ainsi la première composante de l'équation (4.10) sera décalée d'une demi-maille vers la gauche, la seconde composante d'une demi-maille vers le bas. L'équation (4.9) quant à elle ne sera pas décalée car elle se rapporte à la pression. On pose alors δx et δy la taille de la maille.

4.1.3.2.1 L'équation de conservation de la masse

Cette équation est la plus simple car il ne reste à exprimer la divergence de vitesse au centre de la maille. Du fait du décalage de maillage une formulation simple est obtenue :

$$p_{ij}^{m+1} = p_{ij}^{m} - r_2 \left(\frac{u_{i+1j}^{m+1} - u_{ij}^{m+1}}{\delta x} + \frac{v_{ij+1}^{m+1} - v_{ij}^{m+1}}{\delta y} \right) \tag{4.15}$$

4.1.3.2.2 Le terme non linéaire

Les différents termes de l'équation (4.10) seront traités séparément pour une question de lisibilité.

Pour la première composante, se rapportant à u, nous devons discrétiser la relation :

$$NSu^n = u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} \tag{4.16}$$

Or d'une part, il faut se placer sur le volume de contrôle de u et d'autre part utiliser un schéma amont pour le calcul des dérivées. La première chose à faire est de rapporter la vitesse v au bon endroit, ceci est effectué par une moyenne des quatre valeurs de v alentour. On pose :

$$\tilde{v}_{ij}^n = \frac{v_{ij}^n + v_{ij+1}^n + v_{i-1j}^n + v_{i-1j+1}^n}{4} \tag{4.17}$$

ensuite le schéma amont :

$$\begin{aligned} NSu_{ij}^n &= \max(u_{ij}^n, 0)\frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{\delta x} + \min(u_{ij}^n, 0)\frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{\delta x} \\ &+ \max(\tilde{v}_{ij}^n, 0)\frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{\delta y} + \min(\tilde{v}_{ij}^n, 0)\frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{\delta y} \end{aligned} \tag{4.18}$$

On procède de la même manière pour la seconde composante :

$$\tilde{u}_{ij}^n = \frac{v_{ij}^n + v_{i+1j}^n + v_{ij-1}^n + v_{i+1j-1}^n}{4} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} NSv_{ij}^n &= \max(\tilde{u}_{ij}^n, 0)\frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{\delta x} + \min(\tilde{u}_{ij}^n, 0)\frac{v_{i+1j}^n - v_{ij}^n}{\delta x} \\ &+ \max(v_{ij}^n, 0)\frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{\delta y} + \min(v_{ij}^n, 0)\frac{v_{ij+1}^n - v_{ij}^n}{\delta y} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Il est naturel d'utiliser un décentrage amont lors de l'écriture du terme non linéaire de manière explicite. En revanche lorsqu'il est écrit de manière implicite ou mixte un schéma centré semble plus adapté afin d'obtenir une matrice de rigidité antisymétrique :

$$NSu_{ij}^{m+1} = u_{ij}^{\alpha}\frac{u_{i+1j}^{m+1} - u_{i-1j}^{m+1}}{2\delta x} + \tilde{v}_{ij}^{\alpha}\frac{u_{ij+1}^{m+1} - u_{ij-1}^{m+1}}{2\delta y} \tag{4.21}$$

$$NSv_{ij}^{m+1} = \tilde{u}_{ij}^{\alpha}\frac{v_{i+1j}^{m+1} - v_{i-1j}^{m+1}}{2\delta x} + v_{ij}^{\alpha}\frac{v_{ij+1}^{m+1} - v_{ij-1}^{m+1}}{2\delta y} \tag{4.22}$$

avec $\alpha = n$ pour le schéma mixte et $\alpha = m+1$ pour le schéma implicite. Une autre méthode pour écrire le schéma implicite est d'utiliser le fait que l'algorithme de Lagrangien Augmenté est un algorithme itératif ainsi on peut utiliser $\alpha = m$. A la convergence du lagrangien Augmenté, on retrouve bien le schéma implicite. L'écriture explicite permet un traitement plus simple du terme non-linéaire mais oblige l'utilisation de pas de temps respectant la condition de *cfl*.

4.1.3.2.3 Calculs préliminaires

Avant de se lancer dans la discrétisation brutale du reste de l'équation, certains calculs préliminaires peuvent être intéressants à effectuer :

- La divergence : ce calcul peut sembler différent du cas de l'équation de conservation de la masse, mais en réalité nous allons utiliser la même formule. Dans l'équation (4.10) on va chercher à calculer le gradient de cette divergence. Or en calculant ce gradient par un schéma arrière sur les valeurs du centre de la cellule physique, on tombe exactement sur la valeur du gradient au centre de la maille décalée. On écrira par la suite $\tilde{div}u_{ij}$ la divergence du vecteur vitesse dans la maille (i, j) :

$$\tilde{div}u_{ij}^{m+1} = \frac{u_{i+1j}^{m+1} - u_{ij}^{m+1}}{\delta x} + \frac{v_{ij+1}^{m+1} - v_{ij}^{m+1}}{\delta y} \tag{4.23}$$

- Le gradient : ce calcul devient plus particulier, de la même manière, on veut que le résultat final soit localisé au centre de la maille décalée. Or on va calculer la divergence de ce gradient cela revient à calculer le gradient sur un diamant : Il

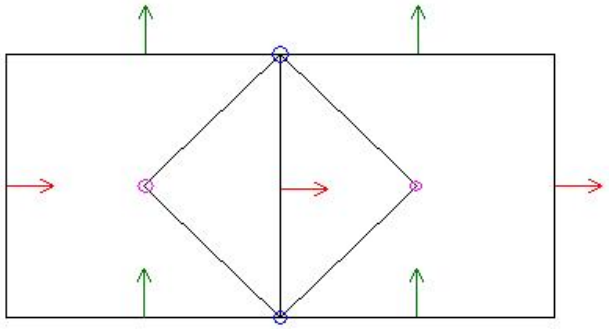


FIGURE 4.2 – *Localisation du calcul du gradient de vitesse en dimension deux*

s'agit donc de calculer les termes diagonaux du gradient symétrique de vitesse sur les points violets de la figure 4.3 et les termes croisés sur les points bleus.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^n_{ij})_{11} &= \frac{u^{m+1}_{i+1j}-u^{m+1}_{ij}}{\delta x} \\
\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^n_{ij})_{12} &= 1/2\left(\frac{u^{m+1}_{ij}-u^{m+1}_{ij-1}}{\delta y}+\frac{v^{m+1}_{ij}-v^{m+1}_{i-1j}}{\delta x}\right) \\
\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^n_{ij}))_{22} &= \frac{v^{m+1}_{ij+1}-v^{m+1}_{ij}}{\delta y}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Immédiatement on lui associe la viscosité correspondante, on notera : $2\mu\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{u}^n_{ij}) = \{(GR^n_{ij})_{pq}\}$. Or, pour les termes diagonaux, la viscosité est bien celle de la cellule (i,j) mais pour les autres termes, il s'agit de la moyenne des viscosités des 4 cellules auxquelles appartient le nœud :

$$\begin{aligned}
(GR^n_{ij})_{11} &= 2\mu_{ij}\frac{u^{m+1}_{i+1j}-u^{m+1}_{ij}}{\delta x} \\
(GR^n_{ij})_{12} &= \frac{\mu_{ij}+\mu_{ij-1}+\mu_{i-1j}+\mu_{i-1j-1}}{4}\left(\frac{u^{m+1}_{ij}-u^{m+1}_{ij-1}}{\delta y}+\frac{v^{m+1}_{ij}-v^{m+1}_{i-1j}}{\delta x}\right) \\
(GR^n_{ij})_{22} &= 2\mu_{ij}\frac{v^{m+1}_{ij+1}-v^{m+1}_{ij}}{\delta y}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

4.1.3.2.4 Discrétisation de l'équation du mouvement

Grâce aux calculs préliminaires précédents, on peut chercher la discrétisation de l'équation (4.10) sur un volume de contrôle $\delta x\delta y$:

- équation sur u :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}u^{m+1}_{ij} - \delta y\left((GR^n_{ij})_{11}-(GR^n_{i-1j})_{11}\right) - \delta x\left((GR^n_{ij+1})_{12}-(GR^n_{ij})_{12}\right) \\
&-r_1 * \delta y\left(\tilde{div}u_{ij} - \tilde{div}u^{m+1}_{i-1j}\right) + \delta x\delta y\tfrac{\mu_f}{k_s}(H(\psi^n_{ij}+\psi^n_{i-1j})u^{m+1}_{ij} = \\
&\tfrac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}u^m_{ij} - \delta y(p^m_{ij}-p^m_{i-1j}) - \rho NSu^n_{ij}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

- équation sur v :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}v^{m+1}_{ij} - \delta x\left((GR^n_{ij})_{22}-(GR^n_{ij-1})_{22}\right) - \delta x\left((GR^n_{i+1j})_{21}-(GR^n_{ij})_{21}\right) \\
&-r_1 * \delta y\left(\tilde{div}u_{ij} - \tilde{div}u^{m+1}_{ij-1}\right) + \delta x\delta y\tfrac{\mu_f}{k_s}(H(\psi^n_{ij}+\psi^n_{ij-1})u^{m+1}_{ij} = \\
&\tfrac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}v^m_{ij} - \delta x(p^m_{ij}-p^m_{ij-1}) - \rho NSv^n_{ij}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

dans le cas explicite ou bien :

- équation sur u :

$$\begin{array}{l}\frac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}u_{ij}^{m+1}+\rho NSu_{ij}^{n+1}-\delta y\left((GR_{ij}^{n})_{11}-(GR_{i-1j}^{n})_{11}\right)-\delta x\left((GR_{ij+1}^{n})_{12}-(GR_{ij}^{n})_{12}\right)\\ -r_1*\delta y\left(\tilde{div}u_{ij}-\tilde{div}u_{i-1j}^{m+1}\right)+\delta x\delta y\frac{\mu_f}{k_s}(H(\psi_{ij}^{n}+\psi_{i-1j}^{n})u_{ij}^{m+1}=\\ \frac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}u_{ij}^{m}-\delta y(p_{ij}^{m}-p_{i-1j}^{m})\end{array} \tag{4.28}$$

- équation sur v :

$$\begin{array}{l}\frac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}v_{ij}^{m+1}+\rho NSv_{ij}^{n+1}-\delta x\left((GR_{ij}^{n})_{22}-(GR_{ij-1}^{n})_{22}\right)-\delta x\left((GR_{i+1j}^{n})_{21}-(GR_{ij}^{n})_{21}\right)\\ -r_1*\delta y\left(\tilde{div}u_{ij}-\tilde{div}u_{ij-1}^{m+1}\right)+\delta x\delta y\frac{\mu_f}{k_s}(H(\psi_{ij}^{n}+\psi_{ij-1}^{n})u_{ij}^{m+1}=\\ \frac{\rho\delta x\delta y}{\delta t}v_{ij}^{m}-\delta x(p_{ij}^{m}-p_{ij-1}^{m})\end{array} \tag{4.29}$$

dans les cas implicite et mixte.

4.1.4 L'algorithme du BICGSTAB

Pour résoudre l'équation de conservation de la masse, nous utilisons un schéma itératif de bi-gradient conjugué stabilisé (BICGSTAB).

4.1.4.1 Le schéma

La méthode du bi gradient conjugué stabilisé (BICGSTAB) a été introduite pas Van der Vorst (1992) [Van der Vorst, 1992]. C'est une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires. Elle a fait l'objet d'améliorations pour admettre des systèmes non symétriques à spectre complexe [Sleijpen et R., 1993].

La méthode résout une équation du type $Ax = b$ de manière itérative, avec A une matrice carrée donnée non singulière et b un vecteur donné. A chaque itération on appelle x_k l'approximation de x. On définit également le résidu $r_k = b - Ax_k$.

Dans le solveur, la matrice A n'est pas utilisée et un vecteur $f_A(x_k) = Ax_k$ est directement calculé ce qui permet de formuler directement les équations sans passer par le calcul de la matrice A ; ce qui permet une grosse économie de mémoire, autorisant des systèmes avec plus d'inconnues. On définit enfin $\varepsilon_{bicgstab} > 0$ la précision de l'algorithme. Ainsi l'algorithme se présente sous la forme :

$k = -1$
$p_{-1} = 0$, $q_{-1} = 0$, $s_{-1} = 0$, $t_{-1} = 0$,
$r_0 = b - f_A(u_{-1})$
$\rho_{-1} = 1$, $\theta_{-1} = 1$, $\omega_{-1} = 1$, $\gamma_{-1} = 0$.
On itère jusqu'à ce que $\|r_k\| < \varepsilon_{bicgstab}$:
$k := k + 1$
$\rho_k = r_0.r_k$
$\gamma_k = \frac{\theta_{k-1}\rho_k}{\omega_{k-1}\rho_{k-1}}$
$p_k = r_k + \gamma_k(p_{k-1} - \omega_k q_{k-1})$
$q_k = f_A(p_k)$
$\theta_k = \frac{\rho_k}{r_0.q_k}$
$s_k = r_k - \theta_k q_k$
$t_k = f_A(s_k)$
$\omega_k = \frac{t_k.s_k}{t_k.t_k}$
$u_k = u_{k-1} + \theta_k p_k + \omega_k s_k$

$r_{k+1} = s_k - \omega_k t_k$

On définit la fonction f_A à l'aide des équations (4.28) et (4.29) en prenant tout ce qui concerne u^{n+1} et on place dans b tous les autres termes. On imbrique deux BICGSTAB ensemble pour résoudre les deux équations dans le même temps.

4.1.4.2 Préconditionnement

Afin d'améliorer la convergence du BICGSTAB on choisit de préconditionner le système. La fonction f_A représente le produit Ax, et nous allons conditionner la matrice par une matrice P. Ainsi le système final à résoudre sera :

$$PAX = Pb \tag{4.30}$$

Par souci de simplicité et de conservation de l'algorithme originel, nous choisissons un conditionnement simple, où P est une matrice diagonale. Et les termes diagonaux de P sont à peu de chose près $1/A_{ii}$. Nous n'incluons pas le terme de pénalisation dans le conditionnement car il est très grand.

4.1.5 Conditions aux limites

Cette section décrit l'implémentation des différentes conditions limites sur un maillage décalé cartésien. Du fait du maillage cartésien, les bords du domaine seront toujours normaux à l'un des axes (Ox, Oy, Oz) que ce soit en deux ou trois dimensions. Les conditions aux limites présentées seront, sauf cas particulier, appliquées au système grâce à une rangée de mailles fictives. C'est donc cette rangée de mailles qui va nous permettre d'appliquer la condition que l'on souhaite sur le bord. Par la suite le raisonnement sera appliqué sur le bord gauche (soit $i = 1$ et la rangée de maille fictive $i = 0$) mais reste analogue pour tous les autres bords.

Le maillage décalé implique que le champ de vitesse horizontal ($u_{i=1}$) est situé exactement sur ce bord alors que les autres champs (p, v et w) sont situés au centre de la rangée de cellules touchant le bord. C'est à dire qu'ils sont à une distance de $\frac{\delta x}{2}$ du bord (δx représente la taille de la maille).

4.1.5.1 La condition d'adhérence

La première condition considérée est la condition d'adhérence, aussi appelée condition de paroi ou condition de mur. Il s'agit simplement d'annuler tous les champs de vitesses ($\overrightarrow{u} = 0$) et d'annuler également la dérivée normale du champ de pression.
Pour le champ u il n'est donc pas nécessaire de considérer la rangée de maille fictive, il suffit d'imposer $u_{1j} = 0$.
Pour les champs v et w une approximation au premier ordre de la valeur sur le bord est effectuée :

$$v_{\frac{1}{2}j} = \frac{v_{1j} + v_{0j}}{2} = 0 \tag{4.31}$$

D'où la valeur de la rangée de maille fictive : $v_{0j} = -v_{1j}$. Il en est de même pour w.
La pression reste libre et il n'est pas nécessaire de calculer la pression sur les mailles fictives.

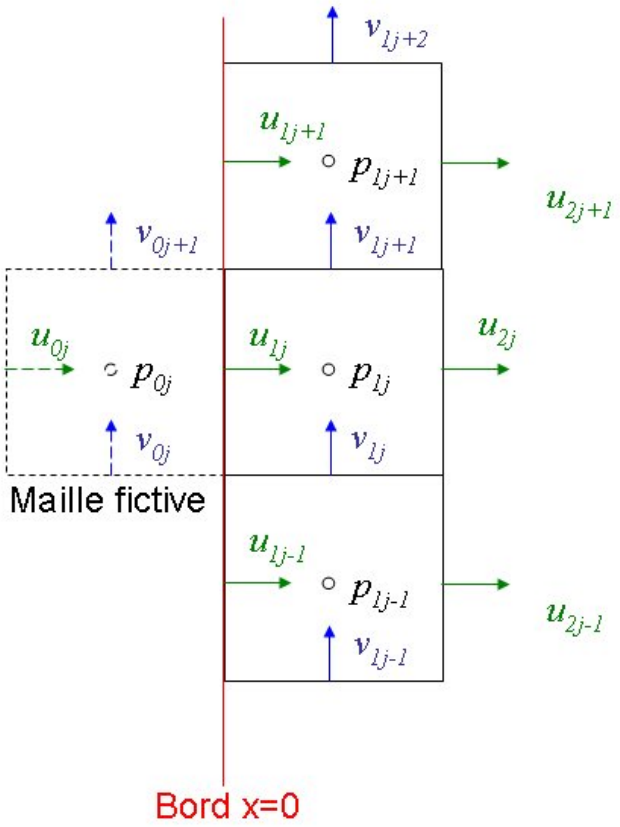


FIGURE 4.3 – *Localisation des variables sur le maillage décalé avec maille fictive en dehors du domaine (bord de gauche en 2D)*

4.1.5.2 La condition d'écoulement

Il s'agit d'une condition similaire à la précédente sauf qu'au lieu d'imposer un écoulement nul, on applique cette fois les champs de vitesse et de pression calculés précédemment. Soient donc p_b, u_b, v_b et w_b les champs de pression et vitesses à imposer sur le bord. Il faut toutefois que ces champs soient compatibles avec les conditions aux limites à imposer sur les autres bords adjacents au bord considéré.

De la même manière que précédemment, le champ u ne pose pas de problème particulier vu qu'il est placé sur le bord, et il suffit donc d'imposer $u_{1j} = u_b$.

On utilise encore une fois la même stratégie à v et w :

$$v_{\frac{1}{2}j} = \frac{v_{1j} + v_{2j}}{2} = v_b \tag{4.32}$$

D'où la valeur de la rangée de maille fictive : $v_{0j} = 2v_b - v_{1j}$. Il en est de même pour w.

La pression est, dans ce cas encore, libre. il n'est pas nécessaire de la calculer. On peut noter que si l'on cherche à imposer un écoulement nul, on retombe bien sur le premier cas.

4.1.5.3 La condition en pression

Il est souvent nécessaire dans les calculs d'écoulement d'imposer un gradient de pression entre l'amont et l'aval de l'écoulement. Une condition limite correspondante est donc envisagée, capable de résoudre ce problème.

Dans le cas général, il s'agit d'imposer une force $\overrightarrow{F}^{ext}$ quelconque sur le bord, ce qui s'exprime comme :

$$\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{F}^{ext} \tag{4.33}$$

On détaille cette relation sur le bord gauche :

$$\begin{cases} -p + \mu\frac{\partial u}{\partial x} = F_x^{ext} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = F_y^{ext} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = F_z^{ext} \end{cases} \tag{4.34}$$

On exprime les dérivées sur le maillage décalé de manière à ce qu'elles se trouvent exactement sur le bord :

$$\begin{cases} -\frac{p_{1jk}+p_{0jk}}{2} + \mu\frac{u_{2jk}-u_{0jk}}{2\delta x} = F_x^{ext} \\ \frac{v_{1jk}-v_{0jk}}{\delta x} + \frac{u_{1jk}-u_{1j-1k}}{\delta y} = F_y^{ext} \\ \frac{w_{1jk}-w_{0jk}}{\delta x} + \frac{u_{1jk}-u_{1jk-1}}{\delta z} = F_z^{ext} \end{cases} \tag{4.35}$$

On supposera que la pression sur les mailles fictives est basée sur une réactualisation en accord avec le Lagrangien Augmenté et l'utilisation de conditions aux limites particulières en $\overrightarrow{u}$ détaillée plus loin. Il nous suffit donc d'exprimer les valeurs en vitesse sur la maille fictive :

$$\begin{cases} u_{0jk} = u_{2jk} - \frac{2\delta x}{\mu}\left(F_x^{ext} + \frac{p_{1jk}+p_{0jk}}{2}\right) \\ v_{0jk} = -v_{1jk} + \delta x\left(F_y^{ext} - \frac{u_{1jk}-u_{1j-1k}}{\delta y}\right) \\ w_{0jk} = -w_{1jk} + \delta x\left(F_z^{ext} - \frac{u_{1jk}-u_{1jk-1}}{\delta z}\right) \end{cases} \tag{4.36}$$

La pression est adaptée grâce au Lagrangien Augmenté :

$$p_{0jk}^{new} = p_{0jk}^{old} - r_2\nabla.(\overrightarrow{u}^{new}) \tag{4.37}$$

On note M la maille en pression de p_{1jk} et M^* celle de p_{0jk}, il vient :

$$\nabla.(\overrightarrow{u})_M = \frac{u_{2jk}-u_{1jk}}{\delta x} + \frac{v_{1j+1k}-v_{1jk}}{\delta y} + \frac{w_{1jk+1}-w_{1jk}}{\delta z} \tag{4.38}$$

$$\nabla.(\overrightarrow{u})_{M^*} = \frac{u_{1jk}-u_{0jk}}{\delta x} + \frac{v_{0j+1k}-v_{0jk}}{\delta y} + \frac{w_{0jk+1}-w_{0jk}}{\delta z} \tag{4.39}$$

En utilisant (4.41) il vient :

$$\nabla.(\overrightarrow{u})_{M^*} = -\nabla.(\overrightarrow{u})_M + \frac{2}{\mu}F_x^{ext} + \frac{1}{\mu}(p_{1jk}^{old} + p_{0jk}^{old}) + \delta x\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{1jk} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{1jk}\right) \tag{4.40}$$

Le problème en pression suppose que $\overrightarrow{F}^{ext} = -p^0\overrightarrow{n}$, donc sur le bord gauche : $(F_x^{ext} =_P^0, F_y^{ext} = 0, F_z^{ext} = 0)$. Par simplification, on supposera également que l'écoulement est perpendiculaire au bord, ainsi sur le bord gauche on a :

$$\begin{cases} u_{0jk} = u_{2jk} - \frac{2\delta x}{\mu}\left(-p^0 + \frac{p_{1jk}+p_{0jk}}{2}\right) \\ v_{0jk} = -v_{1jk} \\ w_{0jk} = -w_{1jk} \end{cases} \tag{4.41}$$

et donc l'équation (4.40) devient :

$$\nabla.\left(\overrightarrow{u}\right)_{M^*} = -\nabla.\left(\overrightarrow{u}\right)_M - \frac{1}{\mu}(2p^0 + p_{1jk}^{old} + p_{0jk}^{old}) \tag{4.42}$$

et donc l'équation (4.37) devient :

$$p_{0jk}^{new} = p_{0jk}^{old} + r_2\nabla.\left(\overrightarrow{u}^{new}\right)_M + \frac{r_2}{\mu}\left(2p^0 - p_{1jk}^{old} - p_{0jk}^{old}\right) \tag{4.43}$$

Si on retranche à cette équation l'équation de lagrangien augmenté sur la maille réelle adjacente, on obtient formellement :

$$\left.\frac{\partial p^{k+1}}{\partial x}\right|_{bord} - \left.\frac{\partial p^k}{\partial x}\right|_{bord} = 2\frac{r_2}{\mu}\nabla.\left(\overrightarrow{u}^{k+1}\right)_M + r_2\left(2p^0 - p_{1jk}^k - p_{0jk}^k\right) \tag{4.44}$$

Ce qui montre que le gradient normal de pression n'est constant que lorsque les contraintes $\nabla.\left(\overrightarrow{u}^{k+1}\right)_M = 0$ et $\frac{p_{1jk}^k + p_{0jk}^k}{2} = p^0$ sont satisfaites. C'est à dire que le Lagrangien Augmenté a convergé et que la pression est bien définie à la constante p^0 près.

4.1.5.4 La condition de périodicité

La condition de périodicité est la plus simple à implémenter car il ne s'agit pas vraiment d'une condition de bord, mais plutôt d'une manière de recoller le bord considéré à un autre bord. Dans toutes les autres conditions, il n'est pas nécessaire de vérifier les autres conditions de bords. Dans la condition de périodicité il est nécessaire de vérifier deux choses : que le bord faisant face au bord considéré est lui aussi défini comme périodique et que la géométrie initiale (i.e. la fonction Level Set initiale ψ^0) soit périodique. Considérant les bords gauche et droite, Dans le schéma à grille décallée, u est défini avec une colonne supplémentaire en x. Ici, une série de calculs est évitée en remplaçant cette rangée de mailles placées sur le bord droit par celle placée sur le bord gauche ($u_{M1+1j} = u_{1j}$). De plus, en regardant le bord gauche, la rangé de mailles fictives ($i = 0$) devient :

$$\begin{cases} p_{i=0} = p_{i=M1} \\ u_{i=0} = u_{i=M1} \\ v_{i=0} = v_{i=M1} \\ w_{i=0} = w_{i=M1} \end{cases} \tag{4.45}$$

Dans le cas de la périodicité, étant donné que le calcul démarre par la solution nulle, il est nécessaire de forcer l'écoulement. Cette condition est donnée par la théorie de l'homogénéisation. Le raisonnement sera fait ici sur le problème de Stokes stationnaire, mais reste valable pour les équations de Navier-Stokes. Une approche similaire à Bang et Lukkassen [Bang et Lukkassen, 1999] est donc développée.

On considère donc un milieu périodique dans la direction x. Il faut y résoudre le problème de Stokes. Les conditions de bords sur les parois tangentielles importent peu, mais nous supposons qu'un gradient de pression est appliqué à tout le milieu.

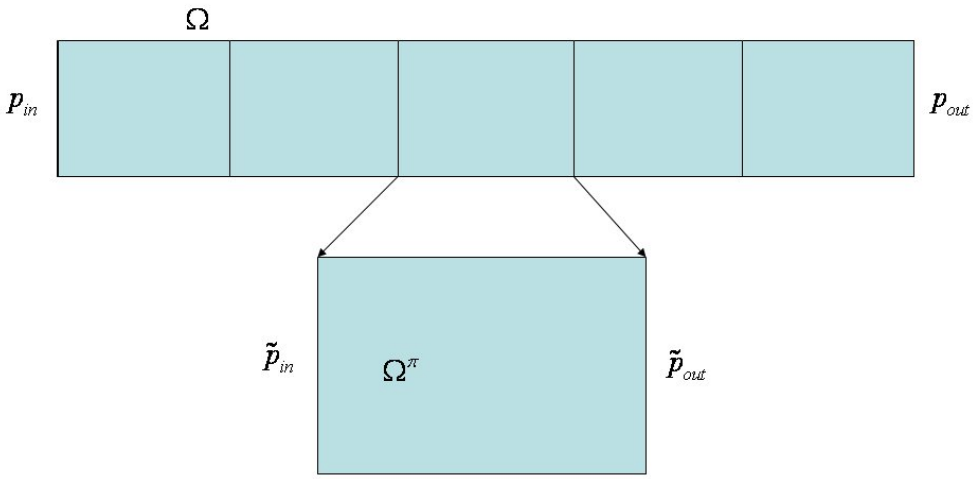


FIGURE 4.4 – *Schématisation du milieu global Ω et d'une période Ω^{π}*

Comme il est montré sur la figure 4.4, un gradient global est appliqué sur le domaine Ω. Le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \nabla p^{\Omega} - \overrightarrow{\nabla}.\left(\mu \nabla \overrightarrow{u}^{\Omega}\right) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \nabla.\left(\overrightarrow{u}^{\Omega}\right) = 0 & \text{sur } \Omega \\ p^{\Omega} = p_{in} & \text{sur } \partial\Omega_{in} \\ p^{\Omega} = p_{out} & \text{sur } \partial\Omega_{out} \end{cases} \tag{4.46}$$

Une solution $(\tilde{\overrightarrow{u}}, \tilde{p})$ sur Ω^{π} est cherchée telle que $\tilde{\overrightarrow{u}}$ est π-périodique et $\tilde{p}$ également :

$$\begin{cases} \nabla \tilde{p}^{\pi} - \overrightarrow{\nabla}.\left(\mu \nabla \tilde{\overrightarrow{u}}^{\pi}\right) = 0 & \text{sur } \Omega^{\pi} \\ \nabla.\left(\tilde{\overrightarrow{u}}^{\pi}\right) = 0 & \text{sur } \Omega^{\pi} \\ \tilde{\overrightarrow{u}}^{\pi} \text{ est } \pi\text{-périodique} & \text{sur } \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \\ \tilde{p}^{\pi} \text{ est } \pi\text{-périodique} & \text{sur } \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \end{cases} \tag{4.47}$$

L'hypothèse de conservation du débit permet d'affirmer que la vitesse ainsi calculée correspond à la vitesse réelle.

$$\tilde{\overrightarrow{u}}^{\pi} = \overrightarrow{u}^{\Omega}\big|_{\Omega^{\pi}} \tag{4.48}$$

En revanche, la condition de périodicité indique que $\tilde{p}^{\pi}|_{\partial\Omega_{in}} = \tilde{p}^{\pi}|_{\partial\Omega_{out}}$. Or, du fait du gradient global de pression la pression réelle ne satisfait pas cette condition. On pose donc p^{s} tel que :

$$p^{s} = p^{\Omega}\big|_{\Omega^{pi}} - \tilde{p} \tag{4.49}$$

Le problème (4.47) n'est donc pas en accord avec le problème global (4.46). Les conditions (4.48,4.49) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \nabla\tilde{p}^{\pi} - \overrightarrow{\nabla}.\left(\mu\nabla\overrightarrow{\tilde{u}}^{\pi}\right) = -\nabla p^{s} & \text{sur } \Omega^{\pi} \\ \nabla.\left(\overrightarrow{\tilde{u}}^{\pi}\right) = 0 & \text{sur } \Omega^{\pi} \\ \overrightarrow{\tilde{u}}^{\pi} \text{ est } \pi\text{-périodique} & \text{sur } \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \\ \tilde{p}^{\pi} \text{ est } \pi\text{-périodique} & \text{sur } \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \end{cases} \tag{4.50}$$

Il apparaît donc un terme source $-\nabla p^s$ qu'il faut déterminer. Or le milieu Ω est π-périodique et soumis à un gradient global de pression. Il est alors possible de définir $\tilde{p}_{in}$ et $\tilde{p}_{out}$ permettant ainsi de déterminer p^s comme le gradient linéaire de pression, global sur toute la période Ω^{π}.

Ce terme source permet ainsi de forcer un écoulement de la même manière que si l'on avait défini des conditions de bord en pression au lieu de condition de périodicité. Il est également utile pour calculer l'écoulement initial à partir de n'importe quelle initialisation des variables.

4.1.5.5 La condition de symétrie

La condition de symétrie donne également très rapidement les conditions sur les mailles fictives. Sur le bord gauche, il vient immédiatement que $u_{i=1} = 0$ et que $\frac{\partial .}{\partial x} = 0$ d'où :

$$\begin{cases} p_{i=0} = p_{i=1} \\ u_{i=0} = u_{i=1} \\ v_{i=0} = v_{i=1} \\ w_{i=0} = w_{i=1} \end{cases} \tag{4.51}$$

4.2 Organisation du calcul

Comme il a été évoqué précédemment, le phénomène d'érosion et l'écoulement ont des cinétiques très différentes, il est donc possible de découpler ces deux phénomènes. Le choix du type d'écoulement sera laissé à l'appréciation de l'opérateur qui pourra choisir entre :

- Un écoulement de Stokes stationnaire : sans terme de dérivée en temps, ni de terme non-linéaire, ni de turbulence.
- Un écoulement de Stokes instationnaire : on rajoute le terme de dérivée en temps.
- Un écoulement de Navier-Stokes sans modèle de turbulence.
- Un écoulement de Navier-Stokes avec modèle de turbulence.

Ces types d'écoulements sont ici classés en fonction du temps de calcul nécessaire pour les effectuer.

4.2.1 Organisation globale

Le calcul commence par la construction de la géométrie initiale c'est à dire de la fonction Level Set initiale. Ensuite on calcule l'écoulement initial. Ces deux étapes permettent d'initialiser notre boucle temporelle.

L'organisation globale du calcul est schématisée par la figure 4.5. Le calcul commence donc par traiter la vitesse d'érosion (c_Γ), car celle-ci va déterminer le pas de temps d'érosion, celui qui sera utilisé pour calculer effectivement l'érosion.

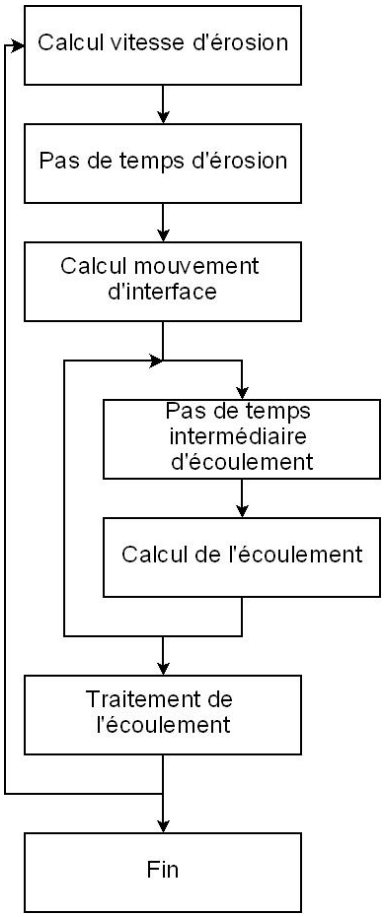


FIGURE 4.5 – *diagramme d'organisation du calcul*

Le calcul est alors découplé entre celui de l'érosion et celui de l'écoulement. La position de l'interface pendant le pas de temps intermédiaire d'écoulement est interpolée linéairement entre la position de l'interface au pas de temps précédent et celui calculé.

Une fois que le calcul de l'écoulement a atteint le pas d'érosion, l'écoulement est traité, à savoir, le calcul de la vitesse extrapolée pour le calcul du tenseur des contraintes (c.f. 4.2.2.1) ou le stockage des résultats.

Lors de calcul stationnaire (i.e. à écoulement stationnaire), seule l'érosion dépendra du temps et il devient possible de calculer l'écoulement à l'aide d'un seul tour de la boucle d'écoulement. En fonction de la géométrie, il peut devenir indispensable de faire plusieurs pas intermédiaires pour obtenir un résultat précis.

4.2.2 Le calcul de l'érosion

4.2.2.1 Le calcul de la contrainte

Étant donné que l'on s'attend à une discontinuité du gradient de la vitesse à travers l'interface, il peut survenir des problèmes lors du calcul de la contrainte de cisaillement à l'interface. Nous allons donc utiliser une méthode d'extension de la vitesse fluide dans le domaine sol sur quelques mailles par continuité du gradient.

On pose $\overrightarrow{\alpha} = \nabla\overrightarrow{u}.\nabla\psi$, où $\overrightarrow{u}$ est le champ de vitesse et ψ la fonction Level Set. On transporte alors cette grandeur sur quelques mailles dans le domaine sol proche de

l'interface à l'aide de la relation de transport :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\alpha}}{\partial \tau} + \overrightarrow{\zeta}.\nabla \overrightarrow{\alpha} = 0 \tag{4.52}$$

avec $\overrightarrow{\zeta} = H(\psi + \frac{\min dx,dy,dz}{2})\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est la normale à l'interface. La vitesse de transport est donc de norme unité dans le sol, ainsi que dans les mailles traversée par l'interface et nulle dans le domaine fluide. t^* est un temps fictif. Vu que nous utilisons les mêmes schémas numériques que pour l'évolution de l'interface nous avons seulement besoin d'étendre la vitesse sur 5 mailles, la vitesse de transport étant de norme unité, il faut résoudre ce problème jusqu'à un temps $t^*_{final} = 5\delta x$.
La valeur $\overrightarrow{\alpha}_{final} = \overrightarrow{\alpha}(t^* = t^*_{final})$ est alors utilisée pour définir notre vitesse étendue dans le sol comme :

$$\overrightarrow{u}_{ext} = \psi \overrightarrow{\alpha} \tag{4.53}$$

La nouvelle expression du tenseur des contraintes devient :

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{\mathbb{1}}} + 2\mu\overline{\overline{D}}(\tilde{u}) \tag{4.54}$$

où

$$\tilde{u} = \mathbb{1}_f \overrightarrow{u} + (1 - \mathbb{1}_f)\overrightarrow{u}_{ext} \tag{4.55}$$

4.2.2.2 Erreur numérique

Le calcul de l'érosion commence par le calcul de la contrainte de cisaillement à l'interface. Le tenseur des contraintes fluides ainsi que de la normale à l'interface sont à ce moment déjà calculés.
La contrainte de cisaillement est calculée sur quelques mailles autour de l'interface pour en reconstituer la valeur sur l'interface.
Il peut arriver que numériquement la formule (1.28) ne donne pas un nombre positif sous la racine. Pour éviter ce genre d'erreur purement numérique la contrainte de cisaillement peut être calculée d'une autre manière :

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{T}} = 2\mu\overline{\overline{D}} \\ &\sigma = \overrightarrow{n}.\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n} \\ &\overrightarrow{\tau} = \overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n} - \sigma.\overrightarrow{n} \\ &|\tau| = \sqrt{\overrightarrow{\tau}.\overrightarrow{\tau}} \end{aligned} \tag{4.56}$$

Avec cette méthode de calcul, le bon signe de la contrainte est assuré.
Il devient ensuite simple de trouver la célérité de l'interface en utilisant la loi d'érosion. Il peut être également intéressant de choisir des coefficients d'érosion (k_{er} et τ_c) dépendants de la position, permettant ainsi de simuler plusieurs matériaux positionnés les uns à coté des autres.

L'équation de transport (3.37) est alors résolue pour étendre la définition de cette célérité à tout le domaine et faciliter le calcul de l'évolution de l'interface. Une fois l'évolution de l'interface calculée, la redistanciation est jugée nécessaire en estimant la norme du gradient de ψ et on l'effectue si besoin.

4.2.3 Le calcul de l'écoulement

Le calcul de l'écoulement est plus simple, le schéma de Lagrangien Augmenté est initialisé par le résultat du pas précédent.

Au cours de chaque pas de Lagrangien, le second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est calculé, puis la viscosité turbulente. Ensuite le BICGSTAB est utilisé pour résoudre le système. Enfin, la pression est corrigée à l'aide de la divergence de la vitesse.

Le calcul s'arrête lorsque la divergence de la vitesse est inférieure à la précision voulue.

4.3 Discussions et conclusions

La méthode des volumes finis sur maillage décalé a été utilisée dans cette étude pour la résolution des équations d'écoulement. Elle permet une meilleure approximation des gradients, mais pose certains problèmes pour l'application des conditions limites. L'algorithme de Lagrangien Augmenté permet un couplage vitesse-pression simple mais les paramètres de réglage du schéma peuvent être difficiles à évaluer. Les cinétiques de l'érosion et de l'écoulement étant très différentes, la résolution des deux problèmes a été découplée.

Deux types de calcul sont menés, l'un utilise les équations de Navier-Stokes complètes, l'autre les équations de Stokes stationnaires. L'expérimentation numérique a montré (Chapitre 5) que la formulation explicite du terme non-linéaire dans les équations Navier-Stokes induit l'utilisation d'un pas de temps d'écoulement très petit. Ainsi, un très grand nombre de pas de temps sont nécessaires au calcul de l'écoulement entre deux évolutions de l'interface. Cette constatation est d'autant plus importante que la cinétique de l'érosion est lente. Le calcul prend alors un temps déraisonnable pour être résolu. L'utilisation des relations de Stokes stationnaires ne nécessite pas l'utilisation de pas intermédiaire entre deux pas d'érosion ce qui autorise des cas de test avec des évolutions et des géométries plus complexes.

La formulation implicite des équations de Navier-Stokes permettrait de s'affranchir de la condition de *cfl* et ainsi de pouvoir faire des pas d'écoulement plus grands pour limiter le nombre de calcul entre deux pas d'érosion. Cependant cette formulation demande des algorithmes supplémentaires de résolution qui restent à implémenter, que nous n'avons pas jugés prioritaires.

Chapitre 5

Validation de la modélisation

L'erreur est humaine mais un véritable désastre nécessite un ordinateur.
William Henry (dit Bill Gates) (1955-)

Après avoir assemblé toutes les méthodes, une étape de validation est nécessaire. Cette étape permet non seulement de vérifier le bon fonctionnement du code sur des cas disposant de solutions analytiques, mais aussi d'en tester les limites. Les écoulements considérés dans toutes les parties de résultats sont des écoulements de Stokes stationnaires. Bien que le modèle d'écoulement présenté jusqu'à présent concernait les équations de Navier-Stokes, dans la pratique, l'utilisation d'un solveur d'écoulement explicite en temps met en jeu beaucoup trop de pas de temps pour respecter la condition de stabilité. Les pas de temps d'érosion et d'écoulement étant très éloignés, le temps de calcul nécessaire à la résolution de l'écoulement pendant un seul pas d'érosion devient déraisonnable. L'objectif est ici de se focaliser sur le comportement de l'interface plutôt que sur celui de l'écoulement et un modèle d'écoulement plus simple est donc utilisé. Nous allons donc évaluer la capacité de la méthode à prendre en compte des singularités géométriques, puis tester un cas plus simple, mais soumis à des conditions variées permettant de dégager la sensibilité du modèle aux paramètres clés. Enfin, d'autres possibilités du modèle, telles que l'homogénéisation périodique ou même la possibilité d'utiliser une autre loi d'érosion seront présentées.

5.1 Paramétrage et tests préliminaires

5.1.1 Paramètres du Lagrangien Augmenté

Le schéma comporte deux paramètres que l'on va chercher à déterminer. Lorsque l'on choisit $r_1 = r_2$ on retombe sur la méthode de pseudo-compressibilité [Vincent *et al.*, 2004]. Pour avoir une vraie méthode de Lagrangien Augmenté, il faut choisir $r_1 > 2r_2$. Dans les deux cas, nous n'avons qu'une relation entre les deux coefficients et non une valeur à leur donner.

Sur un même problème, plusieurs valeurs de $r = r_1 = r_2$ sont testées en gardant tous les autres paramètres constants. La représentation de l'erreur (la divergence de $\overrightarrow{u}$) montre l'apparition d'un minimum (c.f. figure 5.1). De plus des valeurs trop grandes ou trop petites font diverger le calcul. Sur le graphe, il apparaît que la convergence est

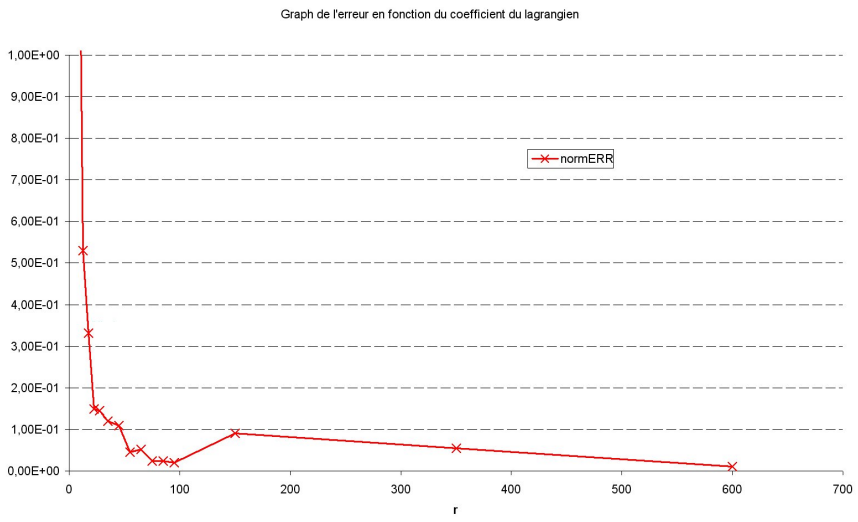


FIGURE 5.1 – *Norme de l'erreur en fonction du coefficient du Lagrangien*

perdue en dessous de $r = 1$ et au dessus de $r = 500$. Lorsque r est trop petit, le critère sur la divergence de $\overrightarrow{u}$ n'est jamais atteint et lorsque r est trop grand, le schéma n'arrive plus à résoudre l'équation (4.10).

5.1.2 Test du calcul de la vitesse d'érosion

Afin de vérifier l'approximation de la vitesse d'interface due à l'érosion, un cas de test académique est mis en place. Soit un domaine $[0, 2]^2$. On place le domaine de sol sur la moitié inférieure du domaine et l'on impose un gradient de pression de 10 entre la gauche et la droite. On suppose qu'il n'y a pas d'écoulement dans la partie sol. La partie fluide est soumise à un écoulement de Stokes et on suppose une condition d'adhérence à la paroi supérieure et au sol. Ce cas permet aussi de tester l'algorithme de calcul de la contrainte présenté au paragraphe 4.2.2.1.

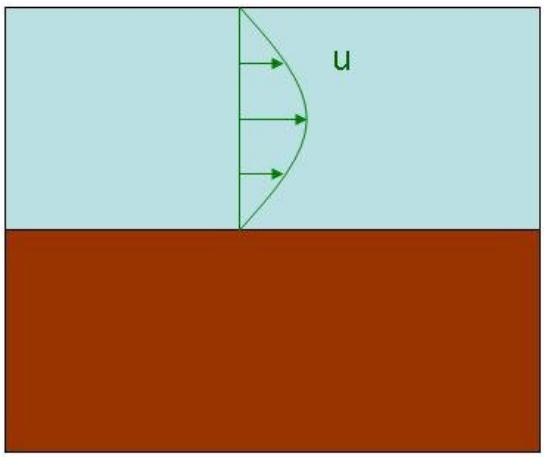


FIGURE 5.2 – *Schématisation du cas test*

	Sans $\tilde{u}$	Avec $\tilde{u}$
Maillage 50^2	11.02%	9.04%
Maillage 100^2	4%	4%
Maillage 200^2	2%	2%
Maillage 400^2	1%	1%

TABLE 5.1 – *Erreur relative sur le calcul de la célérité d'interface avec ou sans le calcul de la vitesse étendue*

Dans ces conditions, la vitesse verticale est nulle et la vitesse horizontale est donnée par la formule :

$$\begin{cases} 0 & \text{Si } y < \frac{H}{2} \\ \frac{\Delta P}{4L\mu}\left(-2y^2 + 3Hy - H^2\right) & \text{Si } y \geq \frac{H}{2} \end{cases} \tag{5.1}$$

d'où une contrainte de cisaillement à l'interface de :

$$\|\tau\| = \frac{H\Delta P}{4L} \tag{5.2}$$

Avec ce cas test, toutes les méthodes conduisant au champ de vitesse utilisé pour advecter la fonction Level Set à partir des données d'écoulement seront testées. A savoir : le calcul de la vitesse $\tilde{u}$, le calcul de la contrainte, le calcul de c_Γ et enfin l'extension de cette vitesse c_Γ^{ext}.

Sur le tableau 5.1, on montre que seulement sur les maillages grossiers le calcul d'une vitesse étendue est significatif sur l'erreur sur le calcul de la célérité de l'interface. Sur les cas réels, il arrive souvent de n'avoir que peu de mailles entre les différentes interfaces ce qui ramène à un cas de maillage grossier. De plus ce cas est un cas idéalisé, dans la pratique nombreux sont les cas où l'extension de la vitesse est nécessaire notamment lorsque la courbure de l'interface est non nulle. Sur ce cas, le maillage suit l'interface et des problèmes de stabilité peuvent survenir lorsque ce n'est pas le cas.

5.1.3 Tests de la méthode Level Set

On teste les algorithmes d'évolution et de redistanciation de la fonction Level set sur des cas académiques dont ont connaît la solution analytique.

5.1.3.1 Disque en rotation

On suppose ici un domaine $[0;1]^2$ dans lequel on vient placer un disque de sol (où $\psi > 0$) de centre $(0.5; 0.7)$ et de rayon 0.2. On le place dans un champ de vitesse définit par :

$$\begin{cases} u = 0.5 - y \\ v = x - 0.5 \end{cases} \tag{5.3}$$

afin d'avoir un champ de vitesse tournant qui n'est pas centré au centre du disque de sol.

Il vient immédiatement qu'au bout d'un temps $t = 2\pi$ le disque sera exactement revenu à sa position initiale sans aucune déformation, d'où le caractère fort pratique de

ce cas test, qui permet de calculer directement l'erreur commise par superposition des disques advectés à chacune des rotations complètes.

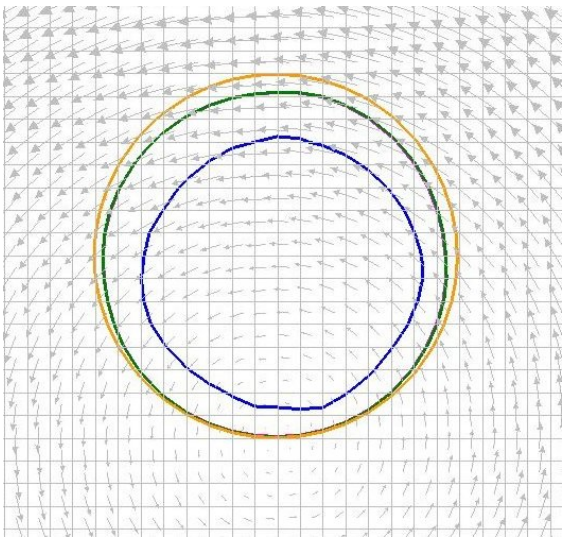


FIGURE 5.3 – *Visualisation du disque après une rotation pour un maillage de 40×40 : la solution théorique (orange), la solution sans redistanciation (vert), la solution avec redistanciation par équation de transport (rose), la solution avec redistanciation par fast marching (bleu)*

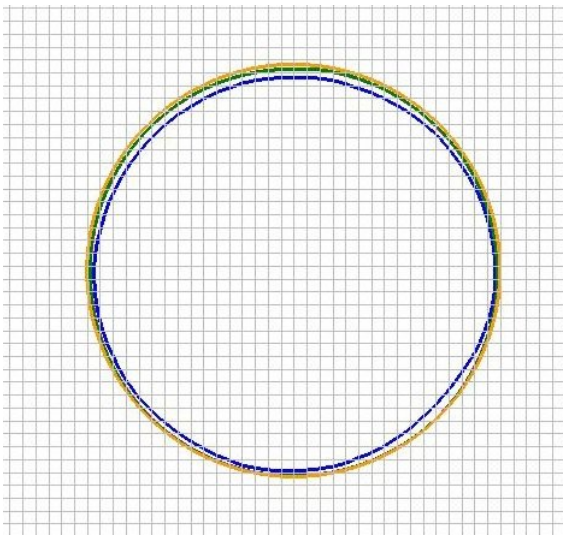


FIGURE 5.4 – *Visualisation du disque après une rotation pour un maillage de 80×80 : la solution théorique (orange), la solution sans redistanciation (vert), la solution avec redistanciation par équation de transport (rose), la solution avec redistanciation par fast marching (bleu)*

Les figures (5.3,5.4) montrent les résultats obtenus pour une rotation de cercle. Il est à noter que la solution avec redistanciation par équation de transport est presque confondue avec la solution sans redistanciation. Ceci est dû au fait que le champ de vitesse est très régulier et n'entraîne pas de déformation majeure du cercle. On constate

cependant une perte de masse, notamment sur le maillage grossier. La méthode Fast Marching, bien que très rapide comparée à la méthode par résolution d'une équation de transport, semble être moins précise. Il faut pour cela chercher du coté de la méthode de calcul de la distance, afin d'avoir des résultats plus précis. La méthode de Fast Marching semble accumuler l'erreur au cours du calcul.

5.1.3.2 Disque de Zalesak

Il s'agit d'un cas de test très répandu où l'on considère la rotation d'un disque de Zalesak [Zalesak, 1978], cercle épuré d'une fente suivant son diamètre. Ce cas test permet d'identifier les problèmes de dispersion et de diffusion des schémas numériques. En effet, la présence de singularités permet de mesurer ces effets puisqu'il existe de forts gradients locaux.

Cette fois un domaine $[0, 100]^2$ est considéré, un disque de rayon 15 et possédant une fente de largeur 5 et de hauteur 25 est centré au point (50,75). Un champ de vitesse stationnaire tournant est défini par les équations suivantes,

$$\begin{cases} u = 50 - y \\ v = x - 50 \end{cases} \tag{5.4}$$

Comme précédemment, le champ de vitesse est tel qu'au bout d'un temps $t = 2\pi s$ le disque sera exactement revenu à sa position initiale sans aucune déformation. Il sera alors aisé de mesurer l'écart avec la solution initiale.

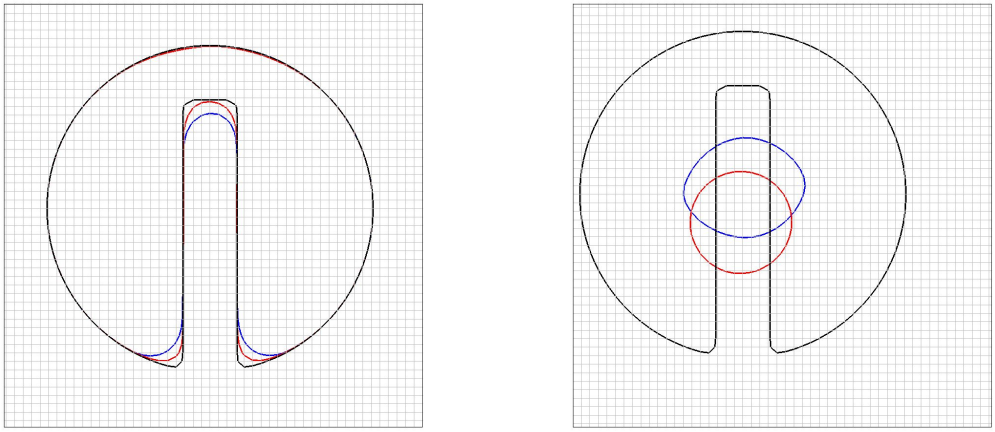


FIGURE 5.5 – *Visualisation du disque de Zalesak après une rotation pour un maillage de 128×128, la solution théorique (noir), la solution sans redistanciation (rouge), la solution avec redistanciation par équation de transport (bleu) ; à gauche : schémas RK4/WENO5, à droite : Schémas Explicit/Amont*

Le tableau 5.2 montre les erreurs en norme $L1$ de l'écart avec la solution initiale au bout d'un tour $\|E_\psi\|_{L1}$.

L'erreur est calculée de manière simple par la formule :

$$\|E_\psi\|_{L1} = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i,j} \left| \psi_{i,j}^{ini} - \psi_{i,j}^{calc} \right| \tag{5.5}$$

	Sans redistanciation	Avec redistanciation
RK4/WENO5	0.055	0.182
Explicit/Amont	1.889	8.888

TABLE 5.2 – *Disque de Zalesak : norme $\|E_\psi\|_{L1}$ de l'erreur au bout d'une rotation complète*

Elle est plus pertinente pour évaluer l'efficacité de la méthode que de calculer la perte de masse car, sur cet exemple, on gagne de la masse en haut de la fente et on en perd en bas, donc les variations de volume peuvent se compenser.

Aussi bien sur les graphiques, que sur les valeurs des normes, il est évident que les schémas Explicite/Amont sont insuffisants pour repérer le mouvement de rotation du disque de Zalesak. On note également une perte de qualité avec la redistanciation, ajoutant un peu de diffusion numérique supplémentaire. De plus amples résultats sont disponibles dans la thèse de Couderc [Couderc, 2007].

5.2 Le cas du carré

Ce cas test est destiné à analyser la réaction du modèle face à des singularités géométriques telles que les angles d'un carré. Un maillage suffisamment raffiné est nécessaire, car la méthode Level Set va arrondir cet angle sur une maille. Un maillage de 240×120 mailles a été utilisé pour cette simulation. Les paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 5.3.

L	H	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	K_s	k_{er}
$2\ m$	$1\ m$	$1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$

τ_c	$r_1 = r_2$
$10^{-20}\ Pa$	10

TABLE 5.3 – Paramètres de calcul

Comme prévu, la méthode Level Set a arrondi l'angle sur une maille dès la première itération (c.f. figure 5.6) et ensuite, c'est l'érosion qui se charge de lisser les angles. Il est à noter que des instabilités numériques apparaissent à proximité des angles. Ces instabilités sont dues au calcul de la vitesse d'évolution de l'interface. Sur la figure 5.7 la norme de $\overrightarrow{c}_\Gamma^{ext}$ est représentée sur la moitié supérieure du carré à l'instant initial. Il apparaît, dès cette étape, que l'érosion est maximale juste après l'angle amont et juste avant l'angle aval, tandis qu'elle est uniforme sur le reste du bord horizontal. Les faces verticales, quant à elles, sont bel et bien fixes (vitesse d'évolution nulle) sauf près des angles. Il est visible également que des instabilités commencent à apparaître près de l'angle. Les graphes d'évolution, montrent qu'elles auront tendance à s'amplifier. Ce phénomène semble numérique et dépendant du maillage, en effet, le calcul de la contrainte se faisant sur la maille la plus proche de l'interface, un raffinement local serait nécessaire pour atténuer cet effet sans trop pénaliser le temps de calcul.

Les figures suivantes représentent l'écoulement au cours du temps (figures 5.8 à 5.14). L'écoulement s'adapte cependant bien à la géométrie variable de ce cas.

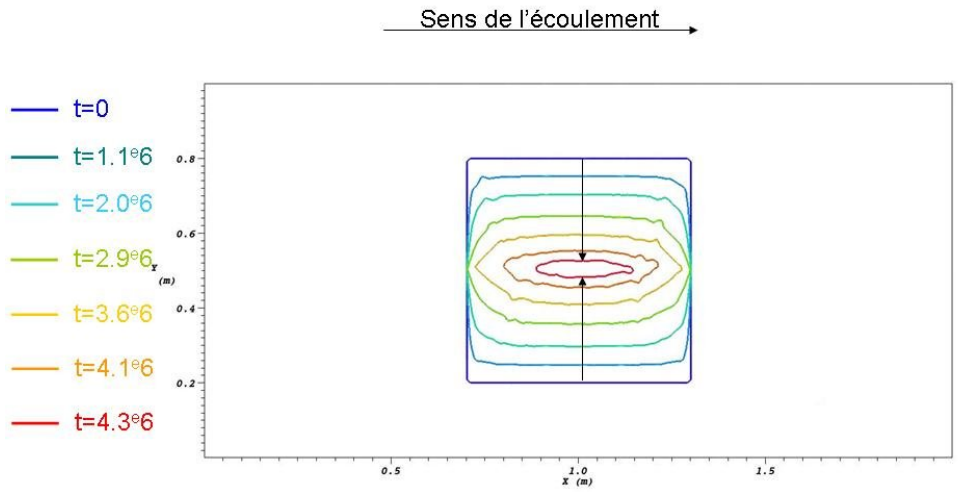


FIGURE 5.6 – *Évolution du carré au cours du temps sous l'effet de l'érosion*

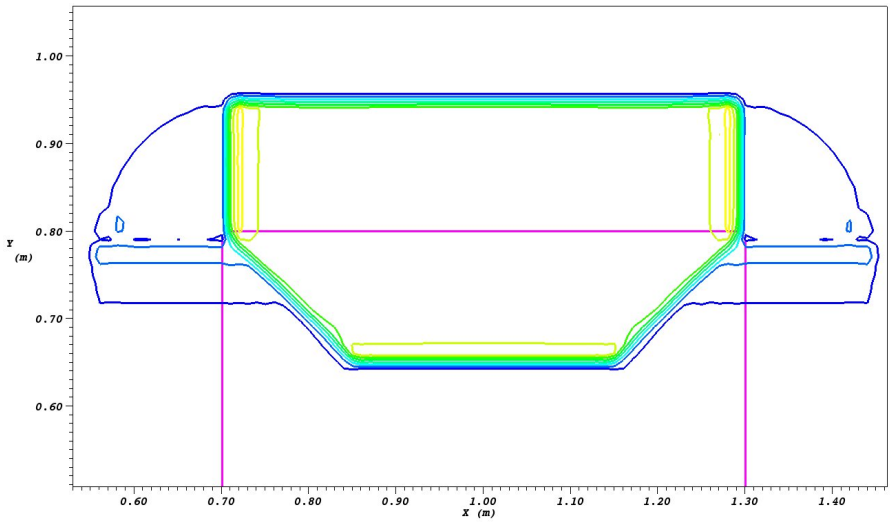


FIGURE 5.7 – *Contours de la norme de* $\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext}$ *pour le pas initial, l'interface est représentée par la ligne violette*

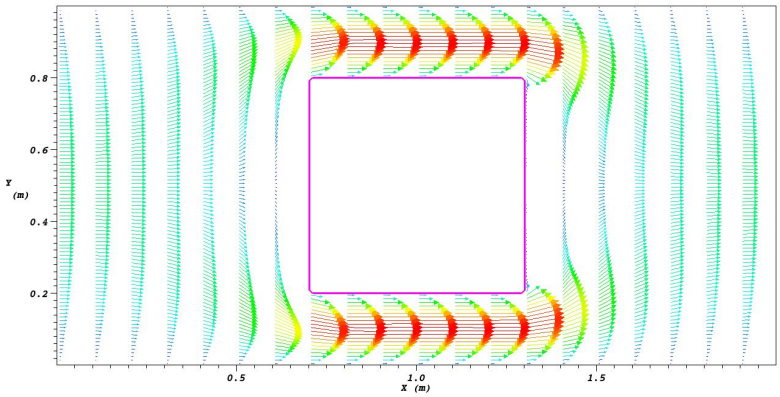


FIGURE 5.8 – *Solution initiale*

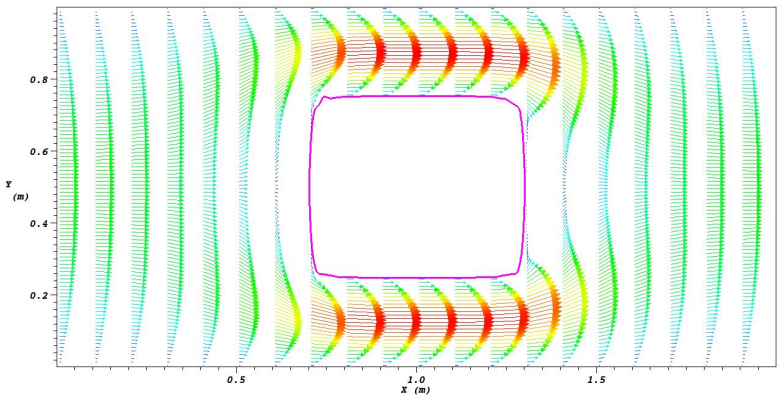


FIGURE 5.9 – *Solution à* $t = 1.110^6 s$

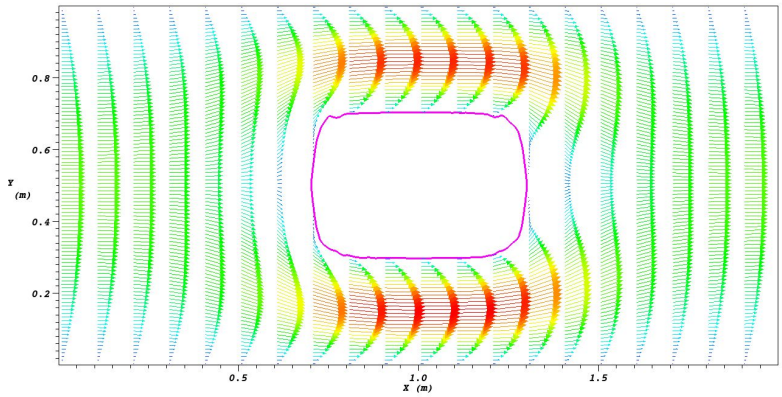


FIGURE 5.10 – *Solution à* $t = 2.010^6 s$

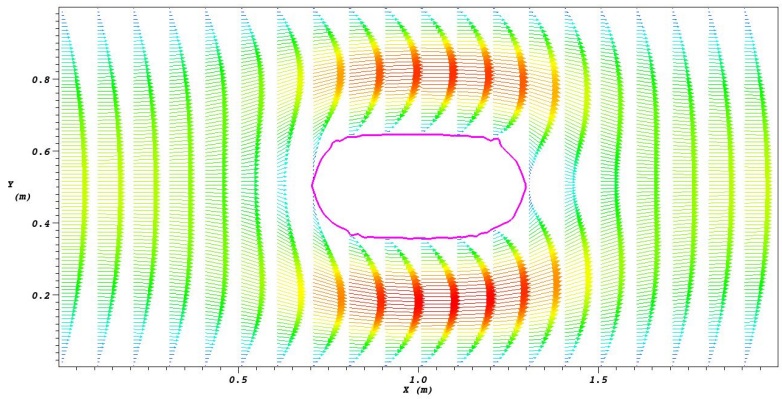


FIGURE 5.11 – *Solution à* $t = 2.910^6 s$

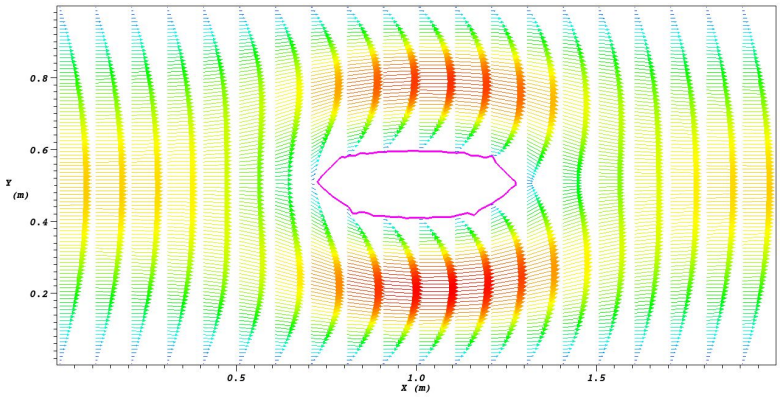


FIGURE 5.12 – *Solution à* $t = 3.610^6 s$

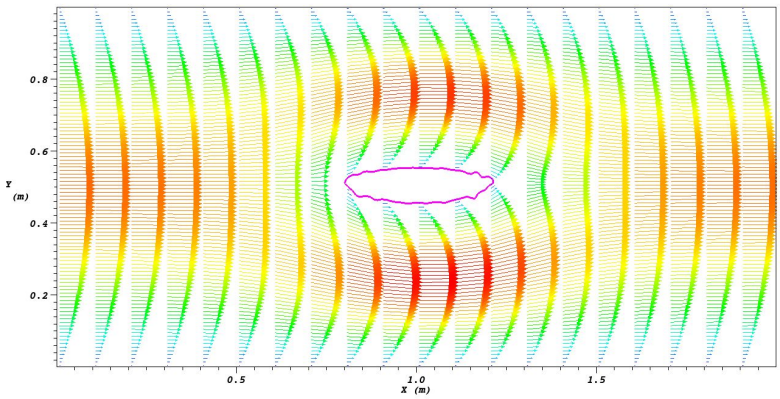


FIGURE 5.13 – *Solution à* $t = 4.110^6 s$

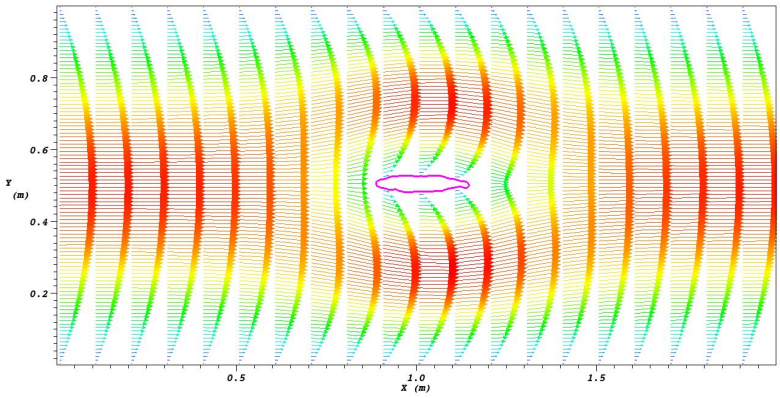


FIGURE 5.14 – *Solution à* $t = 4.310^6 s$

5.3 Le cas de la bille

Il s'agit d'un cas purement académique et très simple puisqu'il ne comporte aucune singularité géométrique. Il sera testé dans diverses conditions et permettra également d'étudier la sensibilité à certains paramètres.

5.3.1 Description du cas

Deux cas de bille ont été testés, l'un en deux dimensions l'autre en trois dimensions.

Une bille de sol est placée au milieu d'un canal rectangulaire. En deux dimensions, il s'agira d'un disque, et en trois dimensions d'une boule.

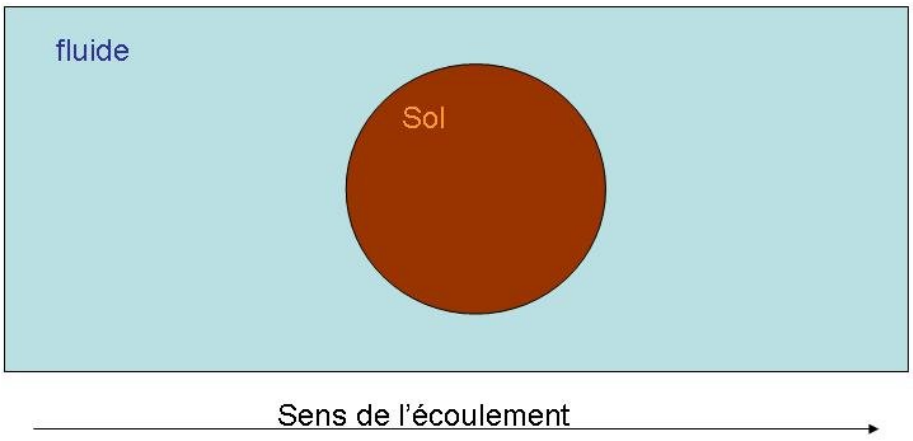


FIGURE 5.15 – *Schéma du cas de la bille en deux dimensions*

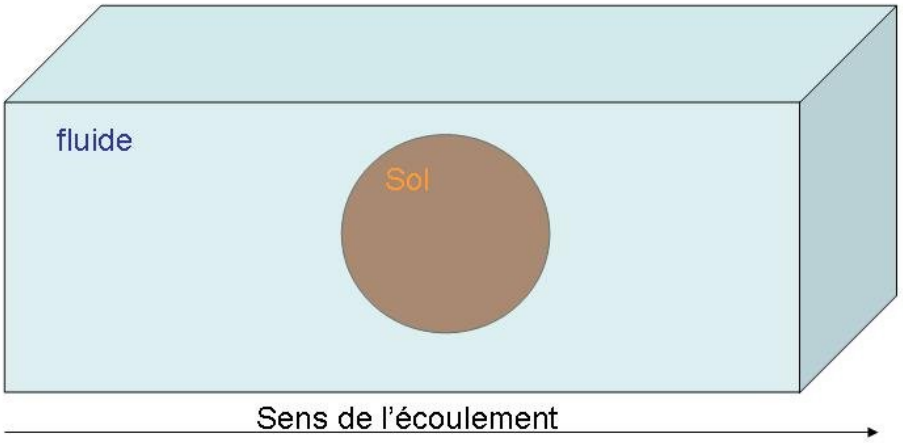


FIGURE 5.16 – *Schéma du cas de la bille en trois dimensions*

Dans les deux cas, une condition aux limites de gradient pression sera appliquée entre les bords $x = 0$ et $x = L$ et une condition de paroi sera appliquée sur tous les autres bords. La bille (ou la boule) est placée au centre du domaine. Le fluide utilisé sera l'eau ($\rho_f = 1000$ et $\mu_f = 0.001$). Le canal sera choisi pour être deux fois plus long que large, dans le cas trois dimensions, on choisira une profondeur égale à la largeur. L'écoulement se fera de la gauche vers la droite suivant l'axe des x.

5.3.2 Premiers résultats

Pour ces premiers résultats, le modèle de Stokes stationnaire a été utilisé. Les paramètres de calcul sont résumés dans le tableau 5.4.

L	H	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	K_s	k_{er}
$2\ m$	$1\ m$	$1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$

τ_c	$r_1 = r_2$
$10^{-20}\ Pa$	10

TABLE 5.4 – Paramètres de calcul (unités SI)

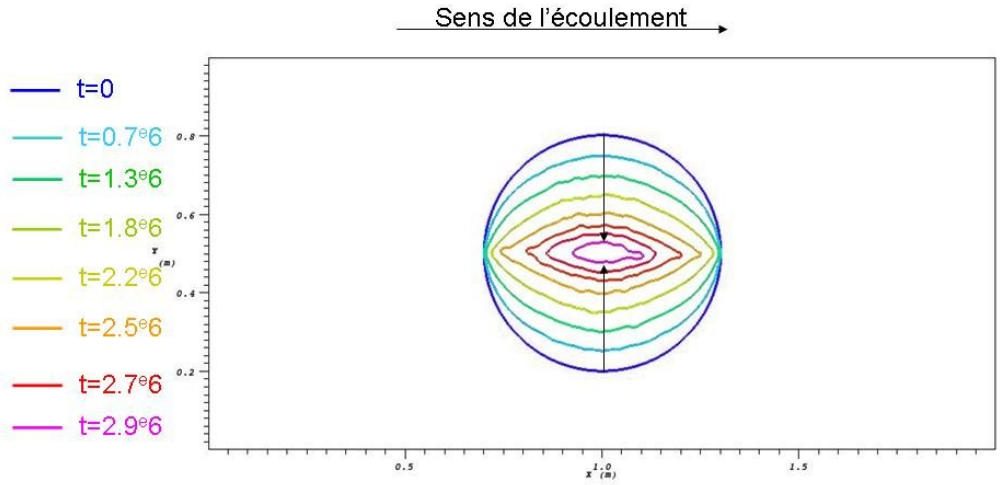


FIGURE 5.17 – *Évolution de la bille au cours du temps sous l'effet de l'érosion*

La figure 5.17 résume l'évolution du disque 2D au cours du temps sous l'effet de l'érosion. La première remarque porte sur le temps nécessaire à la disparition du disque, de l'ordre $3,5.10^6 s$; il s'agit d'un temps très long par rapport au temps nécessaire à une particule de fluide pour traverser le canal. Cela est dû au coefficient d'érosion choisi ($k_{er} = 10^{-3}$ dans ce cas). Il est à noter également l'apparition de rides au niveau de l'interface, là où l'érosion est la plus importante. Ce phénomène semble purement numérique et diminue lorsque diminue la précision de redistanciation et le coefficient de *cfl*.

La figure 5.18 montre les contours de la norme de la célérité de l'interface étendue sur une bande autour de l'interface sur la moitié supérieure du disque. Il n'est pas nécessaire de regarder la moitié inférieure car elle est parfaitement symétrique. Une symétrie entre

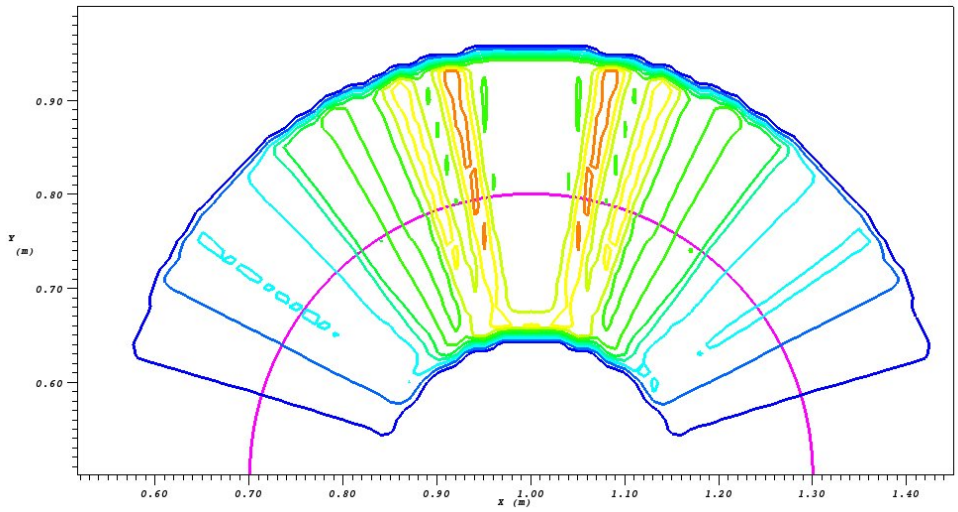


FIGURE 5.18 – *Contours de la norme de* $\overrightarrow{c}_{\Gamma}^{ext}$ *pour le pas initial, l'interface est représentée par la ligne violette*

l'amont et l'aval est également visible sur la figure, ce qui est normal avec le modèle de Stokes. Il apparaît très nettement que la vitesse d'érosion est nulle sur les "faces" amont et aval du disque, signe que la contrainte tangentielle à ces endroits est en dessous du seuil d'érosion. La norme de la célérité de l'interface ne semble pas régulière le long de l'interface, comme on aurait pu s'y attendre. Cet effet diminue avec le raffinement du maillage et est donc dû au calcul numérique de la contrainte de cisaillement à cet endroit ; en effet, l'interface ne suit pas le maillage et donc une interpolation doit être faite. Le maximum n'est pas non plus placé sur le sommet du cercle, cela a pour effet d'aplanir ce sommet.

5.3.3 Sensibilité des paramètres

Plusieurs questions au niveau de la sensibilité aux paramètres se posent : par exemple le coefficient d'érosion ou la taille du maillage. Notamment au sujet du coefficient d'érosion, quelle valeur lui donner pour justifier l'utilisation d'un modèle d'écoulement stationnaire. Des tests ont été effectués sur la cas de la bille 2D, similaire au cas précédent en faisant varier ces paramètres. L'outil de comparaison utilisé sera l'évolution de l'aire du domaine sol au cours du temps.

5.3.3.1 Le coefficient d'érosion

Le coefficient d'érosion influe directement sur la vitesse de l'interface fluide-sol. Plusieurs simulations ont été effectuées avec des modèles d'écoulement stationnaires et non stationnaires. Le fait de calculer un écoulement stationnaire permet un temps de calcul global très réduit, mais le modèle rigoureux est évidement non-stationnaire. Les temps sont adimensionnés pour pouvoir comparer facilement les évolutions. le temps de référence est donné par la formule de Bonelli [Bonelli et Brivois, 2007] :

$$t_{er} = \frac{H\rho_g}{k_{er}P_{ref}} \tag{5.6}$$

où H est la hauteur du canal et P_{ref} le gradient de pression appliqué au canal. t_{er} est le temps caractéristique d'érosion.

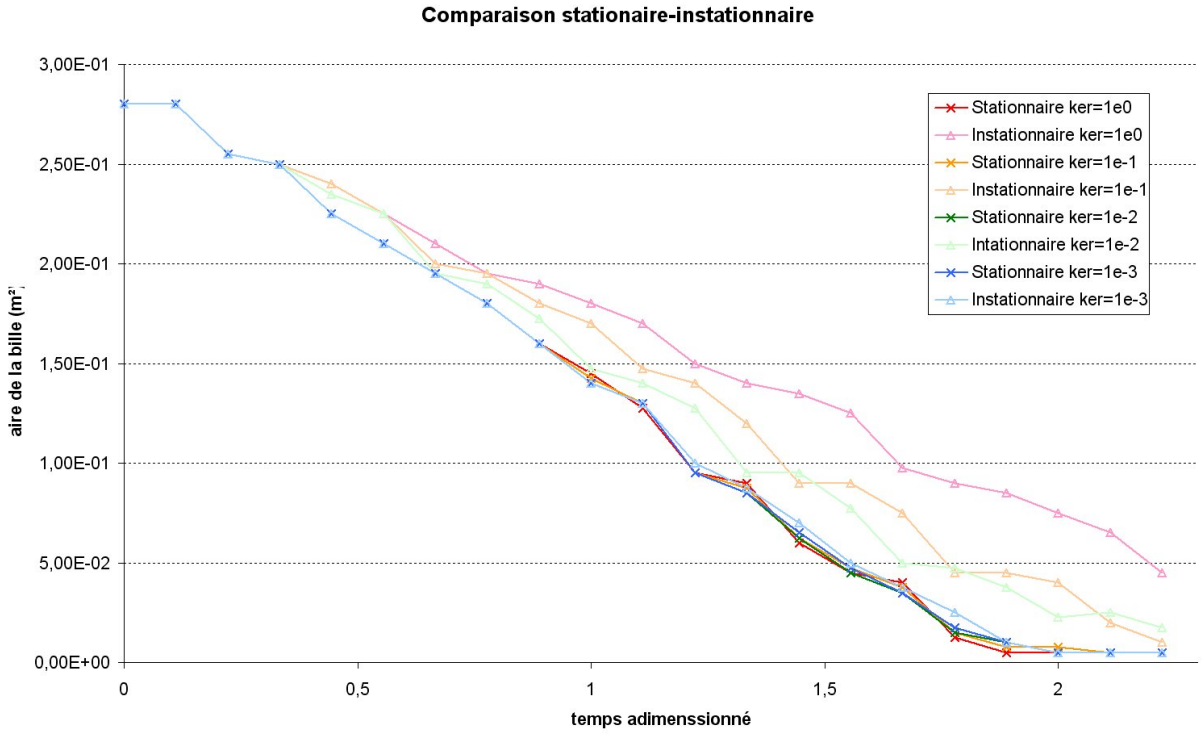


FIGURE 5.19 – *Comparaison de l'évolution de l'aire de la bille*

La figure 5.19 montre les évolutions de l'aire du domaine sol pour différentes valeurs de k_{er} et compare également cette évolution dans le cas d'un écoulement stationnaire et non-stationnaire. Aucun autre paramètre n'est changé entre ces différents calculs.

Le calcul avec écoulement stationnaire semble donner une évolution similaire en temps adimensionné pour toutes les valeurs de k_{er}. En revanche, dans les cas d'écoulements instationnaires, la corrélation avec les calculs stationnaires n'est atteinte que lorsque k_{er} est suffisamment petit ($k_{er} \leq 10^{-3}$).

L'hypothèse de calcul stationnaire n'est donc valable que si $k_{er} < 10^{-3}$. Par la suite, l'ensemble des calculs vérifieront cette hypothèse.

Enfin, le temps caractéristique d'érosion comme défini par la formule 5.6 semble être un excellent moyen pour l'adimensionnement des temps d'évolution. Cela confirme également l'accord du modèle avec les précédentes modélisations.

5.3.3.2 La taille du maillage

Le maillage influe directement sur la qualité de l'écoulement que l'on va calculer, sur la précision du calcul de la contrainte de cisaillement, sur la précision de la fonction Level Set et donc de la position de l'interface. Plusieurs tailles de maille ont été testées, toutes ont été prises de manière à avoir des mailles carrées bien que ce ne soit pas une condition nécessaire.

Résumé des codes de maillage :

- m010 :20x10 mailles
- m020 :40x20 mailles

– m040 :80x40 mailles
– m080 :160x80 mailles
– m160 :320x160 mailles

Là encore, l'outil de comparaison est l'aire du domaine sol. La même géométrie et la même physique sont appliquées aux cas de calculs.

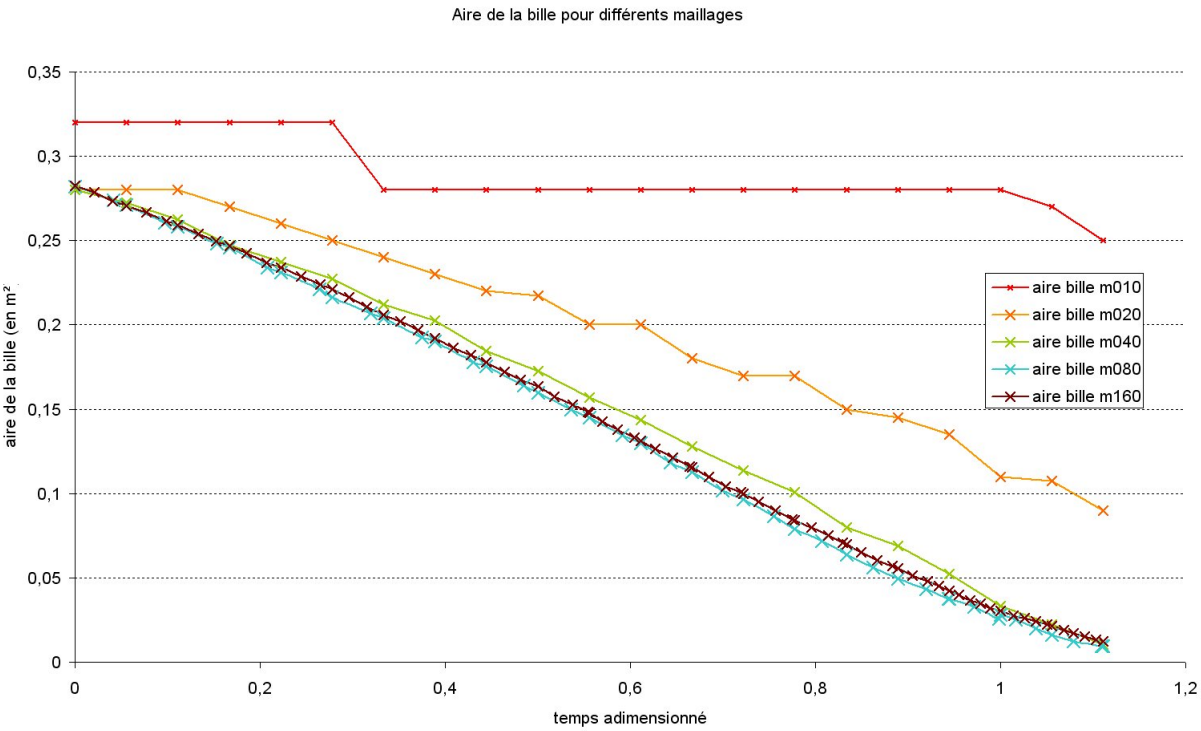


FIGURE 5.20 – *Comparaison de l'évolution de l'aire de la bille pour différents maillages*

La figure 5.20 résume les évolutions des aires du domaine sol obtenues pour les différents maillages. Le premier maillage a donné des résultats aberrants transformant la forme au lieu de l'éroder. Il existe donc une taille de maille maximum au delà de laquelle le calcul ne peut se faire correctement. Il a pu être constaté qu'il était nécessaire d'avoir au moins trois mailles entre deux interfaces, ou entre l'interface et un bord de type paroi, afin d'obtenir un profil de vitesse d'écoulement suffisant pour calculer la contrainte tangentielle.

Les autres maillages, quant à eux, ont donné des résultats similaires. Le figure 5.20 montre que la diffusion numérique diminue à mesure que la maille se réduit. Les calculs *m080* et *m160* étant presque confondus, la diffusion numérique devient dans ces cas très faible, confirmant la consistance du modèle.

5.3.4 Résultats 3D

La généralisation au cas tridimensionnel se fait naturellement car tous les algorithmes utilisés sont extensibles au cas à trois dimensions. Pour le confirmer, un cas test de boule placée au centre d'un canal de section carré a été mené. Les paramètres sont sensiblement les mêmes que pour le cas en deux dimensions, ainsi le maillage est $60 \times 30 \times 30 = 54000$ mailles.

L	$H = W$	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	K_s	k_{er}
$2\ m$	$1\ m$	$0.1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$

τ_c	$r_1 = r_2$
$10^{-20}\ Pa$	1

TABLE 5.5 – Paramètres de calcul (unités SI)

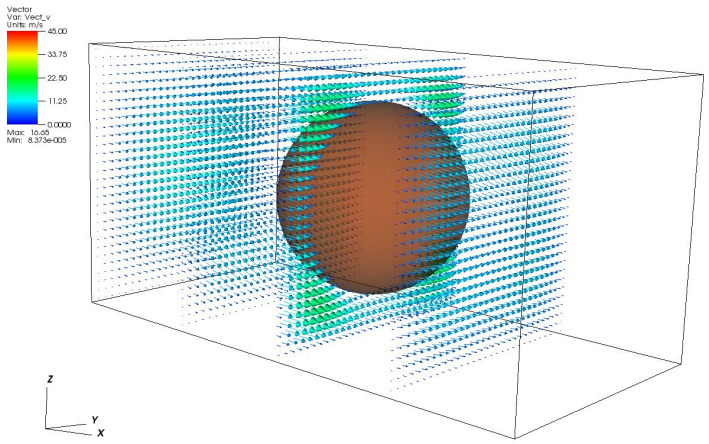


FIGURE 5.21 – *Solution initiale*

Les principales difficultés du cas tridimensionnel sont le nombre de mailles et la forme du domaine global. En effet, le nombre de mailles devient bien plus important et le temps de calcul augmente fortement ; pour ce cas test, un maillage $60 \times 30 \times 30$ a été utilisé, de manière a avoir des cellules cubiques. De plus, du fait que le maillage est cartésien, la forme du domaine global ne peut être qu'un parallélépipède rectangle, ce qui peut s'avérer limitatif dans certains cas.

L'écoulement autour de la boule est représenté sur la figure 5.21. L'érosion calculée est maximale dans la direction des diagonales de la section. Ce phénomène est normal, dû au simple fait que l'écoulement est maximum à ces endroits à cause des angles du canal.

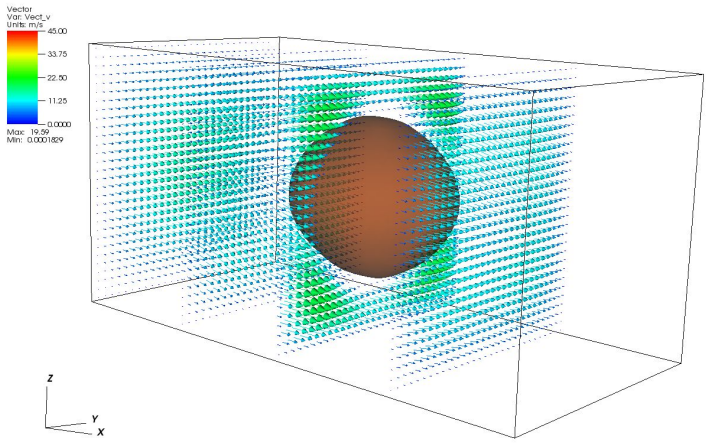


FIGURE 5.22 – *Solution à* $t = 1.910^6 s$

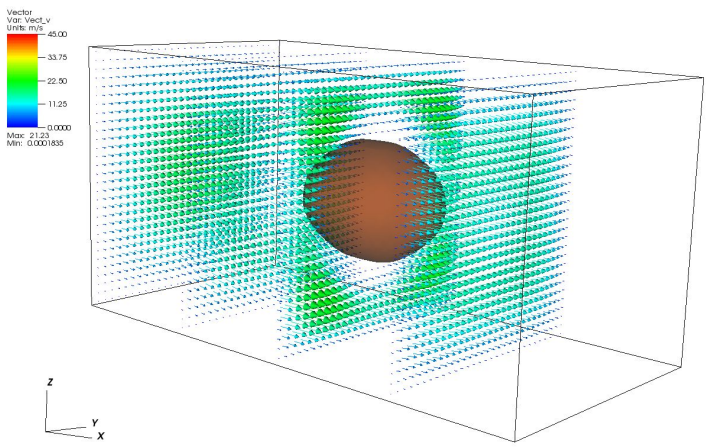


FIGURE 5.23 – *Solution à* $t = 5.710^6 s$

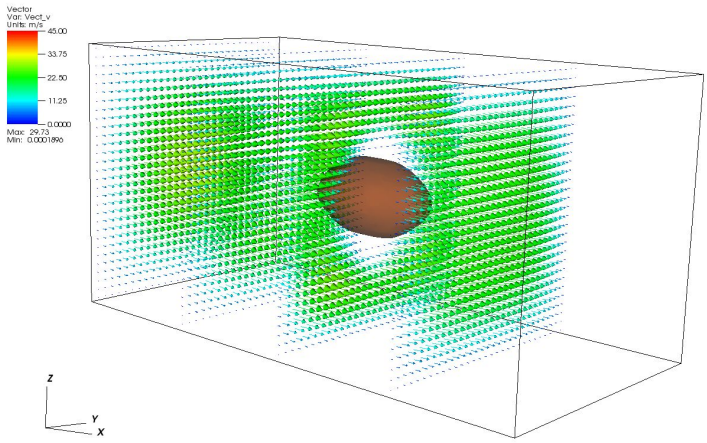


FIGURE 5.24 – *Solution à* $t = 8.410^6 s$

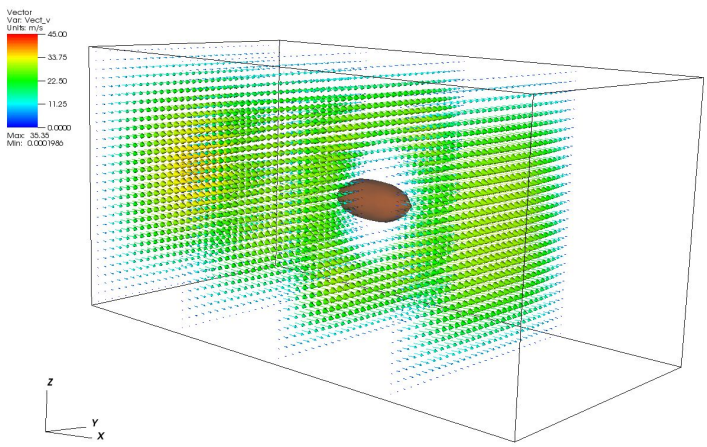


FIGURE 5.25 – *Solution à* $t = 12.710^6 s$

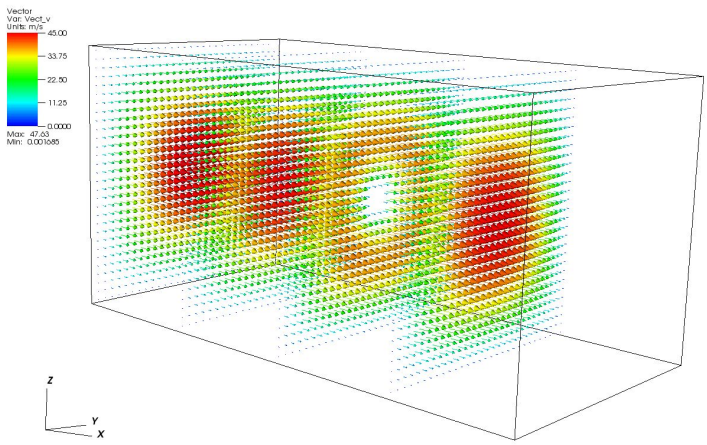


FIGURE 5.26 – *Solution à* $t = 13.410^6 s$

5.3.5 Comparaison 2D-3D

Il est important de comparer les calculs 2D et 3D dans un cas similaire afin de vérifier la validité de ceux-ci. Pour cela il est nécessaire de choisir un cas de calcul 3D qui ne dépend que de deux dimensions afin de pouvoir comparer à des résultats 2D où la troisième dimension est négligée. Ce test permet de voir si le code 3D retrouve bien l'indépendance du problème à cette dimension. La géométrie utilisée sera un cylindre de hauteur infinie soumis à un écoulement perpendiculaire à son axe. en 3D, pour simuler la hauteur infinie du cylindre, la condition de périodicité sera utilisée. Pour s'affranchir des éventuels effets de bords, la condition de périodicité sera elle aussi utilisée sur les autres bords. La figure 5.27 résume les géométries utilisées.

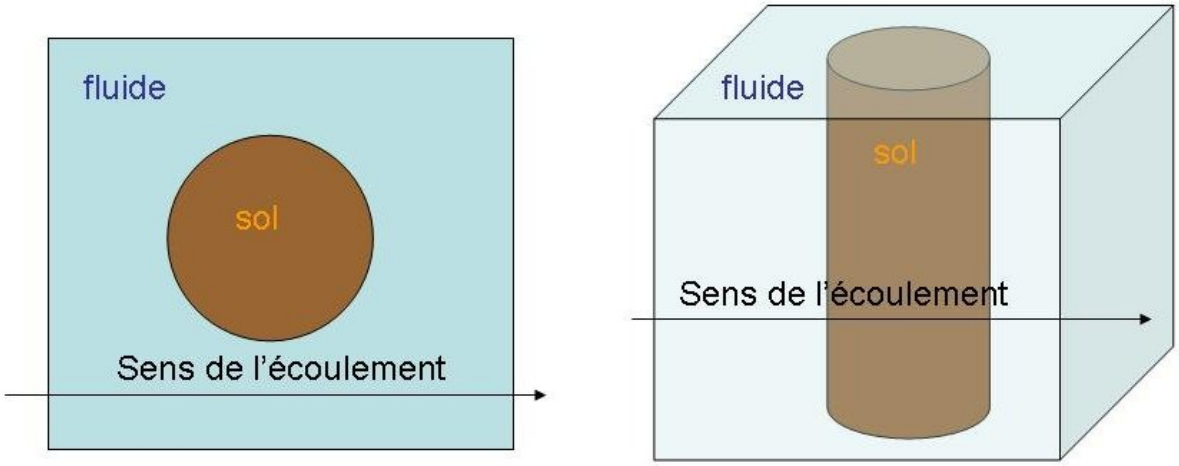


FIGURE 5.27 – *Schémas des cas de calcul utilisés pour la comparaison 2D-3D*

Tous les paramètres physiques et numériques doivent être identiques. En ce qui concerne le maillage, le nombre de maille en x et y est le même dans les deux cas et le nombre de mailles en z dans le cas 3D n'a pas d'importance (il est également possible de faire varier ce nombre afin de vérifier qu'il n'a effectivement pas d'influence).

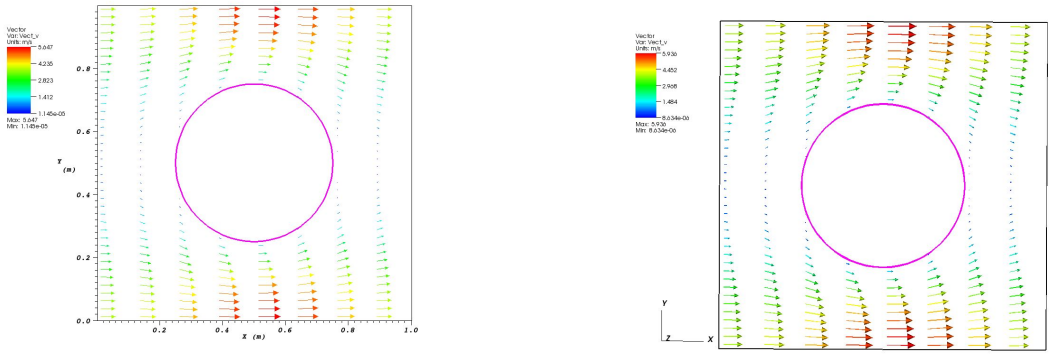
L	$H = W$	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	K_s	k_{er}
$1\ m$	$1\ m$	$0.1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$

τ_c	$r_1 = r_2$
$10^{-20}\ Pa$	1

TABLE 5.6 – Paramètres de calcul (unités SI)

Dans un premier temps, les solutions initiales calculées sont comparées. La figure 5.28 montre les résultats de solutions initiales trouvés. Pour le cas 3D, la vue de dessus est utilisée.

Les champs de vitesses calculés sont identiques, le solveur d'écoulement est donc bien réglé entre les deux codes. Reste à ce que l'érosion le soit également. L'évolution des volumes de sol est donc comparée dans les deux cas. Pour le cas 2D la surface calculée est multipliée par la hauteur du cylindre en 3D (qui est de 1m) afin de pouvoir comparer les volumes.



(a) Solution initiale 2D (b) Solution initiale 3D (vue de dessus)

FIGURE 5.28 – *Résultats du calcul de la solution initiale pour les deux cas 2D et 3D*

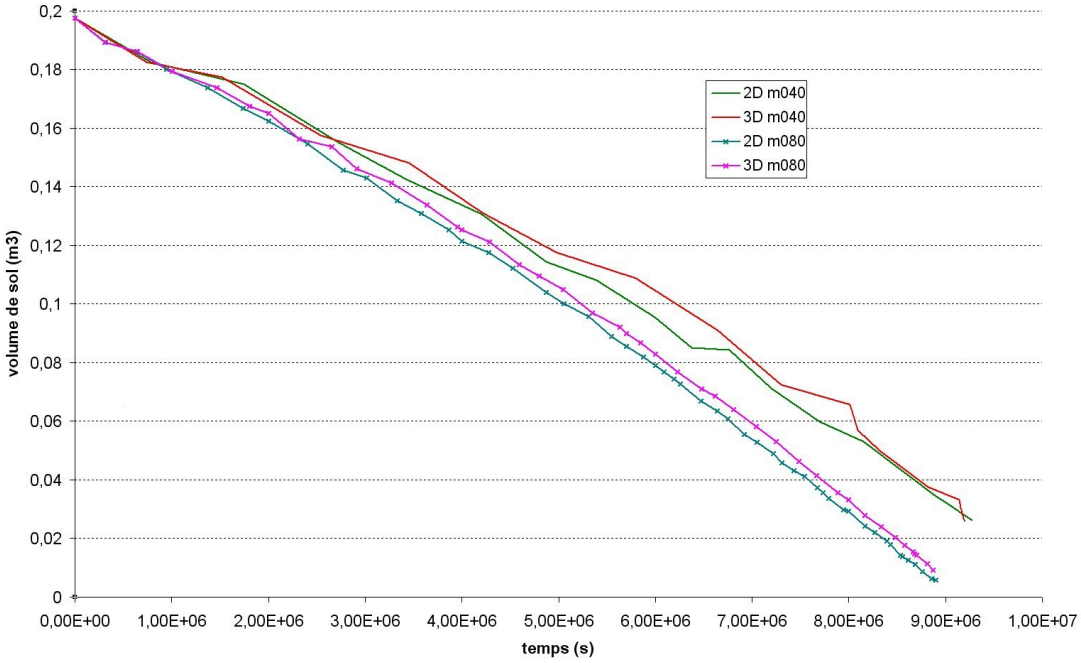


FIGURE 5.29 – *Comparaison des évolutions de volume entre 2D et 3D*

La figure 5.29 montre l'évolution du volume de sol calculé par le modèle 2D et le modèle 3D pour deux maillages, l'un 40×40 (m040) et l'autre 80×80 (m080). Le calcul du volume est fait de manière simpliste :

$$V = \sum_{i,j,k} (\psi_{ijk} > 0) dxdydz \tag{5.7}$$

Il était donc important de calculer plusieurs maillages afin d'atténuer les irrégularités dues au calcul de volume. Les deux calculs 2D et 3D semblent en bon accord l'un par rapport à l'autre pour les deux maillages considérés. Le calcul à maillage plus grossier semble plus irrégulier, mais les irrégularités de la courbe 5.29 ne sont dues qu'au calcul approximatif des volumes.

5.4 Amas de billes, homogénéisation

5.4.1 Homogénéisation Périodique sur un disque

Le cas de calcul est très simple, on suppose un amas périodique de billes comme sur la figure 5.30. On extrait donc une cellule et on y applique les conditions de périodicité sur tous les bords. On applique alors un gradient global de pression.

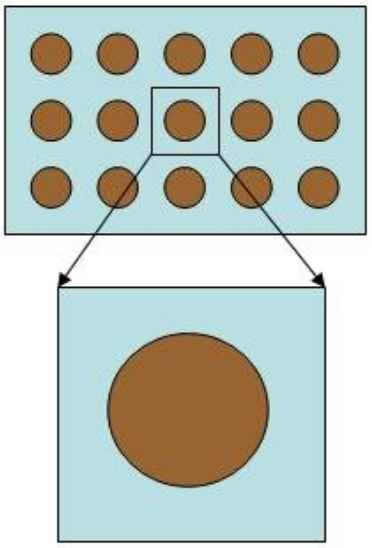


FIGURE 5.30 – *Schéma d'une cellule dans un milieu périodique*

On choisit ici d'utiliser un domaine rectangulaire, classiquement il est d'usage de choisir la plus petite période. Il serait également possible de prendre plusieurs périodes d'un seul coup, mais il est d'usage d'utiliser la plus petite période possible afin d'avoir le domaine de calcul le plus petit possible et ainsi réduire le nombre de mailles nécessaires, pour un gain de temps de calcul significatif.

L	H	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	K_s	k_{er}
$1\ m$	$1\ m$	$0.1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$

τ_c	$r_1 = r_2$
$10^{-20}\ Pa$	1

TABLE 5.7 – Paramètres de calcul (unités SI)

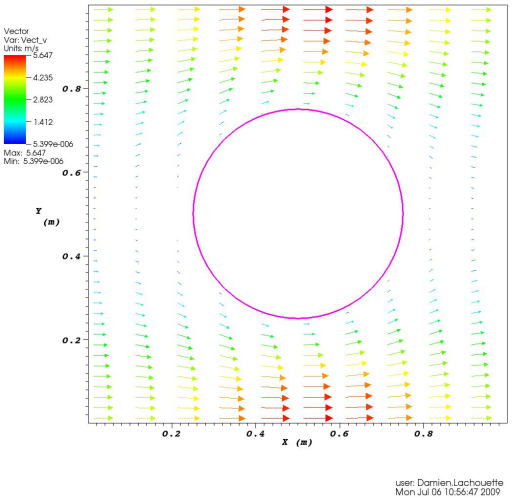


FIGURE 5.31 – *Solution initiale*

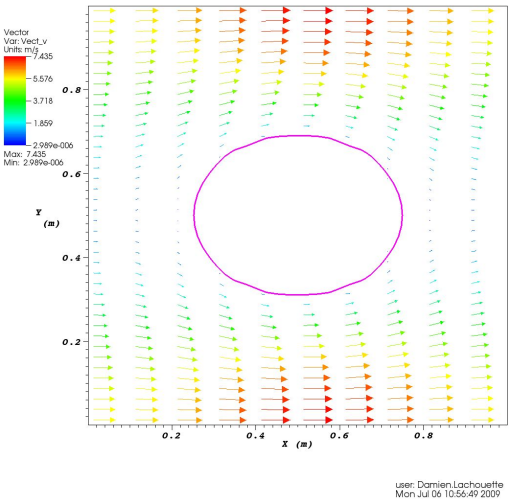


FIGURE 5.32 – *Solution à* $t = 2.710^6 s$

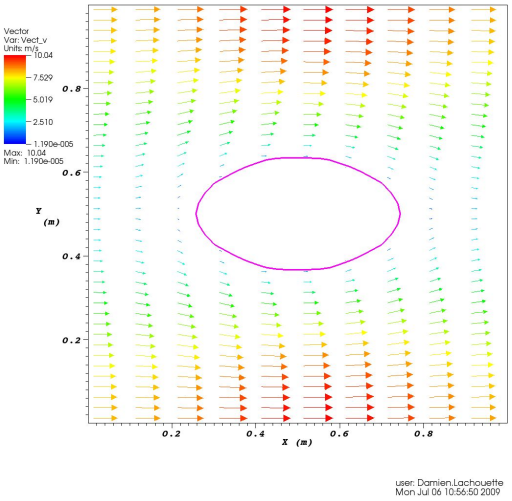


FIGURE 5.33 – *Solution à* $t = 5.2 10^6 s$

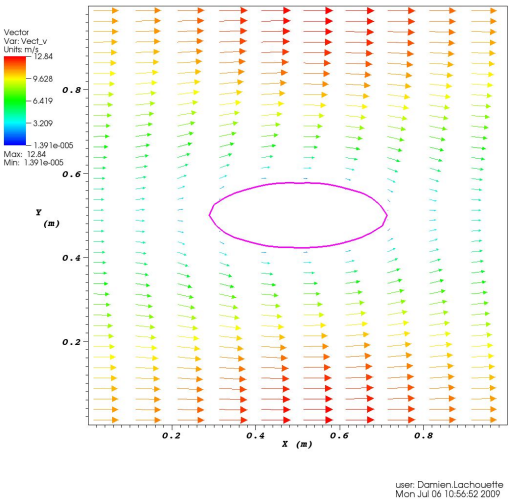


FIGURE 5.34 – *Solution à* $t = 7.3 10^6 s$

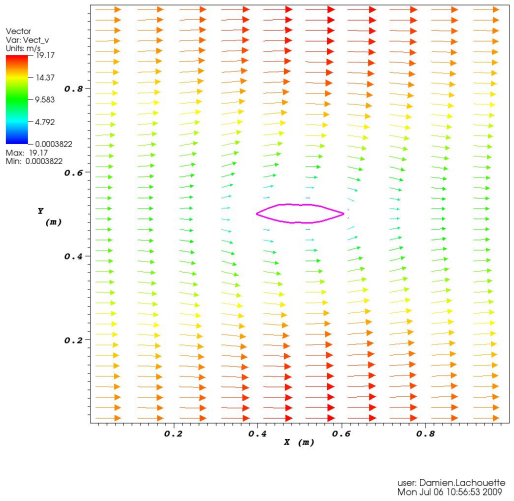


FIGURE 5.35 – *Solution à* $t = 8.910^6 s$

5.4.2 Homogénéisation sur trois billes

Nous continuons sur les cas d'homogénéisation périodique mais avec une période un peu plus complexe comme le montre la figure 5.36.

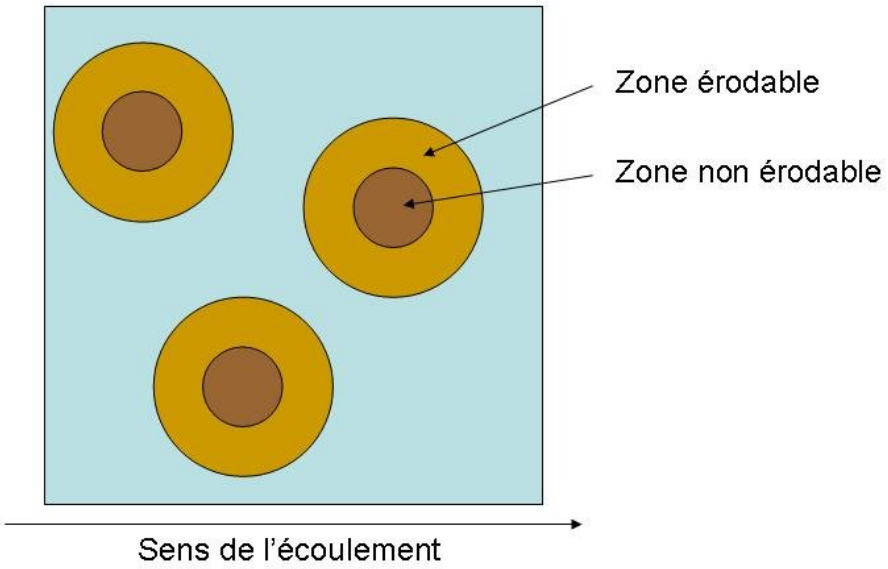


FIGURE 5.36 – *Schéma d'une cellule dans un milieu périodique*

Nous utilisons maintenant trois billes ; jusqu'à maintenant nous avons toujours utilisé un contour fermé régulier pour l'interface dans nos simulations, cette fois nous allons tester la possibilité d'avoir une interface non convexe et non continue. De plus, nous allons utiliser deux matériaux, l'un érodable l'autre non.

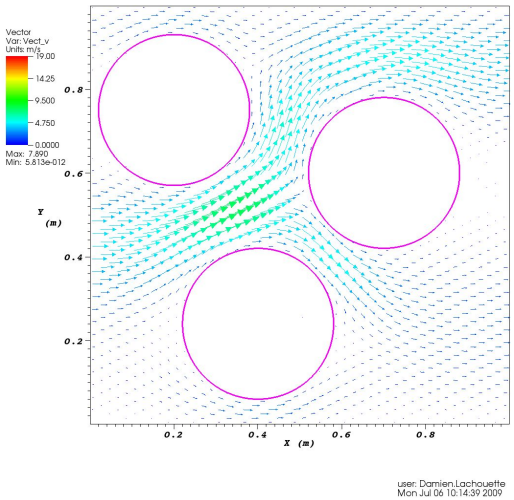


FIGURE 5.37 – *Solution initiale*

La figure 5.37 représente les résultats obtenus et l'on peut constater d'une part que la géométrie de l'interface en plusieurs morceaux est parfaitement gérée par le calcul et l'écoulement s'adapte bien à la géométrie.

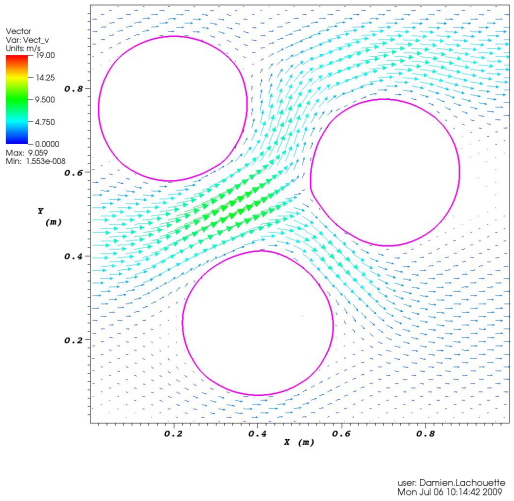


FIGURE 5.38 – *Solution à* $t = 2.710^6 s$

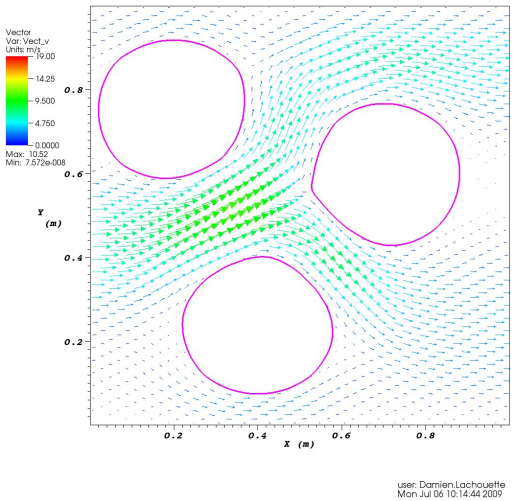


FIGURE 5.39 – *Solution à* $t = 5.210^6 s$

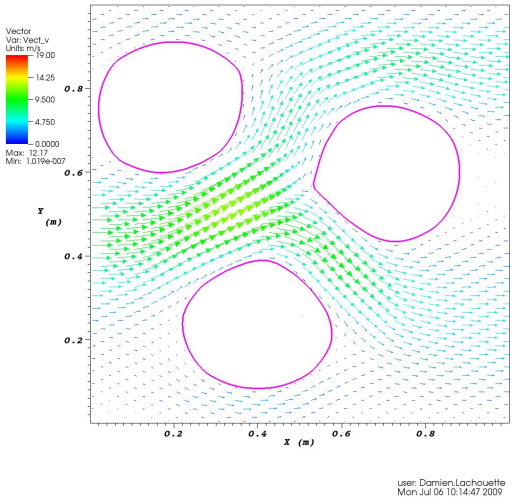


FIGURE 5.40 – *Solution à* $t = 7.310^6 s$

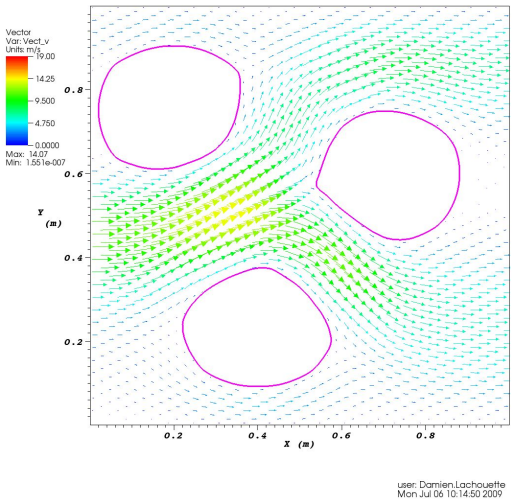


FIGURE 5.41 – *Solution à* $t = 8.910^6 s$

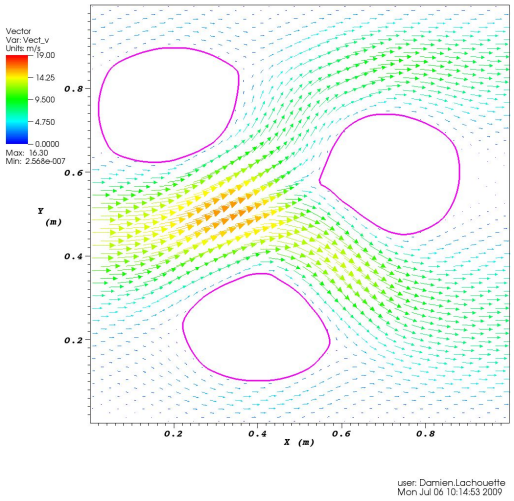


FIGURE 5.42 – *Solution à* $t = 9.510^6 s$

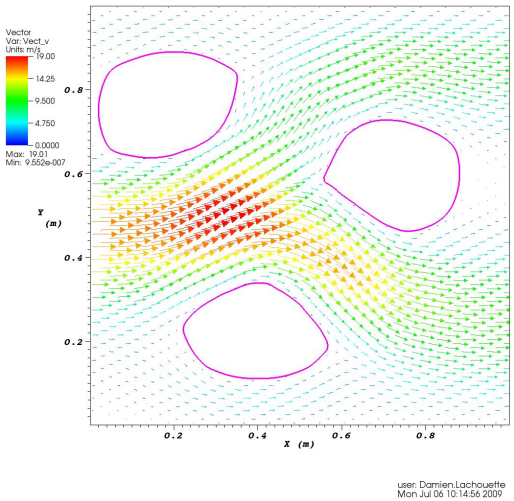


FIGURE 5.43 – *Solution à* $t = 11.910^6 s$

5.4.3 Homogénéisation 3D

Nous généralisons immédiatement le cas précédent à un cas de calcul 3D. Cette fois nous utilisons quatre sphères entièrement érodables dans une cellule cubique.

L	$H = W$	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	K_s	k_{er}
$1\ m$	$1\ m$	$0.1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$

τ_c	$r_1 = r_2$
$10^{-20}\ Pa$	1

TABLE 5.8 – Paramètres de calcul (unités SI)

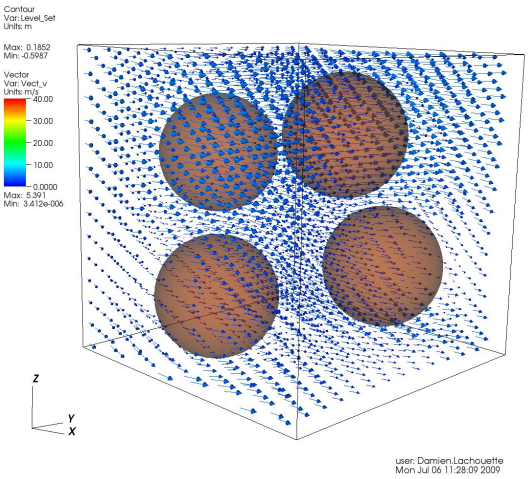


FIGURE 5.44 – *Solution initiale*

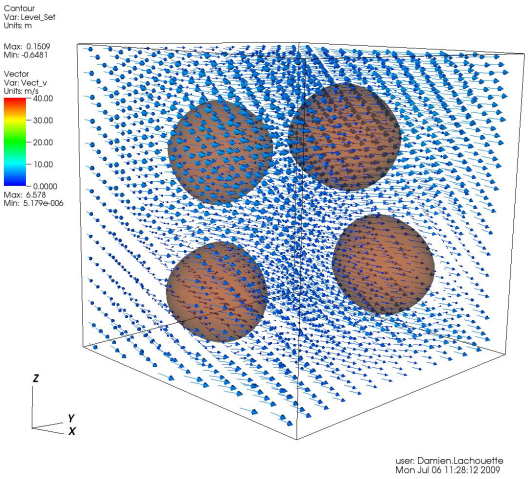


FIGURE 5.45 – *Solution à* $t = 2.610^6 s$

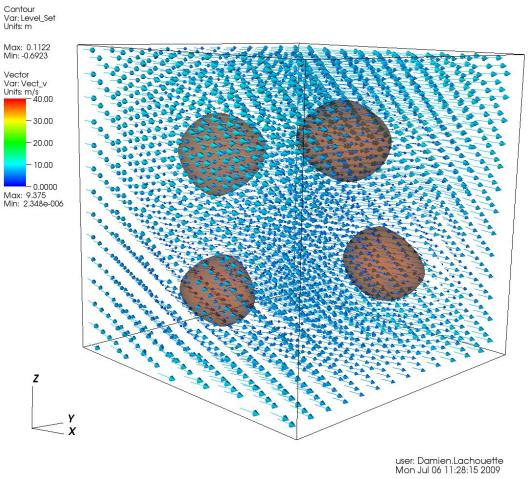


FIGURE 5.46 – *Solution à* $t = 4.910^6 s$

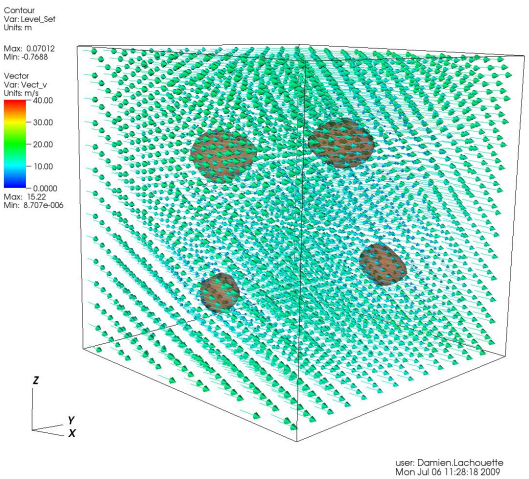


FIGURE 5.47 – *Solution à* $t = 6.310^6 s$

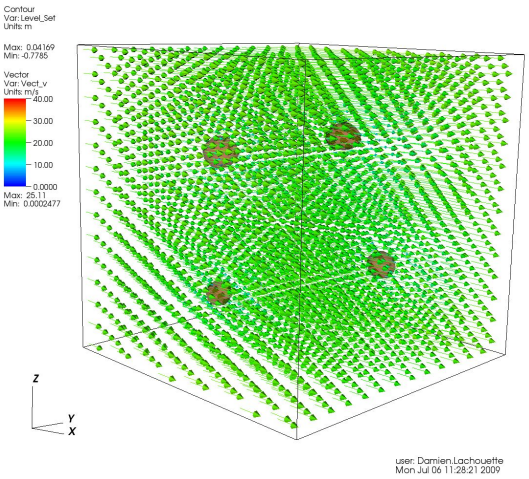


FIGURE 5.48 – *Solution à* $t = 7.210^6 s$

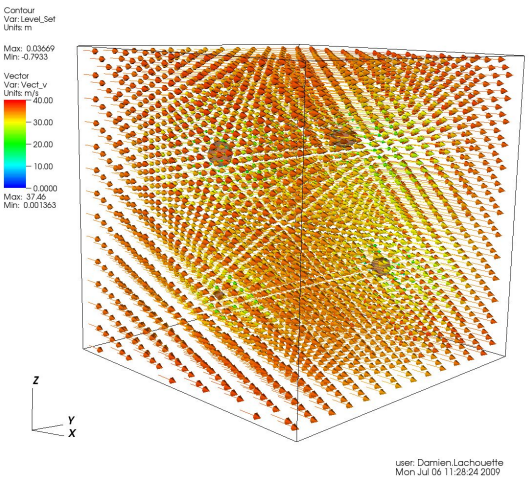


FIGURE 5.49 – *Solution à* $t = 8.210^6 s$

5.5 Autre loi d'érosion

Le modèle fonctionnant bien on peut se poser la question de la loi d'érosion. Plutôt que d'employer la loi de seuil classique sur la contrainte de cisaillement, une autre loi basée sur la contrainte normale a été testée. La relation utilisée est la suivante :

$$\dot{m} = \begin{cases} k_{er}(\|\overrightarrow{n}.\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n}\| - \sigma_c) & \text{Si } \|\overrightarrow{n}.\overline{\overline{T}}.\overrightarrow{n}\| > \sigma_c \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \tag{5.8}$$

où σ_c est un seuil sur la contrainte normale.

Cette relation a été testée sur le cas de la bille.

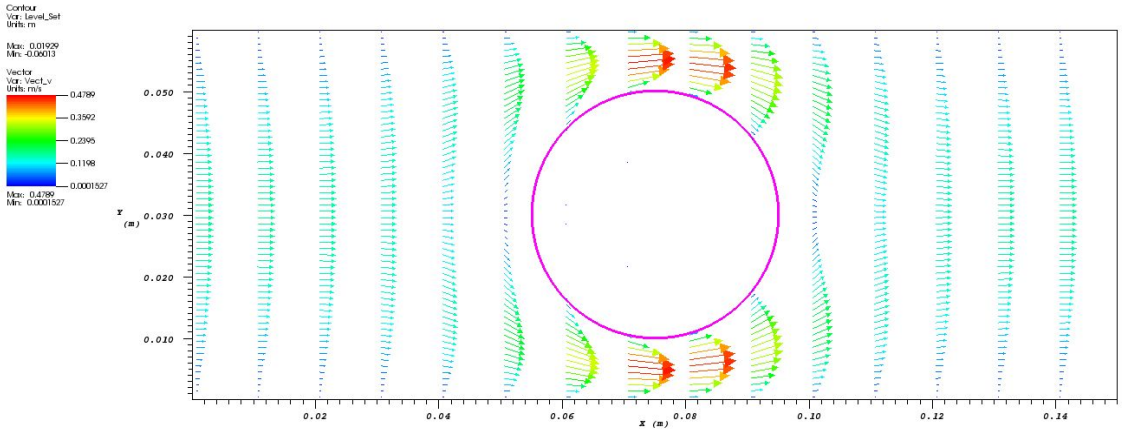


FIGURE 5.50 – *Résultat 2D initial*

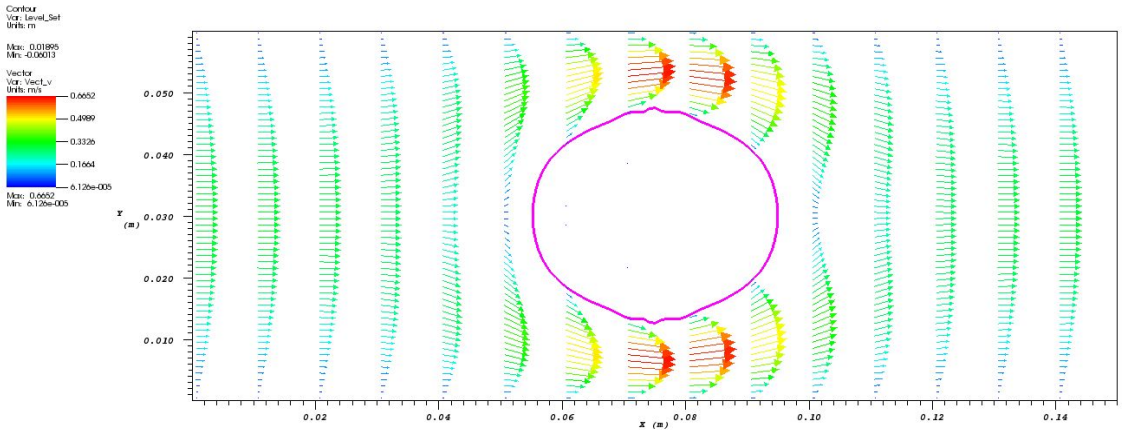


FIGURE 5.51 – *Résultat 2D à* $t = 48087s$

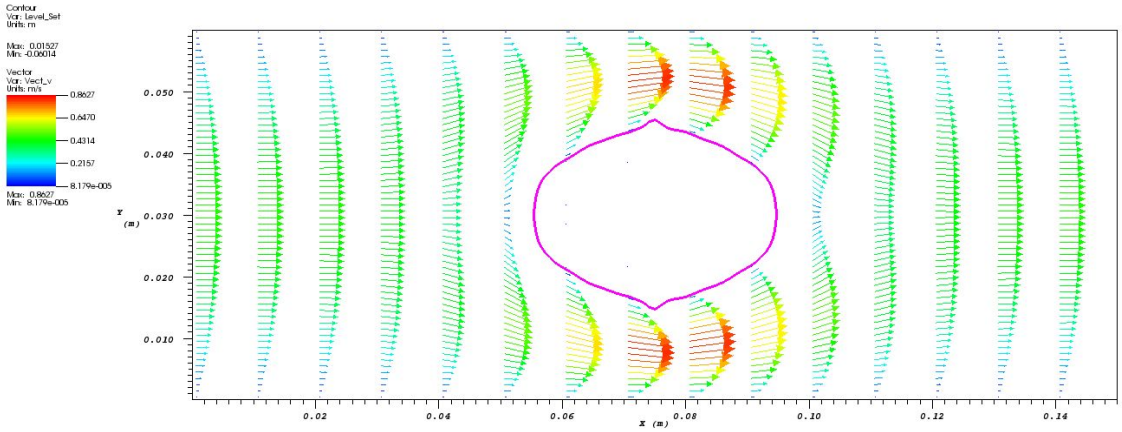


FIGURE 5.52 – *Résultat 2D à* $t = 86732s$

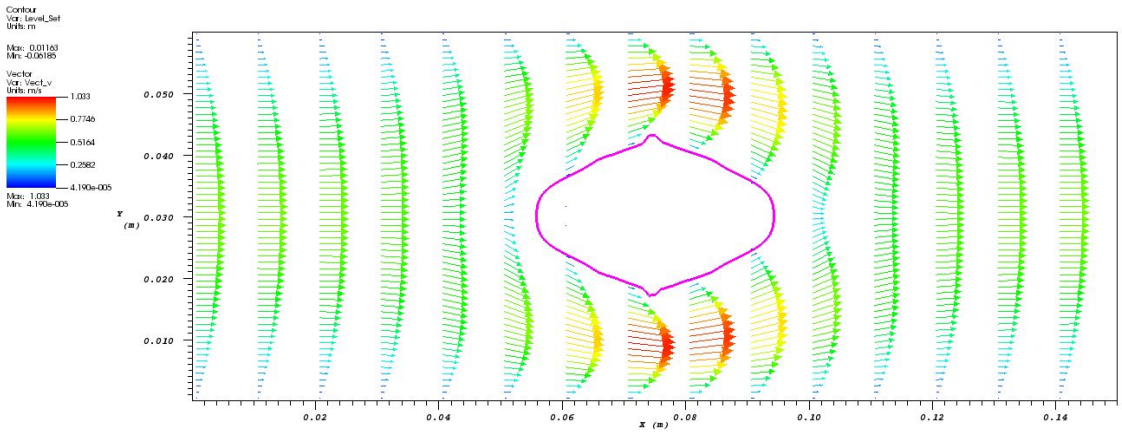


FIGURE 5.53 – *Résultat 2D à* $t = 120632s$

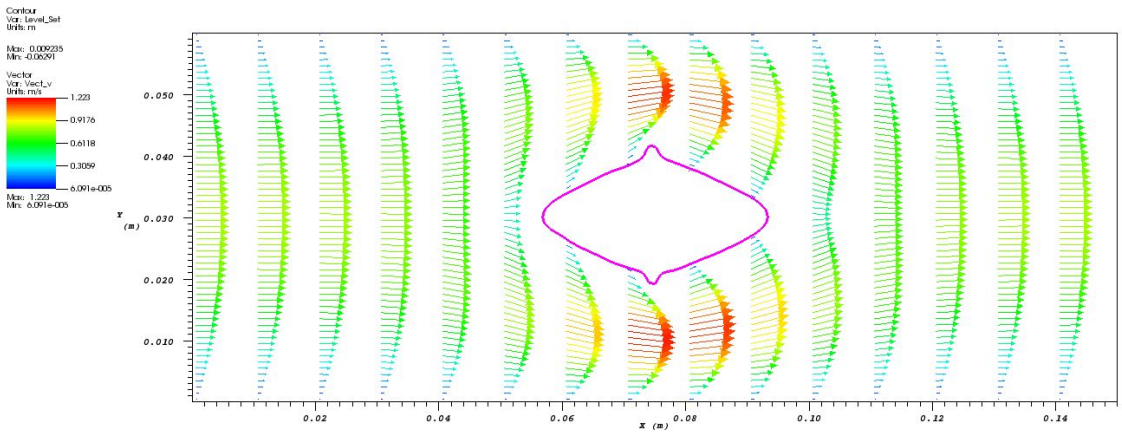


FIGURE 5.54 – *Résultat 2D à* $t = 151788s$

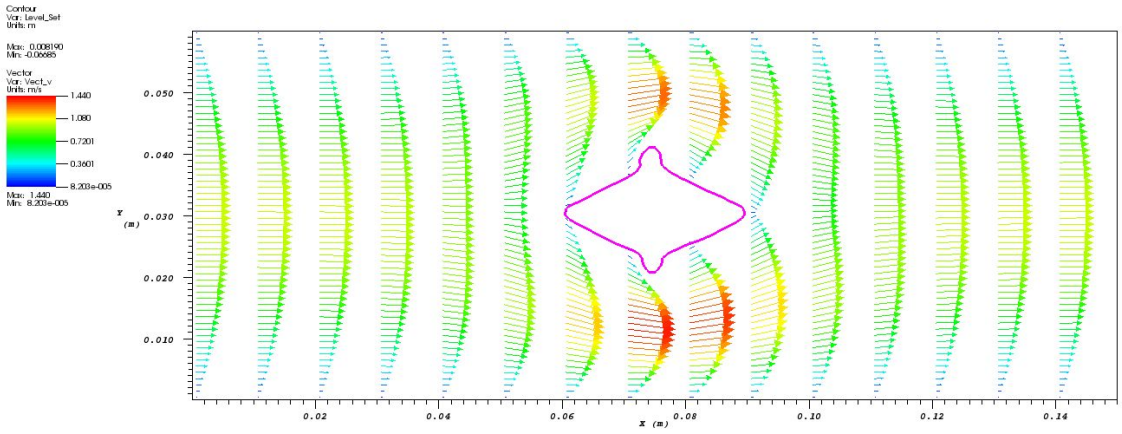


FIGURE 5.55 – *Résultat 2D à* $t = 184289s$

La validité ou la pertinence de ce modèle n'est pas discutée ici. Ce cas ne sert qu'à mettre en avant le fait qu'il est possible d'utiliser diverses lois d'érosion afin de tester et comparer à l'expérimentation. Toutefois, le résultat obtenu semble indiquer que la contrainte normale à l'interface est minimale non seulement sur le sommet du disque (tangentiel à l'écoulement) mais aussi sur les sommets amont et aval à l'écoulement.

5.6 Discussions et conclusions

Dans ce chapitre, l'étude de sensibilité aux paramètres a montré les limites du schéma. Notamment, les paramètres numériques comme les coefficients du Lagrangien Augmenté et la taille des mailles montrent que les valeurs optimales de ces paramètres sont difficiles à évaluer et dépendent du cas de calcul à résoudre. Cette étude montre une nouvelle fois que les valeurs des paramètres d'érosion sont primordiales dans l'évaluation d'une solution. La méthode Level Set quant à elle semble bénéficier d'une grande précision dans le calcul du mouvement de l'interface.

Il est à noter que malgré l'utilisation du modèle d'écoulement simplifié de Stokes le temps de calcul reste important. Ce temps de calcul est fortement dépendant du nombre de mailles car d'une part, chaque pas de temps est plus long à calculer en raison d'un plus grand nombre d'inconnues et d'autre part la condition de stabilité oblige les pas de temps à être plus petits lorsque les mailles sont plus petites. Ainsi plus de pas de temps sont nécessaires pour atteindre le même temps final.

Les cas du carré et de la bille montrent que des instabilités apparaissent au cours du calcul de la vitesse d'évolution de l'interface. Ces instabilités sont dues au calcul de la contrainte de cisaillement à l'interface. Le raffinement de maillage améliore le résultat mais augmente fortement le temps de calcul car le maillage est raffiné partout. Le schéma doit être amélioré pour être capable d'utiliser un maillage raffiné localement proche de l'interface. Toutefois même le raffinement local risque de ne pas être suffisant pour obtenir une solution sans instabilités. Une meilleure approche pour le calcul de la contrainte de cisaillement à l'interface reste encore à trouver.

Le modèle est toutefois suffisamment général pour accepter diverses conditions aux limites, permettre l'homogénéisation périodique et l'utilisation de lois d'érosion différentes. La mise en œuvre des conditions limites est mal aisée à cause du schéma à maillage décalé. L'homogénéisation périodique permet de rajouter un terme source représentant le gradient global de pression dans les équations du mouvement. L'utilisation d'une loi d'érosion différente est présentée ici sans en avoir fait l'étude, le but étant simplement de voir que la mise en œuvre d'une loi différente ne pose pas de problème et est simple à réaliser.

Chapitre 6

Application à l'érosion

Les ordinateurs, plus on s'en sert moins, moins ça a de chance de mal marcher.
Jacques Rouxel (Les Shaddoks) (1931-2004)

Comme il a été évoqué en introduction, l'érosion interne est une cause majeure de rupture dans les ouvrages hydrauliques tels que les digues et les barrages. La France compte environ 10 000 km de digues sur son territoire qui, pour la plupart, deviennent âgées et donc, plus sensibles aux phénomènes d'érosion. Trois cas seront présentés, tout d'abord la modélisation du banc d'essai d'érosion de tube présent au Cemagref, puis une modélisation fine de la suffusion vue comme une érosion de surface et enfin le cas d'une pile de pont dans le lit d'une rivière. Ces derniers cas ne représentent pas l'érosion d'un ouvrage hydraulique mais montre les extensions possibles du modèle à d'autres applications.

6.1 Le banc d'érosion interne HET

Le banc d'érosion interne HET pour Hole Erosion Test est un banc d'essai élaboré par Wan et Fell [Wan et Fell, 2004a], [Wan et Fell, 2004b] destiné à mesurer l'érosion d'un sol. Le principe repose sur le fait que l'échantillon de sol est soumis à un écoulement en charge, le degré de saturation de l'échantillon avant d'être placé dans la cellule peut varier. Il n'y a pas de surface libre dans ce cas test.

6.1.1 Le cas du canal

L'idée de ce cas test est de se rapprocher de l'essai du Hole Erosion Test, car il s'agit de l'érosion d'un canal de sol. Ce cas permet de tester la possibilité d'avoir une partie sol touchant les bords du domaine de calcul. De plus, le cas 2D comporte une zone non érodable à l'entrée de l'écoulement, ainsi placée pour faciliter dans un premier temps le calcul de condition de bord d'entrée d'un part, et d'autre part de tester la capacité du modèle à capter des zones non érodables dans sa géométrie initiale. Les figures 6.1 et 6.2 résument les géométries utilisées pour ce cas.

Pour modéliser la zone non érodable, deux approches ont été menées. La première approche consiste à utiliser des constantes matériaux (k_{er}, τ_c et K_s) dépendantes de la position, ainsi une zone où $k_{er} = 0$ est non érodable. De plus le coefficient de pénalisation

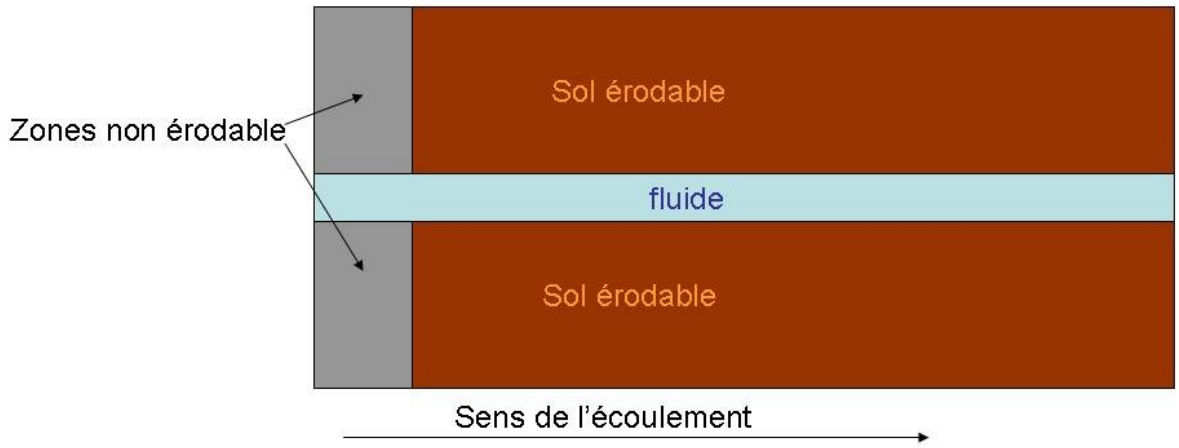


FIGURE 6.1 – *Schéma du cas test du canal en 2D avec une zone non érodable à l'entrée*

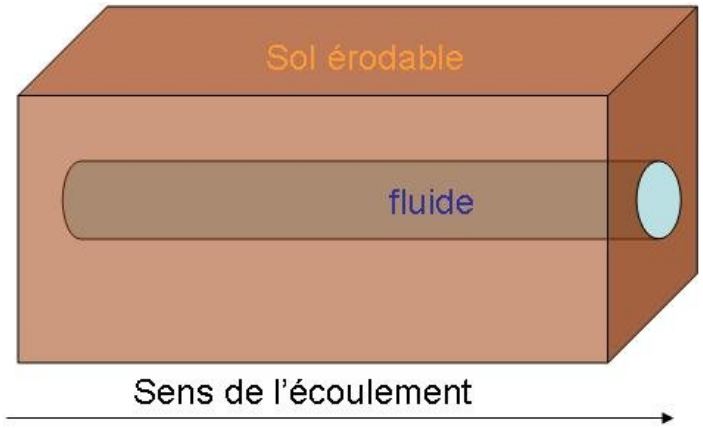


FIGURE 6.2 – *Schéma du cas test du canal en 3D*

(assimilable à la perméabilité) peut varier mais le schéma numérique semble avoir du mal à gérer cette discontinuité. La seconde approche consiste à utiliser une seconde fonction Level Set ψ_2. En théorie, l'utilisation de deux fonctions Level Set permet la représentation de 4 phases, la difficulté résidant dans le calcul de leurs évolutions. Le problème de la zone non érodable est plus simple car il n'y a pas d'évolution d'une part, et d'autre part, la zone non érodable est aussi une partie du sol.

6.1.1.1 Premiers résultats 2D

Ce cas test utilise les paramètres physiques dépendants de la position, mais garde une seule fonction Level Set sur un maillage 150×60.

L	H	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	$r_1 = r_2$
$0.15\ m$	$0.06\ m$	$1000\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	1

K_{s1}	k_{er1}	τ_{c1}	K_{s2}	k_{er2}	τ_{c2}
$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$	$10^{-20}\ Pa$	$10^{-7}\ m^2$	$0\ s.m^{-1}$	$10^{20}\ Pa$

TABLE 6.1 – Paramètres de calcul

Dans les parties non-érodables, les paramètres K_{s2}, k_{er2} et τ_{c2} sont utilisés.

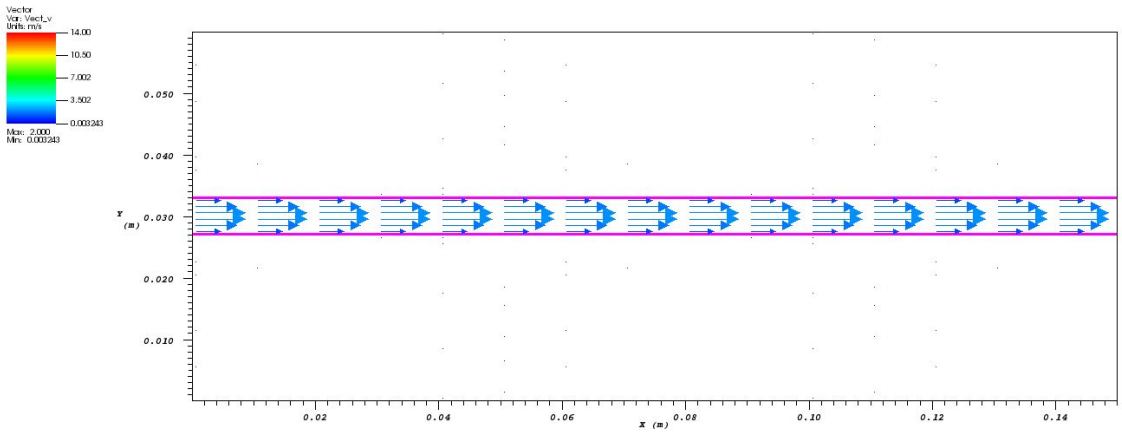


FIGURE 6.3 – *Résultat 2D initial*

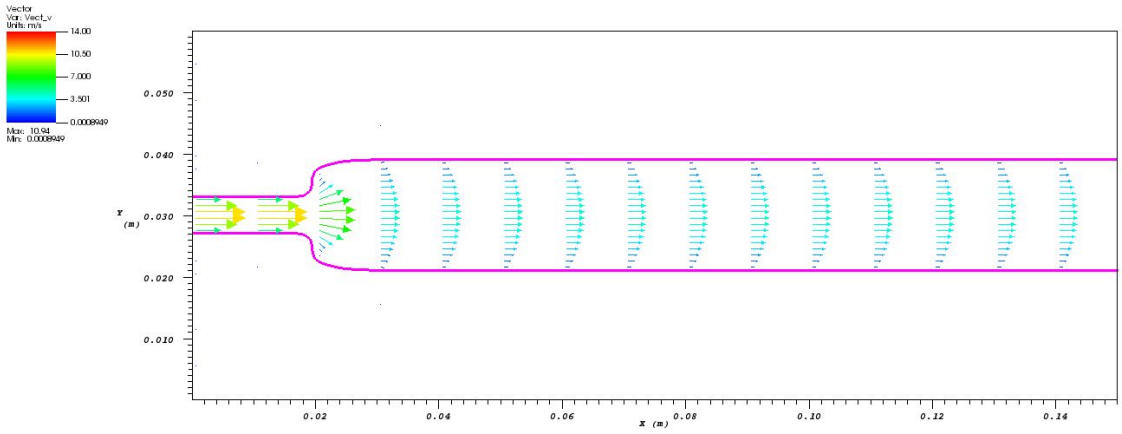


FIGURE 6.4 – *Résultat 2D à* $t = 14225s$

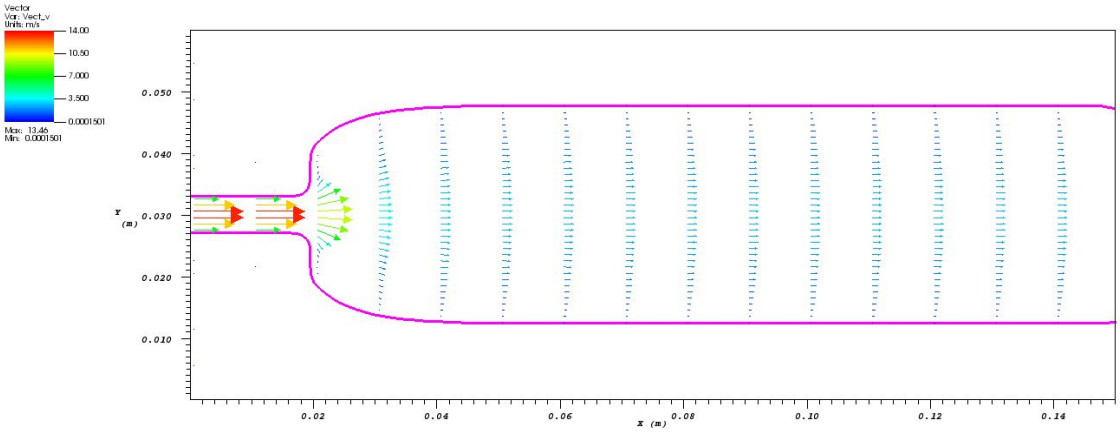


FIGURE 6.5 – *Résultat 2D à* $t = 55477s$

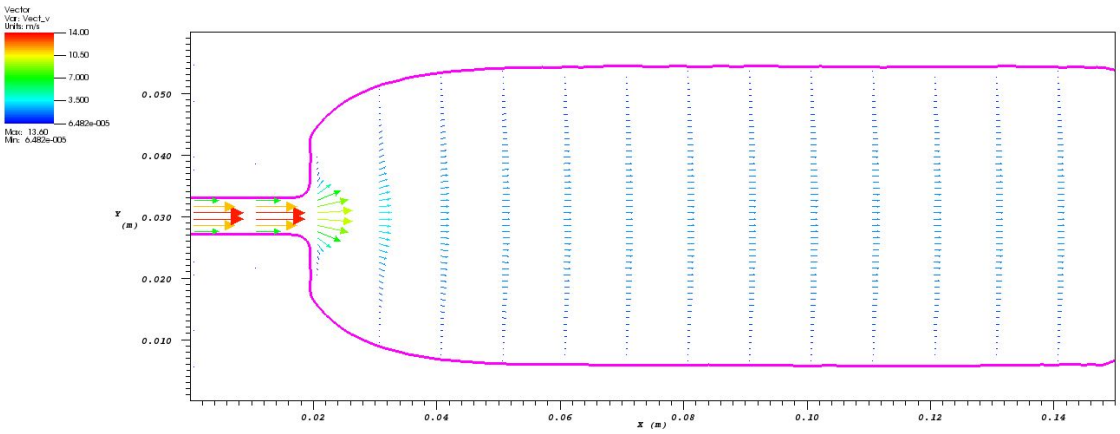


FIGURE 6.6 – *Résultat 2D à* $t = 125749s$

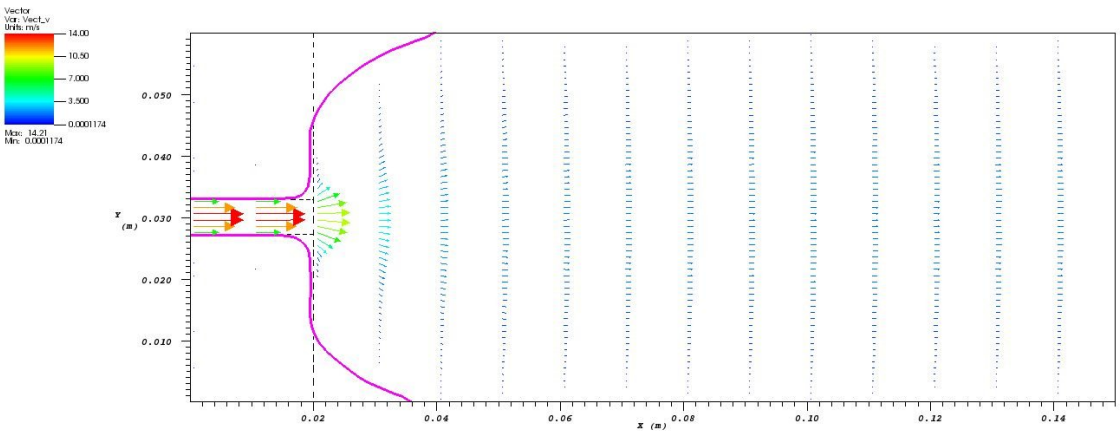


FIGURE 6.7 – *Résultat 2D à* $t = 315973s$

La zone non érodable est bien prise en compte en ne rajoutant simplement que deux valeurs des coefficients k_{er} et τ_c. Cependant la zone non érodable devait se limiter à $x < 0.02$ or on constate que l'interface est placée à une demi maille de la bonne solution. De plus l'arrondi a un rayon bien supérieur à la taille de maille ce qui aurait dû être le cas avec la simple méthode Level Set. L'érosion se fait de manière uniforme lorsque l'on s'éloigne de la zone non érodable.

6.1.1.2 Résultats avec seconde fonction Level Set

Dans ce cas, une seconde fonction Level Set est utilisée pour maintenir la zone non érodable à sa place. La seconde fonction Level Set n'est pas utilisée dans le calcul de l'écoulement, mais seulement pour adapter la première fonction Level Set. Dans ce cas aussi, nous utilisons des paramètres de matériaux dépendant de la position. La seconde fonction Level Set est initialisée à la distance signée à la zone non érodable, sans se préoccuper du reste de la zone de sol ($\psi_2 > 0$ dans la zone non érodable). La première fonction Level Set (ψ) est initialisée à la distance signée à l'interface écoulement-sol, zone non érodable incluse. Dans ces conditions, après mouvement de l'interface, seul ψ a changé de valeur ; pour prendre en compte la seconde fonction, on les combine grâce à la formule :

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{(\psi_1)^2 + (\psi_2)^2} & \text{Si } \psi_2\psi_1 > 0 \\ \max(\psi_1, \psi_2) & \text{Sinon} \end{cases} \tag{6.1}$$

Cette formule traduit la superposition de la zone non-érodable avec le sol, ainsi que le minimum des distances aux interfaces dans les autres cas. Dans ce cas également, les

L	H	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	$r_1 = r_2$
$0.15\ m$	$0.06\ m$	$1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	1

K_{s1}	k_{er1}	τ_{c1}	K_{s2}	k_{er2}	τ_{c2}
$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$	$10^{-20}\ Pa$	$10^{-7}\ m^2$	$0\ s.m^{-1}$	$10^{20}\ Pa$

TABLE 6.2 – Paramètres de calcul

paramètres K_{s2}, k_{er2} et τ_{c2} sont utilisés dans les parties non-érodables.

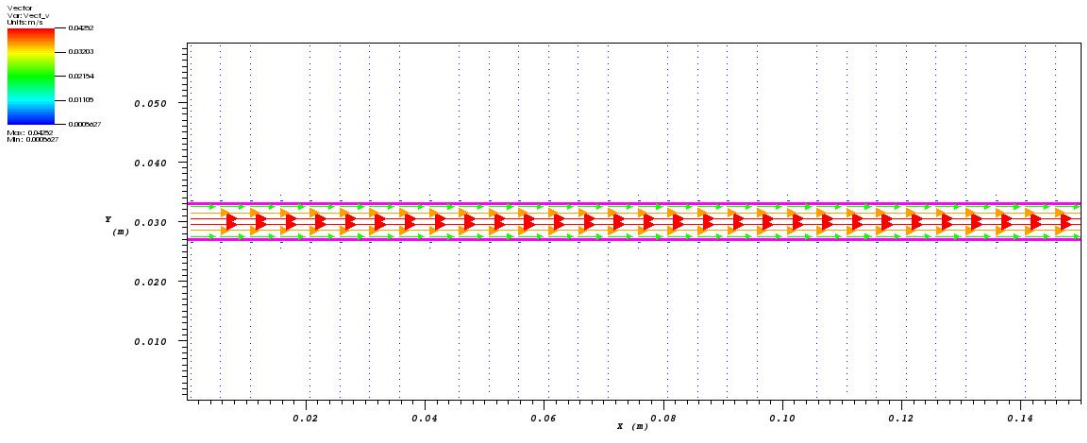


FIGURE 6.8 – *Résultat 2D initial*

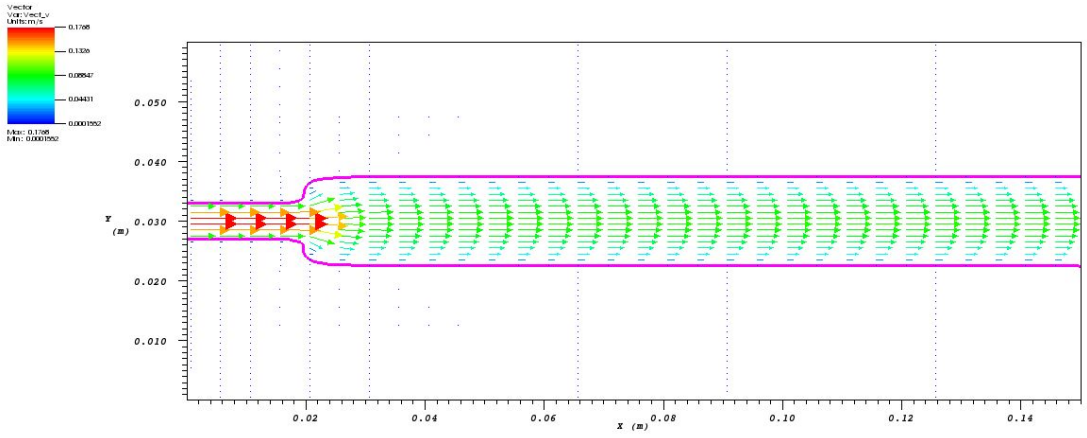


FIGURE 6.9 – *Résultat 2D à* $t = 14225s$

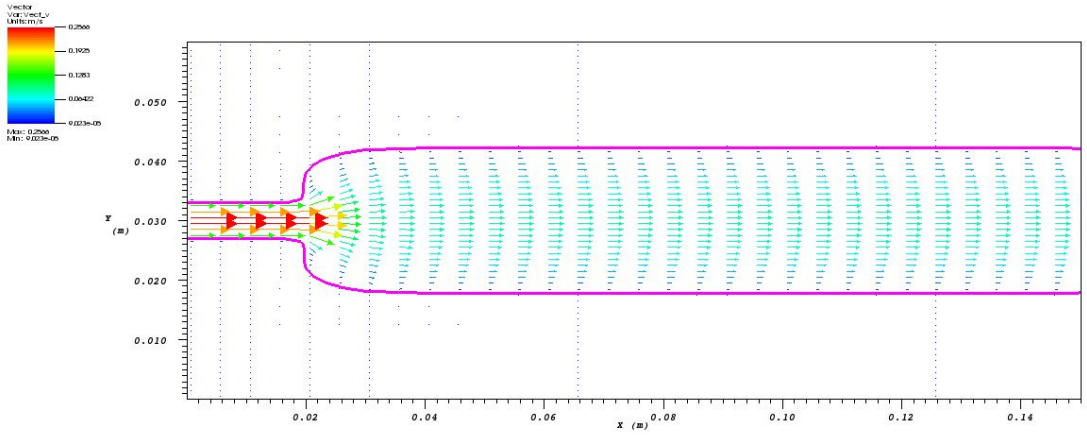


FIGURE 6.10 – *Résultat 2D à* $t = 55477s$

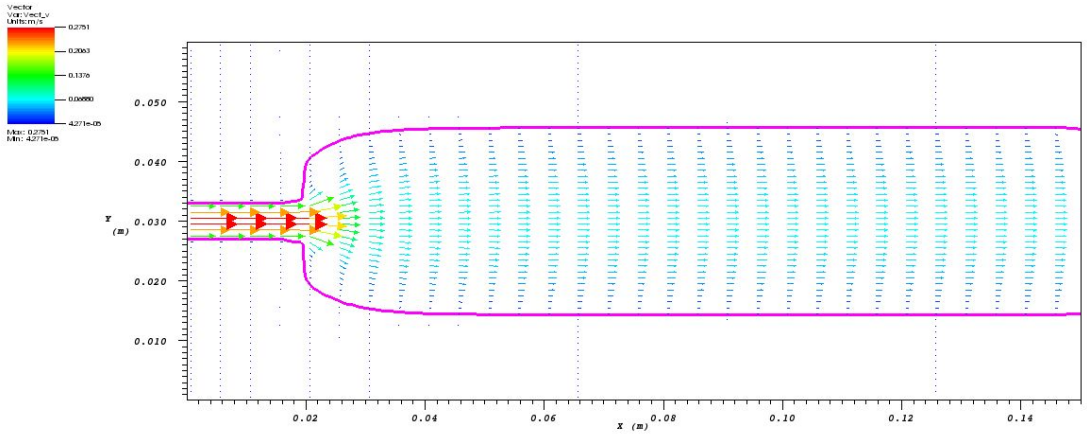


FIGURE 6.11 – *Résultat 2D à* $t = 125749s$

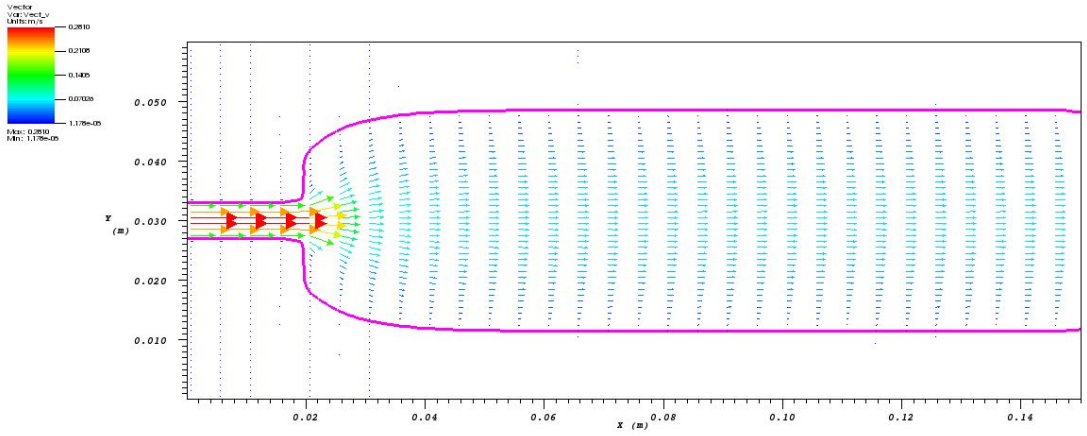


FIGURE 6.12 – *Résultat 2D à* $t = 315973s$

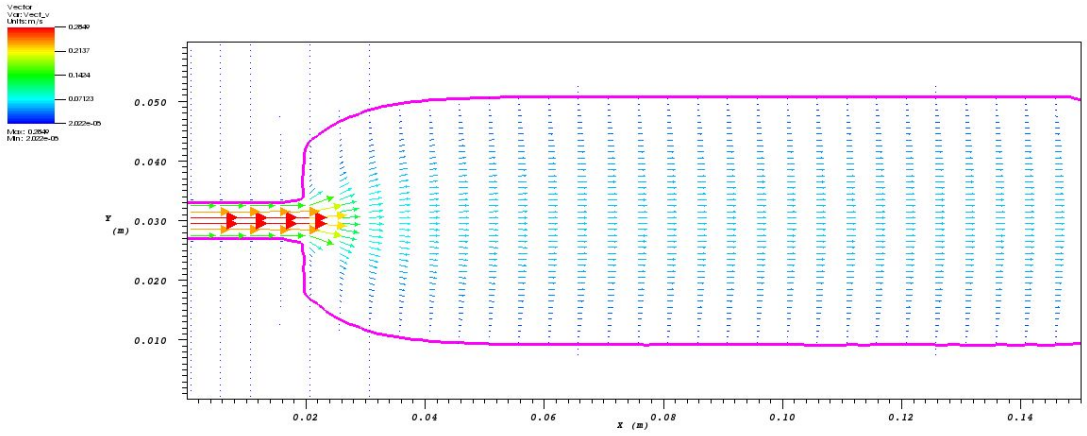


FIGURE 6.13 – *Résultat 2D à* $t = 315973s$

L'utilisation de la seconde fonction Level Set permet un positionnement plus précis de la zone non érodable. De plus, l'arrondi au niveau de la jonction des deux zones est bien représenté sur une seule maille, la méthode Level Set étant incapable d'être plus précise dans ce cas. Le reste des phénomènes d'érosion reste identique. Par conséquent, les éventuelles zones non érodables seront représentées à l'aide d'une seconde fonction Level Set.

6.1.1.3 Résultats 3D

Dans cette partie, un tube totalement érodable sera utilisé. Il n'est pas pertinent de le comparer à un résultat expérimental pour plusieurs raisons : d'une part, les conditions d'entrée et de sortie ne correspondent pas à ce qui est observé sur le banc HET au niveau de l'échantillon ; d'autre part, le modèle d'écoulement de Stokes est insuffisant pour décrire les phénomènes d'écoulement dans le banc d'essai (il faudrait Navier-Stokes complet avec turbulence).

L	$H = W$	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	$r_1 = r_2$
$2\ m$	$1\ m$	$0.1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	10

K_s	k_{er}	τ_c
$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$	$10^{-20}\ Pa$

TABLE 6.3 – Paramètres de calcul

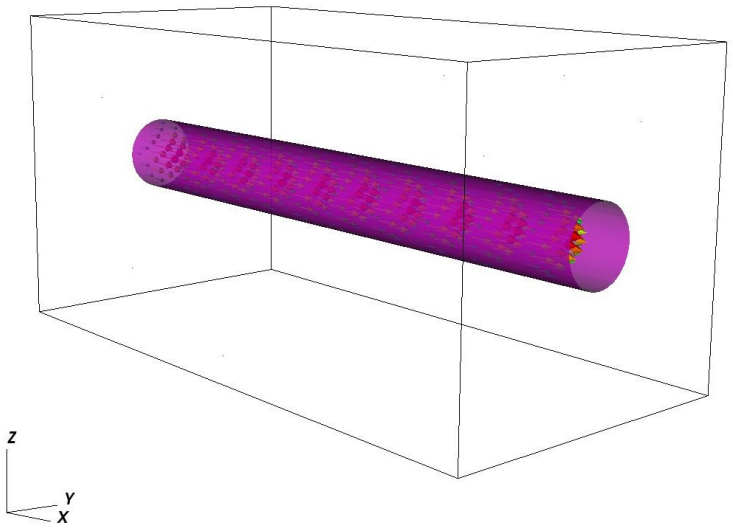


FIGURE 6.14 – *Résultat 3D initial*

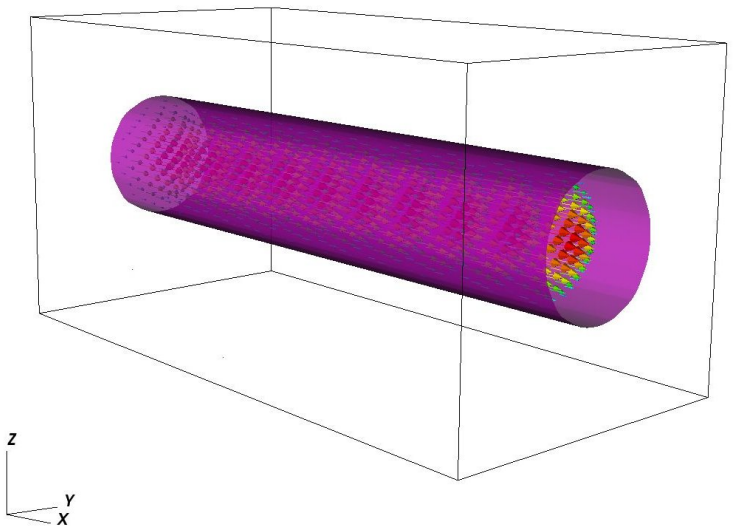


FIGURE 6.15 – *Résultat 3D à* $t = 7.7810^7 s$

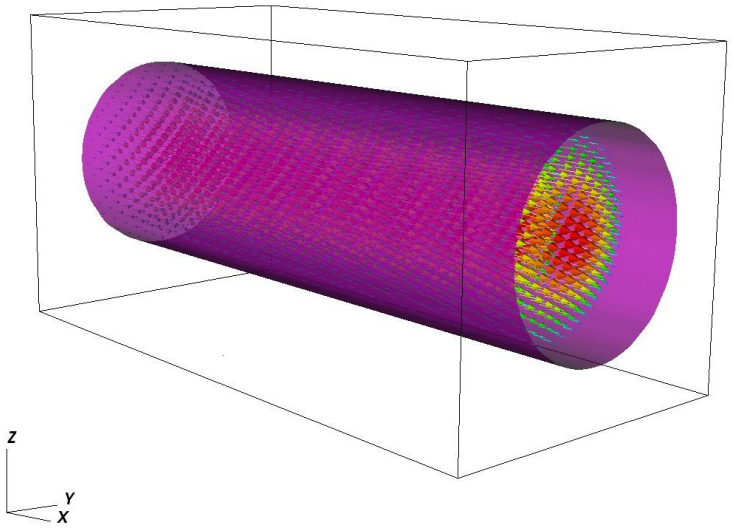


FIGURE 6.16 – *Résultat 3D à* $t = 1.3410^8 s$

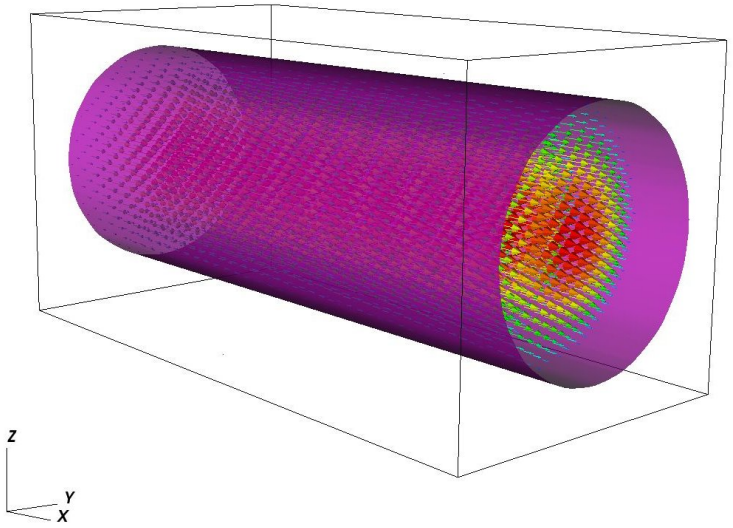


FIGURE 6.17 – *Résultat 3D à* $t = 1.5210^8 s$

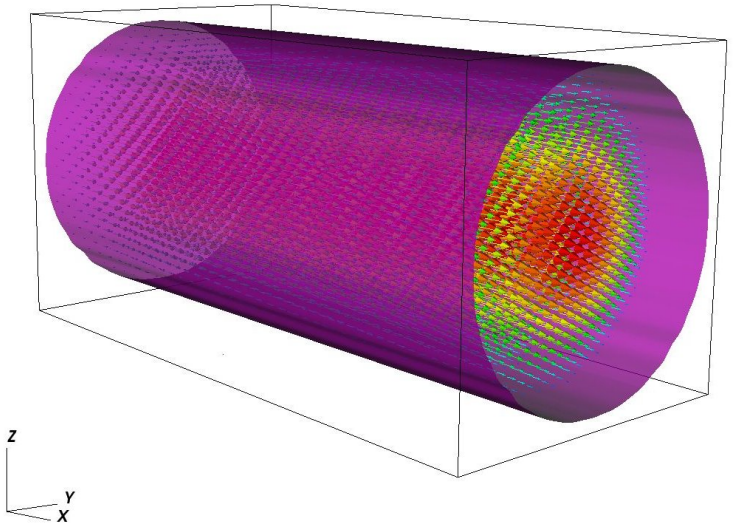


FIGURE 6.18 – *Résultat 3D à* $t = 1.7710^8 s$

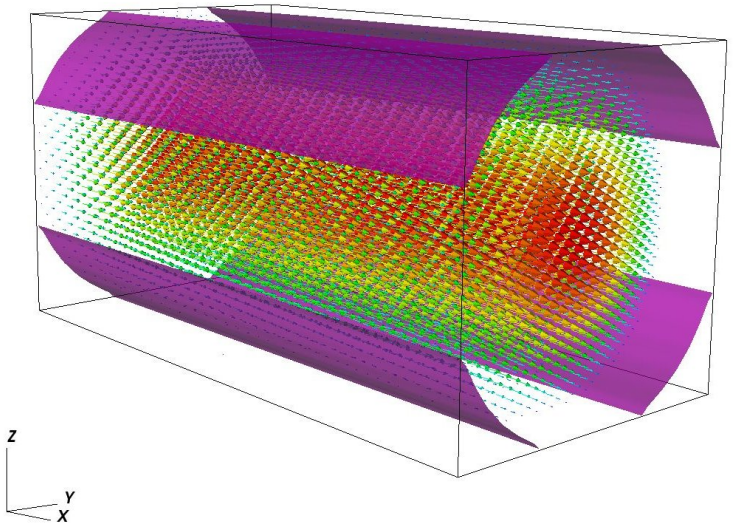


FIGURE 6.19 – *Résultat 3D à* $t = 1.9410^8 s$

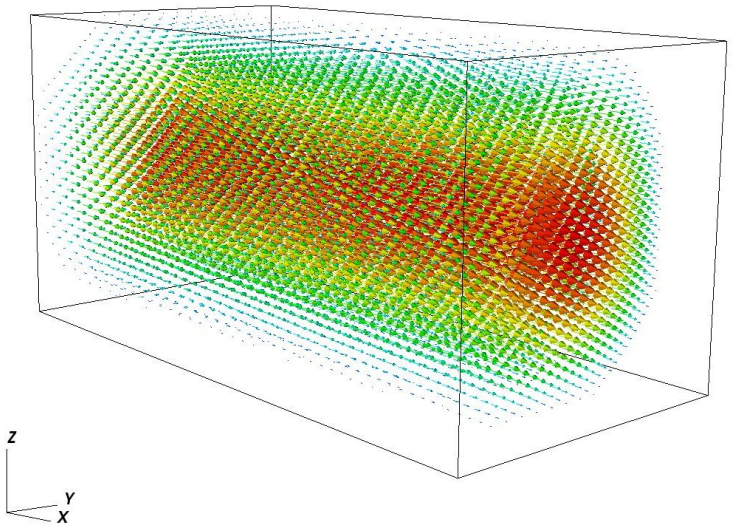


FIGURE 6.20 – *Résultat 3D à* $t = 210^8 s$

On observe cependant une érosion régulière le long du tube et à symétrie de révolution. On constate aussi qu'il n'y a pas de problèmes dans le calcul au moment où l'interface touche les bords et que le calcul continue jusqu'à disparition totale du domaine sol. Une comparaison peut toutefois être faite avec les modèles théoriques présentés par [Bonelli et Brivois, 2007]. La comparaison portera sur le rayon du tube et le débit. Dans leur modélisation, Bonelli et Brivois utilisent une hypothèse d'axisymétrie ; ce qui correspond à ce qui a été observé sur la modélisation 3D sauf après que l'interface touche les bords. La loi d'érosion employée est la même et l'évolution du rayon est donnée par :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\dot{m}}{\rho_g} \tag{6.2}$$

Comme il y a indépendance du problème suivant l'axe du cylindre. La contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\tau(t) = \frac{R(t)\Delta P}{2L} \tag{6.3}$$

où ΔP représente le gradient de pression entre l'entrée et la sortie du tube.
A l'aide de ces relations, l'expression du débit devient :

$$Q(t) = \frac{\pi \Delta P R(t)^4}{8\mu L} \tag{6.4}$$

et l'expression du rayon :

$$R(t) = \frac{2L\tau_c}{\Delta P} + \left(R_0 - \frac{2L\tau_c}{\Delta P}\right) \exp\left(\frac{k_{er}\Delta P}{2L\rho_g} t\right) \tag{6.5}$$

Les calculs se font à gradient de pression imposé, donc ΔP constant. L'influence de deux paramètres est étudié : la taille du maillage et le coefficient de pénalisation (K_s). Les cas étudiés sont :

- "m040 10-9" : maillage 40×40 en (y, z) et $K_s = 10^{-9}$.
- "m080 10-9" : maillage 80×80 en (y, z) et $K_s = 10^{-9}$.
- "m040 10-8" : maillage 40×40 en (y, z) et $K_s = 10^{-8}$.
- "m040 10-7" : maillage 40×40 en (y, z) et $K_s = 10^{-7}$.
- "m040 10-3" : maillage 40×40 en (y, z) et $K_s = 10^{-3}$.

Le dernier cas n'a pas de sens au niveau de la modélisation car le coefficient de pénalisation est bien trop grand pour assurer la vitesse nulle dans le sol, mais permet de vérifier l'influence de ce paramètre sur les évolutions de rayon et de débit.

La figure 6.21 montre les évolutions du rayon pour les différents cas test. La première remarque est que le coefficient de pénalisation joue peu sur l'évolution : pour les valeurs entre 10^{-9} et 10^{-7} les résultats obtenus sont identiques. En revanche lorsque l'on augmente fortement ce coefficient (10^{-3}) on note une légère accélération de l'érosion.

Le maillage quant à lui, semble avoir une plus grande influence : en effet, en raffinant le maillage, l'érosion calculée se rapproche de la solution analytique. Cette constatation renforce encore l'idée d'un raffinement local de maillage afin d'améliorer la précision des calculs.

La figure 6.22 montre les évolutions du débit pour les différents cas test. Dans ce cas, le coefficient de pénalisation semble jouer un plus grand rôle lorsque l'on l'augmente fortement. Le débit tracé sur la figure est le débit dans le tube et ne tient pas compte du débit dans le sol. Le débit dans le sol est négligeable par rapport au débit total dans tous les cas sauf le cas à $K_s = 10^{-3}$ où il est important.

Il est également possible d'évaluer simplement le calcul de l'écoulement en comparant cette fois l'évolution du débit par rapport au rayon du tube. La figure 6.23 montre que le maillage raffiné est très proche de la solution théorique pour un écoulement laminaire.

La taille de maille semble quant à elle influencer que très peu l'évolution du débit. L'évolution de débit calculée sur le maillage raffiné est très semblable à celle calculée sur le maillage plus grossier alors que l'érosion calculée est différente.

La constatation majeure de cette figure reste le fait que les évolutions de débit calculées sont différentes de l'évolution analytique. Cependant l'écart d'évolution du

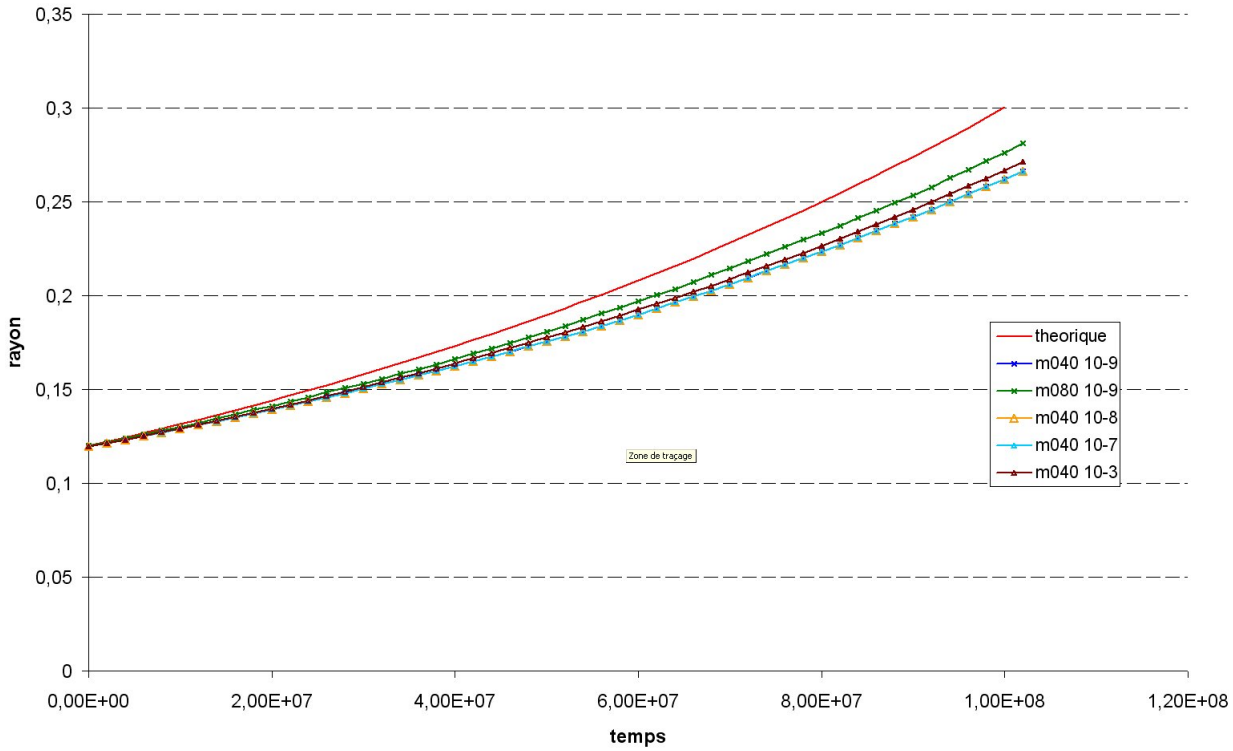


FIGURE 6.21 – *Courbe de comparaison de l'évolution du rayon pour différents maillages et différents coefficients de pénalisation*

débit semble n'être dû qu'à l'évolution différente du rayon. En effet, pour le maillage raffiné, un très bon accord en débit et rayon est trouvé.

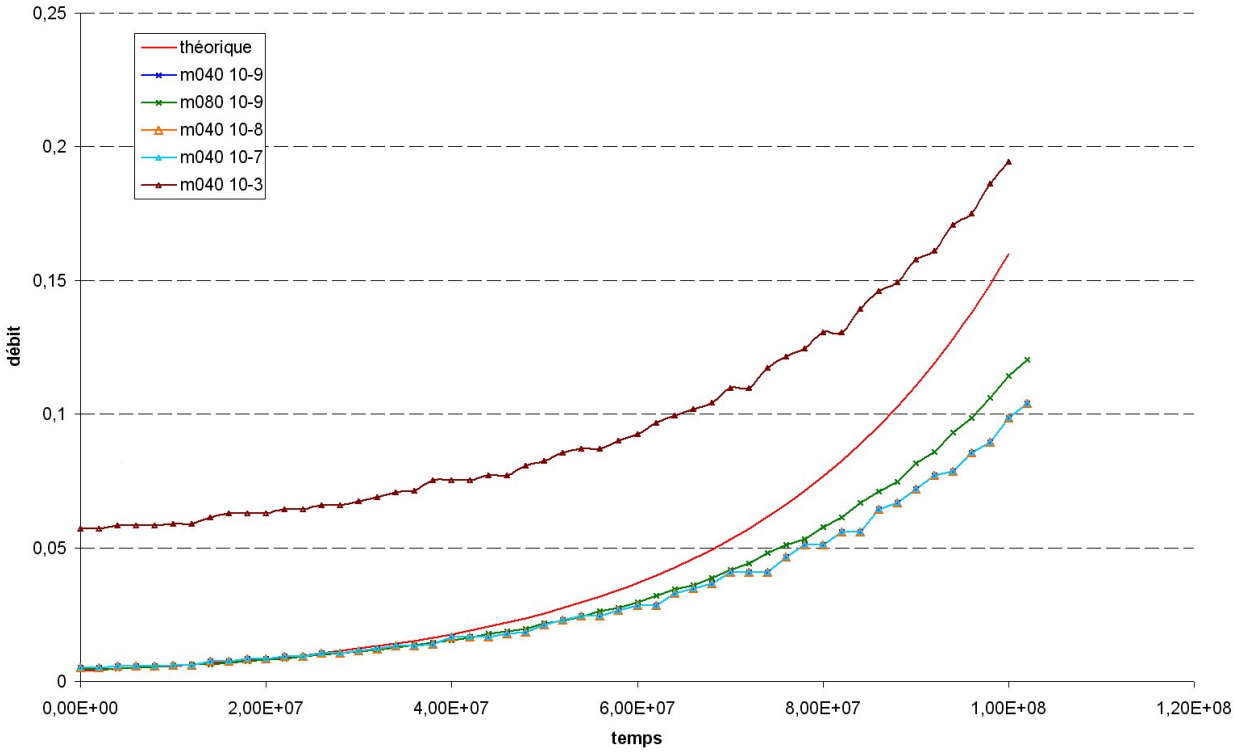


FIGURE 6.22 – *Courbe de comparaison de l'évolution du débit pour différents maillages et différents coefficients de pénalisation*

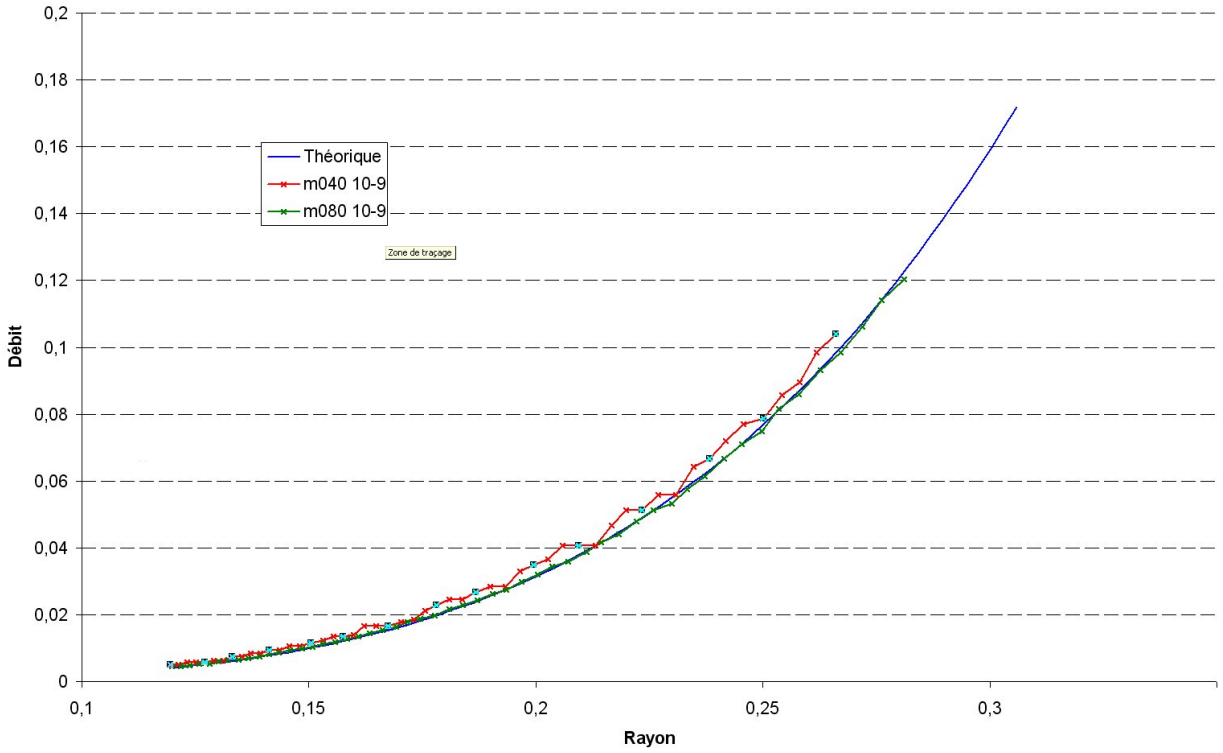


FIGURE 6.23 – *Courbe de comparaison du débit par rapport au rayon pour différents maillages*

6.1.2 Le cas de l'ensemble de la cellule d'essai

L'idée est ici de modéliser l'ensemble de la cellule du HET. La figure 6.24 montre à quoi ressemble ce banc d'essai.

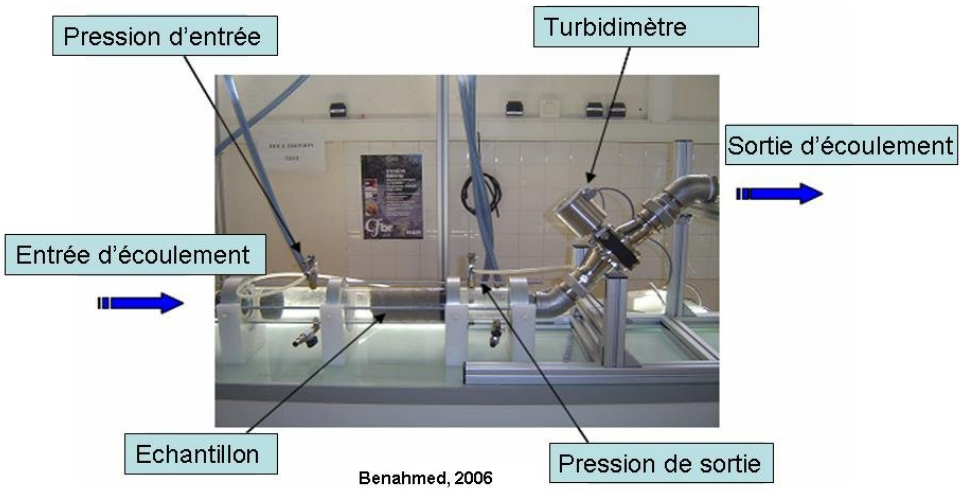


FIGURE 6.24 – *Photo du banc d'essai d'érosion interne de Nadia Benahmed*

On peut remarquer que la cellule comporte non seulement l'échantillon mais aussi des espaces remplis d'eau en amont et en aval. Ainsi le schéma du cas de calcul est donné sur la figure 6.25

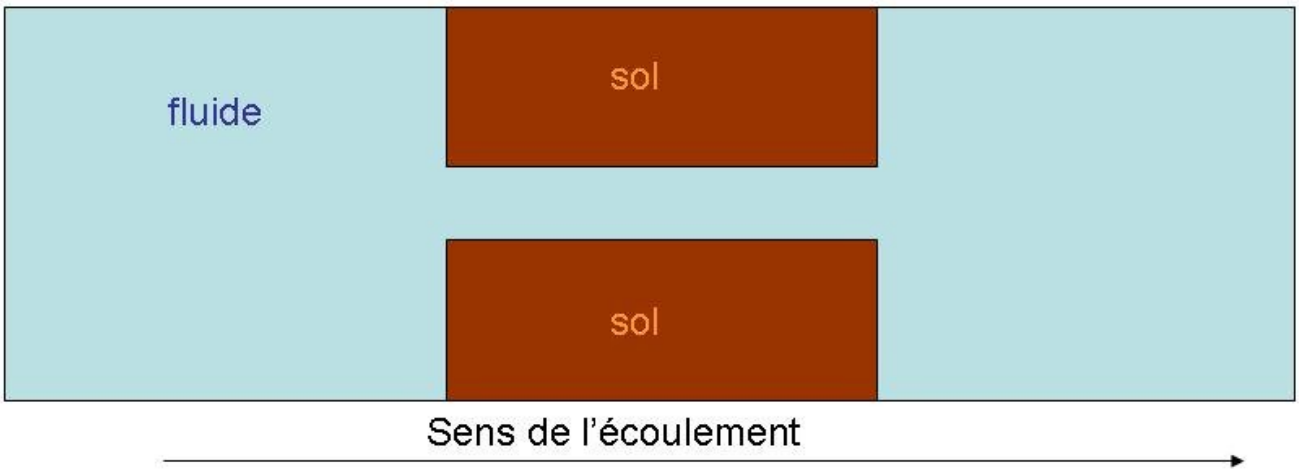


FIGURE 6.25 – *Schema du cas de calcul HET en 2D*

La différence principale entre ce cas et celui du canal est au niveau du profil de vitesse à l'entrée et à la sortie de l'échantillon. En effet, dans le cas du canal nous supposions cette vitesse comme purement normale au bord d'entrée, alors que dans ce cas nous nous attendons à un profil convergent. On utilise ici un maillage 450×60

L	H	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	$r_1 = r_2$
$0.45\ m$	$0.06\ m$	$100\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	100

K_s	k_{er}	τ_c
$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$	$10^{-20}\ Pa$

TABLE 6.4 – Paramètres de calcul

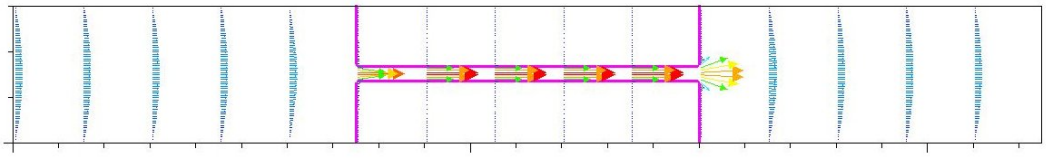


FIGURE 6.26 – *Résultat 2D initial*

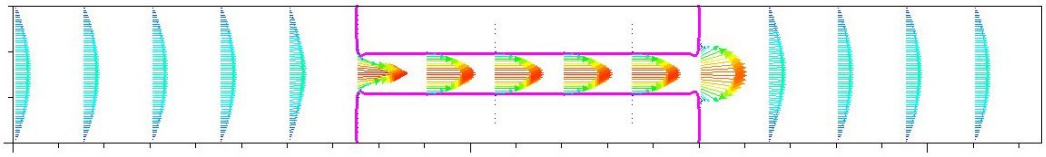


FIGURE 6.27 – *Résultat 2D à* $t = 6080s$

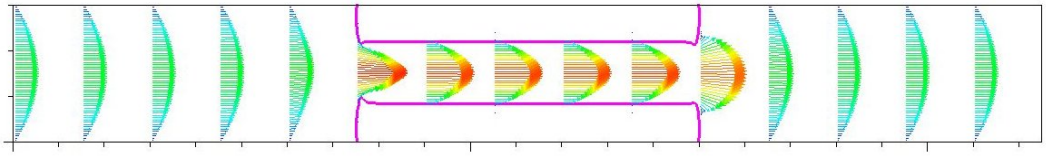


FIGURE 6.28 – *Résultat 2D à* $t = 8634s$

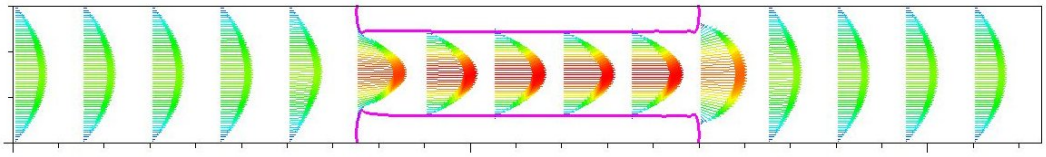


FIGURE 6.29 – *Résultat 2D à* $t = 10545s$

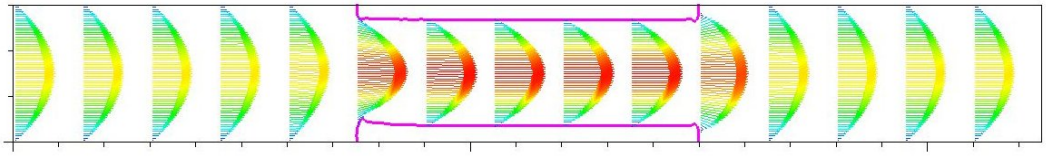


FIGURE 6.30 – *Résultat 2D à* $t = 12274s$

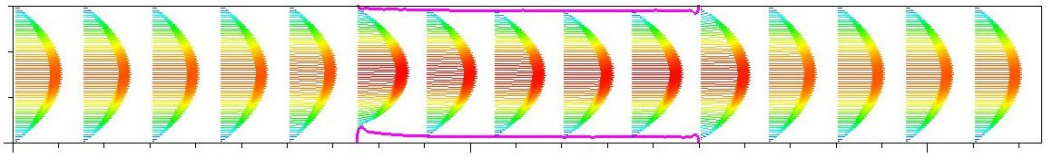


FIGURE 6.31 – *Résultat 2D à* $t = 14003s$

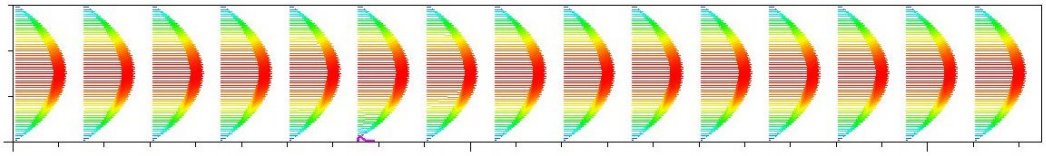


FIGURE 6.32 – *Résultat 2D à* $t = 15735s$

Comme pour le cas du carré (paragraphe 5.2), des instabilités apparaissent proches des angles et empêchent le système de rester absolument symétrique. Cependant, le profil de vitesse local à l'entrée et la sortie de l'échantillon ne semble pas avoir une influence majeure sur la vitesse d'érosion.

6.2 Suffusion

La suffusion est le détachement de particules fines de sol et le transport de ces particules par l'écoulement de l'eau entre les particules les plus grosses. A l'échelle macroscopique, ce phénomène est une érosion de volume et il est représenté par un terme source dans les équations de conservation de la masse. L'article de [Bonelli et Marot, 2009] propose un lien entre cette vision macroscopique et une érosion de surface comme il a été présenté jusqu'à présent.

Nous définissons donc trois domaines : le domaine représentant le sable non érodable (Ω_{sand}), le domaine représentant l'argile érodable (Ω_{clay}) et le reste du domaine représente les méso-pores (Ω_{pore}). Ces trois domaines sont une partition de Ω. On définit alors la fraction volumique de sable ϕ_{sand} et la fraction volumique d'argile ϕ_{clay}.

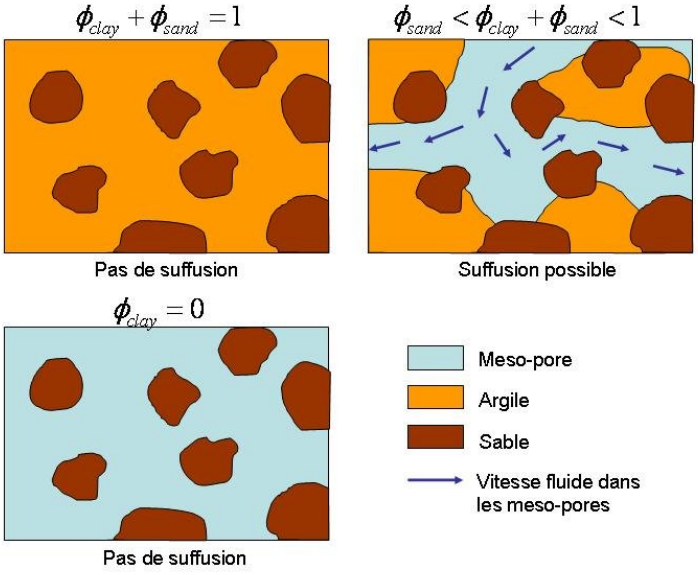


FIGURE 6.33 – *Situations d'apparition possible de la suffusion dans un sable argileux*

La figure 6.33 représente les différents cas d'agencement du sable, de l'argile et des méso-pores ainsi que de la possibilité d'apparition de la suffusion.

Une simulation numérique a été menée dans un cadre bi-dimensionnel se rapprochant des cas de sol pouvant être rencontrés. Une simulation tri-dimensionnelle serait plus rigoureuse, mais le coût en terme de temps de calcul est énorme, car l'écoulement est très complexe, même avec un écoulement de Stokes ; l'érosion est elle aussi complexe à cause de la multitudes d'interfaces disjointes. Un maillage fin est donc nécessaire et le temps de calcul explose.

Pour cette simulation les conditions d'homogénéisation périodique ont été utilisées afin de simuler un morceau de sol. On place aléatoirement 30 disques dans une cellule carrée afin d'obtenir une compacité du sol de $\phi_g^0 = 0.386$, permettant l'apparition de suffusion. Dans chacune de ces billes, des billes non érodables sont placées afin de simuler la matrice sableuse. La figure 6.34 montre la géométrie initiale du cas présenté. Les billes ont été choisies mono-disperses pour que les différents sols aléatoires générés soient plus facilement comparables.

Les paramètres physiques de l'érosion dans ce cas sont $k_{er} = 10^{-5}$ et $\tau_c = 1$. On appelle ϕ la compacité global du sol (argile+sable) variant au cours du temps et ϕ_s

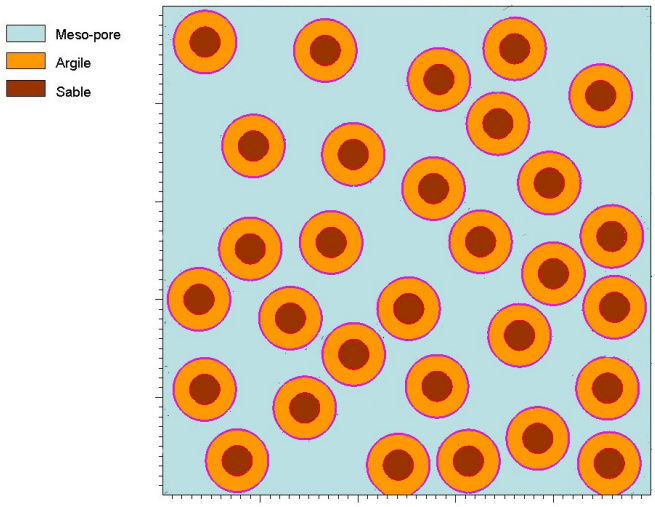


FIGURE 6.34 – *Schéma du cas test*

la fraction volumique du sable dans le volume total. Ainsi il est possible d'opérer un changement d'échelle sur ϕ pour observer son évolution dans $[0;1]$: $\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_s}{\phi_g^0}$. Dans cette représentation, $\tilde{\phi} = 1$ signifie que rien n'est érodé et $\tilde{\phi} = 0$ signifie que toute l'argile a été érodée. Le temps est adimensionné à l'aide du temps caractéristique d'érosion comme il est défini dans [Bonelli et Marot, 2009] : $t_{er} = \frac{\rho_g}{P_0 k_{er}}$ où P_0 est un gradient de pression de référence (ici $P_0 = 20$). Le maillage utilisé est 150×150

La cellule est soumise à plusieurs gradients de pression dont les codes se résument à :

- dp020 : gradient de pression de 20Pa
- dp030 : gradient de pression de 30Pa
- dp040 : gradient de pression de 40Pa
- dp050 : gradient de pression de 50Pa
- dp100 : gradient de pression de 100Pa

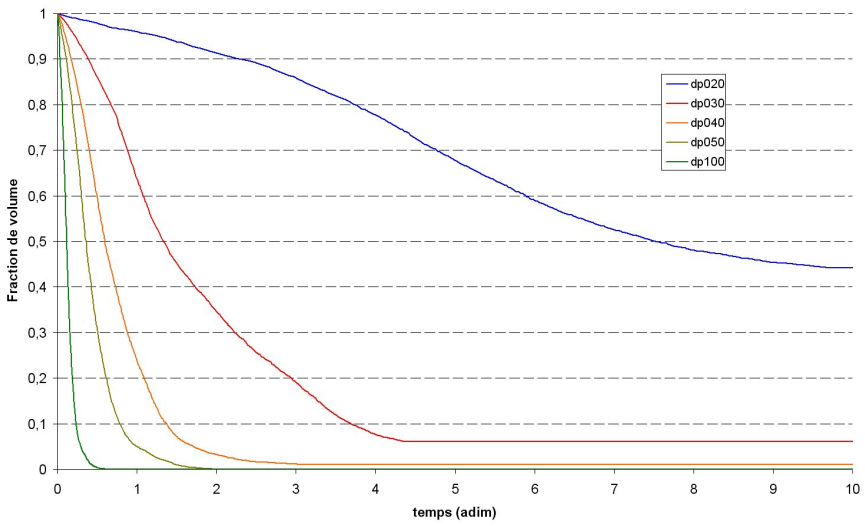


FIGURE 6.35 – *Évolution au cours du temps de $\tilde{\phi}$ pour les différents gradients de pression*

La figure 6.35 montre les évolutions de la fraction d'argile au cours du temps. L'érosion est plus rapide lorsque le gradient est plus fort, ce qui constitue un résultat attendu. De plus, il est à noter que l'érosion ne se stoppe pas aux mêmes étapes : seul le cas où le gradient de pression est de 100Pa érode toute l'argile. Pour tous les autres cas, l'écoulement est insuffisant pour éroder l'ensemble du matériau.

Ces résultats sont en accord avec la modélisation de Bonelli et les résultats expérimentaux de [Sterpi, 2003].

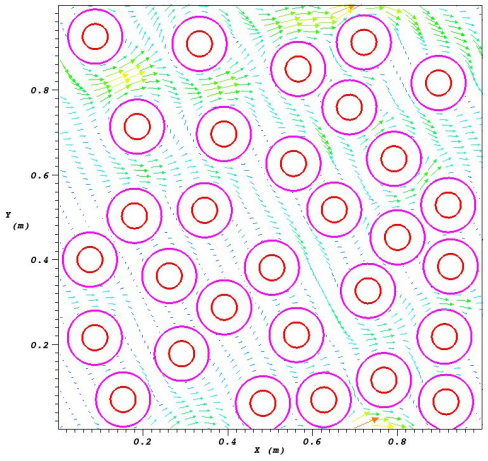


FIGURE 6.36 – *Cas dp030, solution initiale*

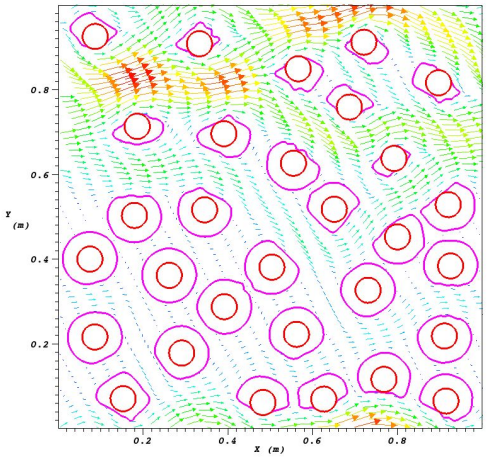


FIGURE 6.37 – *Cas dp030, solution à* $\tilde{t} = 1$

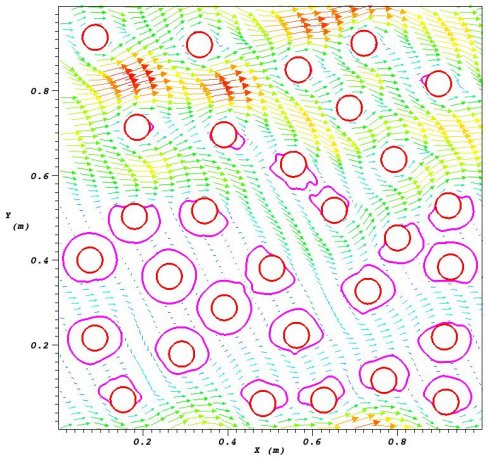


FIGURE 6.38 – *Cas dp030, solution à* $\tilde{t} = 1.71$

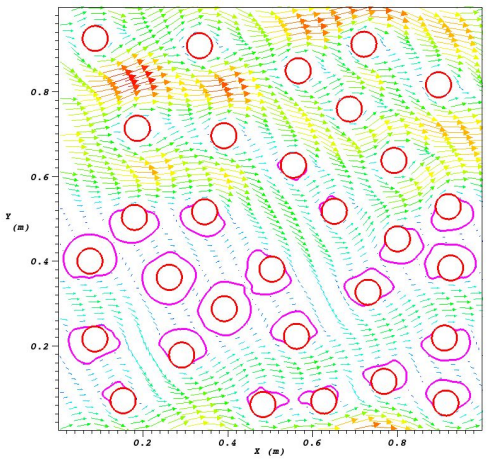


FIGURE 6.39 – *Cas dp030, solution à* $\tilde{t} = 2.36$

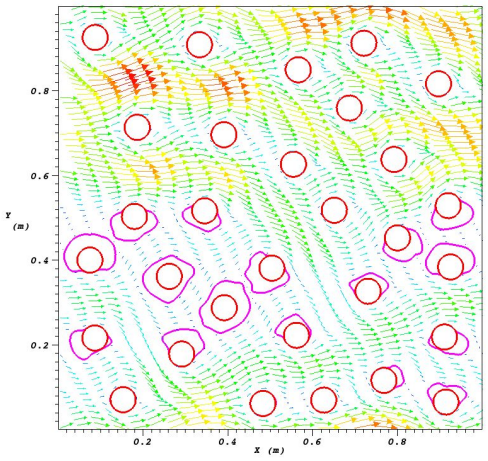


FIGURE 6.40 – *Cas dp030, solution à* $\tilde{t} = 3.05$

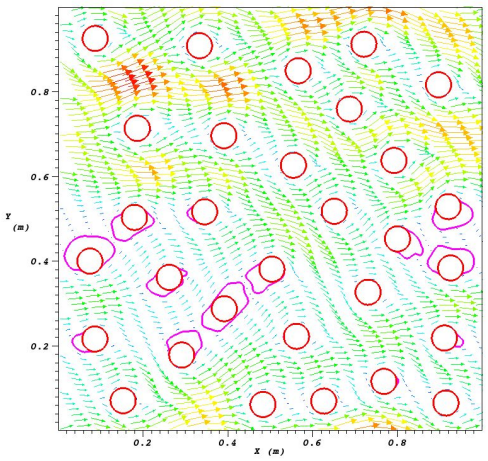


FIGURE 6.41 – *Cas dp030, solution à* $\tilde{t} = 3.75$

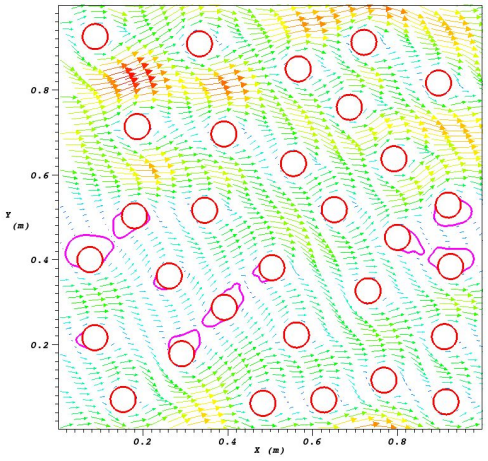


FIGURE 6.42 – *Cas dp030, solution à* $\tilde{t} = 10$

A la fin du calcul, l'interface est bien collée à la limite de la zone non érodable sur la plupart des particules. On remarque cependant, certains endroits qui n'ont pas été érodés et ne le seront jamais : ce sont des zones où la contrainte de cisaillement est trop faible et inférieure à la contrainte critique τ_c. Certaines zones sont au départ dans ce cas, mais l'érosion d'autres particules proches augmente localement l'écoulement jusqu'à ce que la contrainte de cisaillement dans ces zones devienne suffisante pour permettre l'érosion.

6.3 La pile de pont

Ce cas de calcul est très intéressant car il est purement 3D et fait intervenir les zones érodables et non érodables. Il s'agit d'un cylindre non érodable planté verticalement dans un sol érodable. Ce qui peut se voir comme une pile de pont plantée dans le lit d'une rivière. La méthode peut utiliser des formes plus complexes mais le temps de calcul augmenterait fortement, c'est pourquoi dans ce cas, nous utilisons des formes simples.

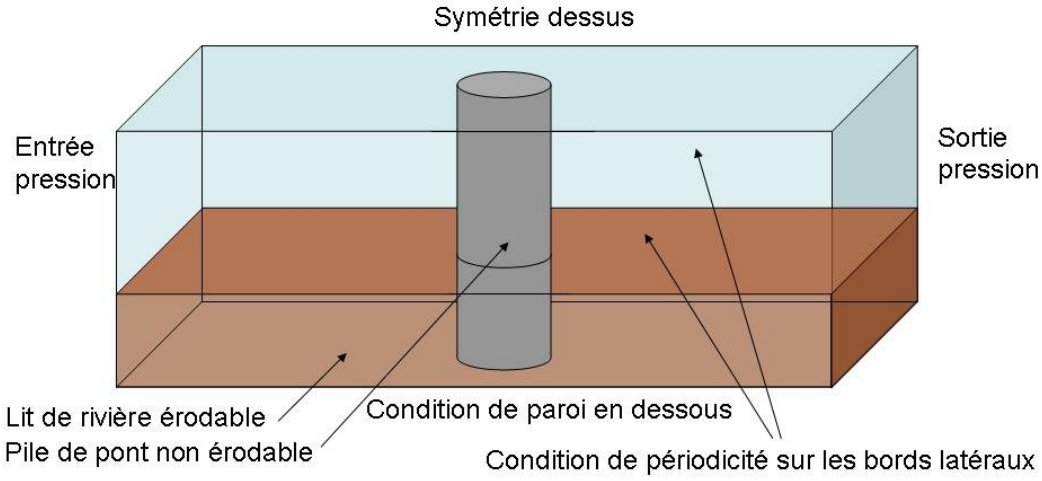


FIGURE 6.43 – *Schéma 3D du cas de calcul de la pile de pont*

Sur ce cas, il devient évident d'utiliser les deux fonctions Level Set afin de bien prendre en compte la zone non érodable située dans le lit de la rivière. De plus on met en lumière la capacité du solveur à combiner les différents types de conditions limites.

L	$H = W$	Δp	ρ_f	ρ_s	μ_f	$r_1 = r_2$
$2\ m$	$1\ m$	$0.1\ Pa$	$1000\ kg.m^{-3}$	$2700\ kg.m^{-3}$	$10^{-3}\ Pa.s$	10

K_s	k_{er}	τ_c
$10^{-7}\ m^2$	$10^{-3}\ s.m^{-1}$	$10^{-20}\ Pa$

TABLE 6.5 – Paramètres de calcul

Le maillage utilisé ici est $50 \times 25 \times 25$ pour un calcul avec un écoulement de Stokes stationnaire.

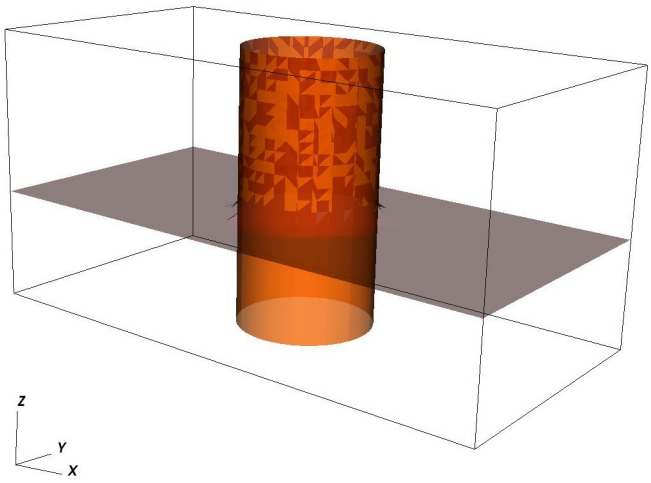


FIGURE 6.44 – *Résultat 3D initial*

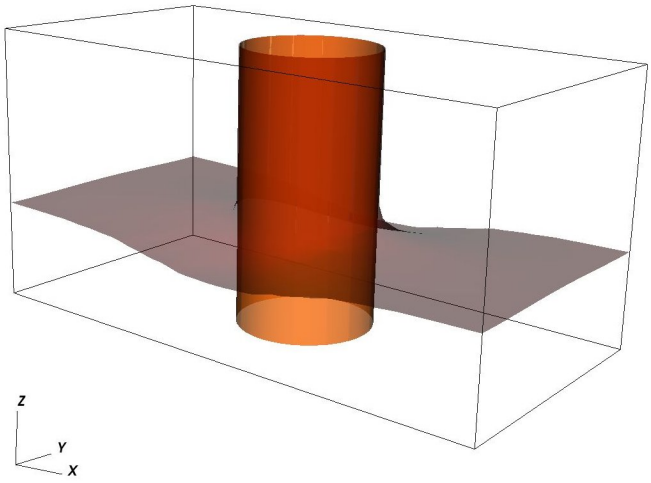


FIGURE 6.45 – *Résultat 3D à* $t = 1.9210^7 s$

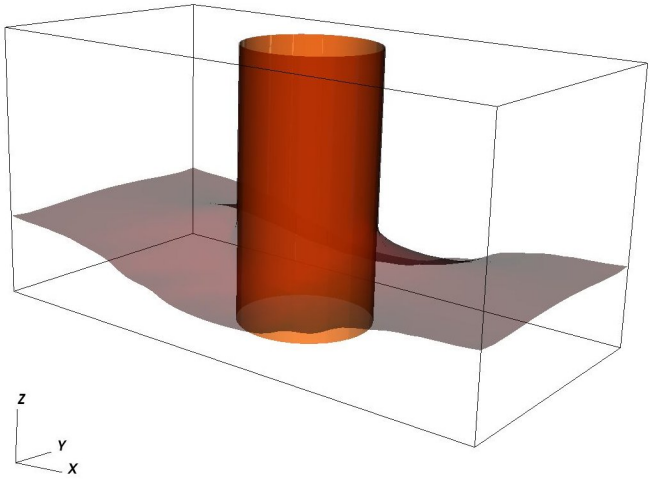


FIGURE 6.46 – *Résultat 3D à* $t = 4.2110^7 s$

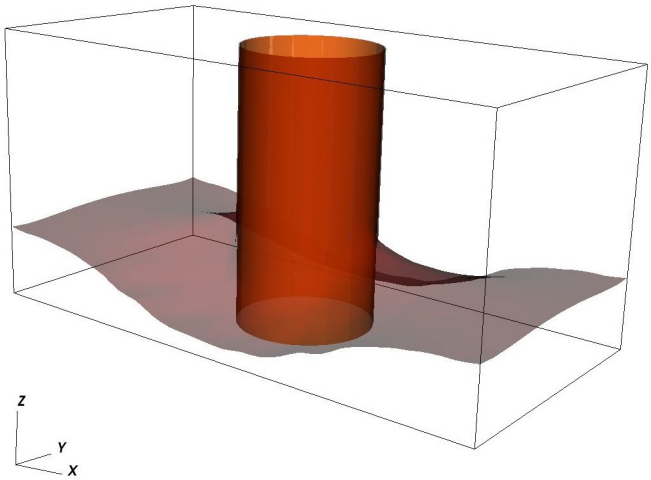


FIGURE 6.47 – *Résultat 3D à* $t = 5.5310^7 s$

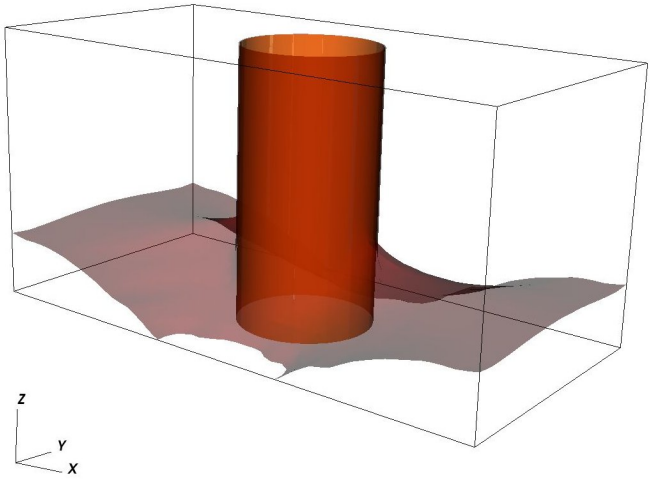


FIGURE 6.48 – *Résultat 3D à* $t = 6.6210^7 s$

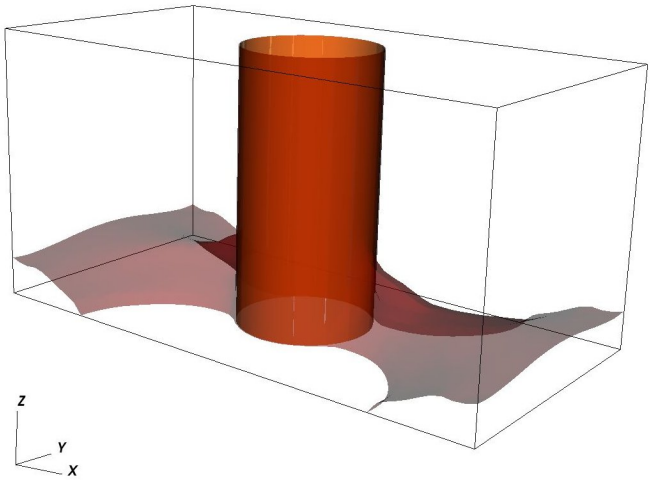


FIGURE 6.49 – *Résultat 3D à* $t = 9.4710^7 s$

Sur les résultats du pas $t = 6.62e7s$ plusieurs prises de vue en 3D isométrique ont été réalisées.

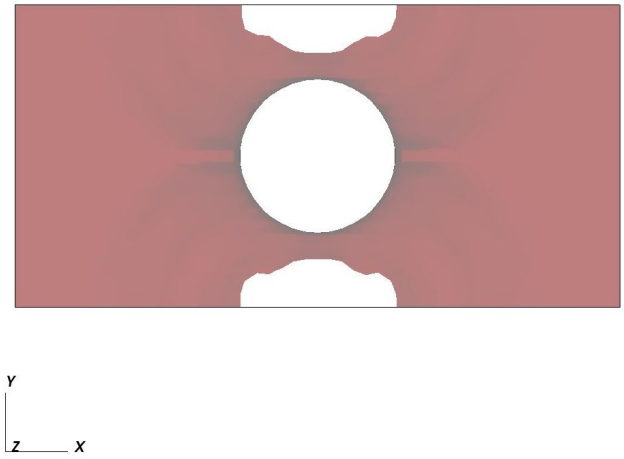


FIGURE 6.50 – *Résultat 3D à* $t = 6.6210^7 s$*, vue de dessus*

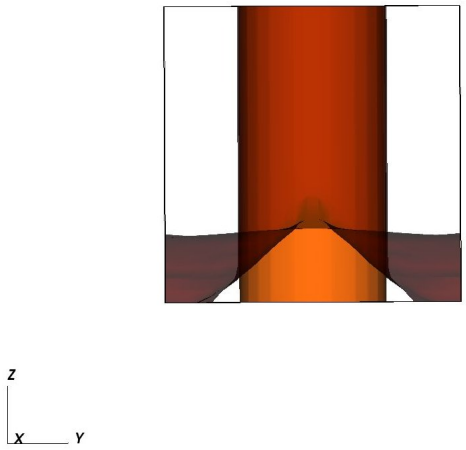


FIGURE 6.51 – *Résultat 3D à* $t = 6.6210^7 s$*, vue de face (par rapport à l'écoulement)*

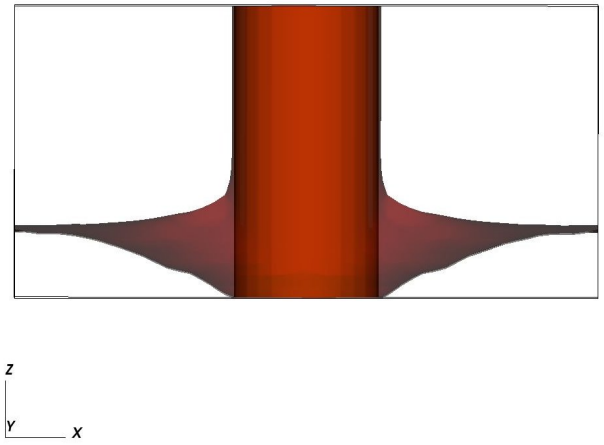


FIGURE 6.52 – *Résultat 3D à* $t = 6.6210^7 s$*, vue de coté*

6.4 Discussions et conclusions

Dans ce chapitre, Le schéma a été appliqué à trois cas d'érosion. Tout d'abord, l'érosion de tube, aussi appelé renard hydraulique, montre l'érosion d'une conduite de sol soumise à un écoulement tangentiel. Ce cas fait également l'objet de recherches expérimentales. Le fait que le schéma ne considère pas pour l'instant les phénomènes d'inertie et de turbulence ne nous permet pas de comparer les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux directement. Un bon accord avec la solution analytique semble montrer que le schéma fonctionne. L'érosion semble toutefois sous-évaluée par rapport à la solution analytique, mais un très bon accord d'évolution du débit en fonction du rayon montre que le calcul de l'écoulement est précis.

Le second cas de test est la suffusion, reprenant le principe de l'homogénéisation périodique sur un amas de billes. La représentation de l'évolution de la fraction volumique montre que sous différents gradients de pression, l'érosion peut emporter tout le matériau érodable ou bien n'éroder qu'une partie. L'écoulement s'adapte bien à la géométrie créant des zones de faible écoulement et donc de faible érosion.

Enfin, la dernière application concerne l'érosion d'un lit de rivière autour d'une pile de pont. Ce cas est simplifié, mais montre les possibilités du schéma de décrire l'évolution de géométries complexes, notamment dans la gestion des zones non-érodables influençant l'écoulement par l'utilisation de paramètres d'érosion dépendant de la position et l'utilisation d'une seconde fonction Level Set. Cette seconde fonction Level Set permet de conserver les zones non-érodables intactes au cours du calcul quelque soit le maillage utilisé.

Conclusion

Des chercheurs qui cherchent, on en trouve. Mais des chercheurs qui trouvent, on en cherche.
Charles De Gaulle (1890-1970)

Au cours de ces travaux, nous nous sommes attachés à développer des approches mathématiques et numériques spécifiques à l'érosion de surface pilotées par un écoulement tangentiel.

En particulier, nous les avons validées en étudiant la dynamique d'érosion d'un canal de sol soumis à un écoulement tangent. Ce mémoire s'est d'abord attaché à l'état de l'art en matière d'érosion notamment, aux travaux précédents ceux de ce mémoire, portant sur une modélisation axisymétrique de l'érosion d'une conduite. Ces travaux étaient basés sur des hypothèses fortes mais ont permis de mieux cerner les divers problèmes de modélisation. Notamment, au niveau de la représentation numérique d'une interface mobile, ce qui a fait l'objet d'une seconde partie dans ce mémoire. La représentation d'une interface entre deux milieux peut être abordée de différentes façons, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Au final, l'approche Level Set a été retenue pour cette étude. La partie suivante a traité de la manière de modéliser mathématiquement à la fois le sol et l'écoulement, basé sur les relations classiques en mécanique. Cette modélisation se base également sur les modélisations précédentes, décrites en première partie. Le développement de méthodes numériques de résolution a été abordé dans la partie suivante. La méthode retenue pour cette étude est la représentation volumes finis sur maillage décalé, pour sa robustesse et sa simplicité. La priorité de ce travail étant la représentation de l'érosion, les méthodes numériques employées pour résoudre l'écoulement se devaient d'être simples. Enfin une étape de validation et de test de l'ensemble du code numérique a été présentée. Cette étape a permit de déterminer certaines limites du modèle ainsi que certains problèmes de modélisation. En dernier lieu, trois cas d'application du modèle à des phénomènes physiques a été présentée. Ces applications ont montré une bonne réponse du modèle à ces sollicitations.

Un modèle d'interface mobile a été développé dans le cadre de l'érosion d'un sol par un écoulement. La difficulté de ce modèle est que le mouvement de l'interface est piloté par l'écoulement. De plus, connaître la position exacte de l'interface est primordial pour mesurer l'érosion. C'est pourquoi la méthode Level Set a été choisie : la position

de l'interface est connue avec précision, elle autorise des mouvements complexes et des changements de topologie de l'interface et son évolution peut dépendre des paramètres d'écoulement. Le modèle d'écoulement utilisé est resté simple pour des raisons de temps de calcul, mais le modèle a été développé dans l'optique d'avoir des écoulements plus complexes. La loi d'érosion utilisée est une loi classique et simple, mais là encore, la modélisation a été pensée pour permettre l'utilisation de lois améliorées.

Malgré ces simplifications, le modèle a été capable de décrire l'érosion de tube aussi bien en 2 dimensions qu'en 3 dimensions. Les écarts avec les précédentes modélisations semblent dus à de la diffusion numérique. Lors de changements d'échelle, il est possible de voir la suffusion comme une érosion de surface. Des tests ont donc été menés pour vérifier que numériquement il était possible de retrouver ce résultat. Les évolutions obtenues sont, là encore en bon accord avec les solutions analytiques. Un dernier cas d'application a été mené, représentant l'érosion d'un lit de rivière autour d'une pile de pont.

Pour autant, ce travail a mis en lumière certains paramètres capitaux dans la modélisation de l'érosion. Tout d'abord le coefficient d'érosion ; les études précédentes ont montré qu'un trop fort coefficient d'érosion nécessitait une approche différente de la modélisation, cette étude a montré que pour un coefficient d'érosion suffisamment petit, il était possible de s'affranchir du caractère instationnaire de l'écoulement. En effet, lorsque le coefficient d'érosion est suffisamment petit, les vitesses d'évolution de l'interface et d'écoulement sont suffisamment différentes pour découpler les deux phénomènes. Le paramètre de pénalisation (assimilable à une perméabilité du milieu sol) quant à lui semble n'avoir que peu d'influence sur l'érosion. Il suffit de le prendre suffisamment petit pour garder l'hypothèse d'un écoulement quasi nul dans le sol.

Des difficultés et instabilités ont été rencontrées au cours de ce travail. Ces principales difficultés ont concerné la partie numérique, notamment le réglage des paramètres du solveur, à savoir les coefficients de Lagrangien. Ces paramètres influent directement sur la qualité et le temps de résolution de l'écoulement. Le calcul rigoureux des ces paramètres est fortement dépendant du problème à modéliser et aussi de la géométrie initiale choisie. Malgré les algorithmes d'auto-adaptation de ces paramètres, leur réglage requière de la patience. Une autre difficulté rencontrée a été le temps de calcul, l'utilisation des équations de Navier-Stokes instationnaire en formulation semi-implicite demande un calcul sur des pas de temps très petits. Du coup un très grand nombre de pas de calcul d'écoulement sont nécessaires au cours d'un seul pas d'érosion. Le temps de calcul devient déraisonnable (de l'ordre du mois pour seulement quelques pas d'érosion). D'autres problèmes sont survenus liés au calcul de la contrainte à l'interface. Le raffinement de maillage a amélioré ces problèmes sans les résoudre franchement, au prix d'une forte augmentation du temps de calcul. Ce raffinement concerne l'ensemble du maillage alors que seul un raffinement local proche de l'interface serait nécessaire.

Perspectives

Aux vues des difficultés rencontrées, il sera nécessaire pour l'avenir de procéder à des améliorations du modèle. De plus certains phénomènes ont été négligés dans ce travail

et devront être rajoutés pour une modélisation plus fine de l'ensemble du processus d'érosion.

Calcul de la contrainte

Parmi les problèmes à résoudre, le calcul de la contrainte à l'interface semble l'un des plus importants. En effet, ce calcul conditionne l'évolution de l'interface par érosion. Un effort doit donc être porté sur cette partie. Parmi les pistes à explorer, un modèle capable d'utiliser un raffinement local du maillage semble une bonne approche. Il a pu être constaté que l'erreur commise dépendait de la taille des mailles proches de l'interface. Cependant, le simple raffinement ne fera, semble-t-il, qu'atténuer les instabilités constatées. Un calcul différent de cette contrainte sera sans doute nécessaire à l'aide d'une interpolation ou d'une autre méthode restant à découvrir.

Amélioration du modèle d'écoulement

Le modèle de pénalisation semble une bonne approche pour modéliser nos milieux, mais le temps de calcul du modèle Navier-Stokes complet est déraisonnable. L'amélioration de ce modèle, par exemple par une approche implicite, doit conduire à une meilleure évaluation des phénomènes d'érosion. De nombreuses méthodes ont déjà fait l'objet d'études poussées, et d'autres sont encore à l'étude ; l'utilisation d'une méthode de calcul des écoulements plus performante permettra l'utilisation des modèles complets, incluant la turbulence.

Prise en compte du caractère diphasique des milieux

Un hypothèse forte dans notre modélisation a été de considérer des milieux homogénéisés tant pour le sol que pour l'écoulement. Afin d'obtenir une modélisation plus fine de l'érosion, il devra être développé un modèle gardant le caractère diphasique eau+particules des deux milieux. Cette modélisation influera non seulement sur l'écoulement en lui-même mais aussi, sûrement, sur la valeur de la contrainte de cisaillement à l'interface. Cette modélisation devra rendre possible l'utilisation de fort coefficients d'érosion capable d'atteindre l'état de suspension dense.

Comparaison directe à l'expérimental

Le modèle présenté étant encore trop simplificateur par rapport à tous les phénomènes observés dans les expérimentations, tant dans les cellules d'essais que dans les expérimentations à échelle réelle, une comparaison directe aux résultats de mesure n'aurait pas été pertinente. La perspective à très court terme consiste à implémenter les phénomènes inertiels et turbulents afin de valider la modélisation. Cette validation permettra alors des calculs originaux sur l'ouverture d'une brèche dans l'ouvrage.

Amélioration de la loi d'érosion

Grâce à ces modélisations plus fines et la comparaison aux résultats expérimentaux, il devra être possible de définir une loi d'érosion plus précise. Notamment prenant en compte le fait que les particules se détachent du sol de manière quelconque et seulement dans la direction normale à l'interface. Il a été évoqué que l'érosion pouvait se déclencher à cause des variations locales de pression dans un écoulement turbulent. Une loi d'érosion plus complète semble nécessaire à la description fine du processus global.

Bibliographie

[Andréotti, 2004] Andréotti, B. (2004). A two-species model of aeolian sand transport. *Journal of Fluid Mechanics*, 510.

[Angot, 2005] Angot, P. (2005). A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions. *Compte-rendus de l'académie des sciences de Paris*, I341:683–688.

[Angot *et al.*, 1999] Angot, P., Brunneau, C.-H. et Fabrie, P. (1999). A pénalisation method to take into account obstacles in incompressible visous flows. *Numerishe Mathematik*, 81:497–520.

[Annandale, 2007] Annandale, G. (2007). How does water-soil interaction lead to erosion ? *In Geo-Denver 2007 : New Peaks in Geotechnics.*

[Ariathurai et Arulanandan, 1986] Ariathurai, R. et Arulanandan, K. (1986). Erosion rates of cohesive soils. *Journal of the Hydraulics Division ASCE*, 104(2):279–283.

[Bang et Lukkassen, 1999] Bang, B. et Lukkassen, D. (1999). Application of homogenization theory related to stokes flow in porrous media. *Application of mathematics*, 44(4):309–319.

[Barenblatt, 1999] Barenblatt, G. (1999). Scaling laws for turbulent wall-bounded shear flows at very large reynolds numbers. *Journal of Engineering Mathematics*, 36.

[Barenblatt *et al.*, 1997] Barenblatt, G., Chorin, A. et Prostokishin, V. (1997). Scaling laws for fully developed turbulent flow in pipes. *Applied Mechanics Reviews*, 50(7):413–429.

[Bonelli, 2003] Bonelli, S. (2003). Comportement d'un mélange diphasique fluide-particules solides. *Cemagref document interne*, pages 1–26.

[Bonelli, 2008] Bonelli, S. (2008). *Géomécanique et Erosion Application aux digues et aux barrages.* Habilitation à diriger des recherches, Université de la Méditerranée.

[Bonelli et Brivois, 2007] Bonelli, S. et Brivois, O. (2007). The scaling law of the hole erosion test with constant pressure drop. *International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics*, 32:1573–1595.

[Bonelli *et al.*, 2006] Bonelli, S., Brivois, O. et Benahmed, N. (2006). Modeling of the hole erosion test. *Cemagref document interne*, pages 1–50.

[Bonelli et Marot, 2009] Bonelli, S. et Marot, d. (2009). On the modelling of a suffusion as an interfacial erosion process. *Compte Rendus géosciences*, accepted.

[Brivois, 2005] Brivois, O. (2005). *Contribution à la modélisation de l'érosion de forte pente par un écoulement turbulent diphasique.* Thèse de doctorat, Université d'Aix-marseille II.

[Cermelli *et al.*, 2005] Cermelli, P., Fried, E. et Gurtin, M. (2005). Transport relations for surface integrals arising in the formulation of balance laws for evolving fluid interfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 544:339–351.

[Chanson, 1999] Chanson, H. (1999). *The hydraulics of Open channel flows : an introduction.* Butterworth-Heinemann, Oxford U.K.

[Chantalat *et al.*, 2009] Chantalat, F., Bruneau, C.-H., Galusinski, C. et Iollo, A. (2009). Level-set, penalization and cartesian meshes : A paradigm for inverse problems and optimal design. *Journal of Computational Physics*, 228.

[Chorin, 1980] Chorin, A. (1980). Flame advection and propagation algorithms. *Journal of computational physics*, 35:1–11.

[Coirier et Nadot-Martin, 2007] Coirier, J. et Nadot-Martin, C. (2007). *Mécanique des milieux continus.* Dunod, 3ème Edition.

[Couderc, 2007] Couderc, F. (2007). *Développement d'un code de calcul pour la simulation d'écoulement de fluides non miscibles. Application à la désintégration assistée d'un jet liquide par un courant gazeux.* Thèse de doctorat, ENSAE - Toulouse.

[Daly *et al.*, 1965] Daly, B., Harlow, F., Shannon, J. et Welch, J. (1965). The mac method. Technical repport LA-3425, Los Alamos Scientific Laboratory, University of California.

[Daly et Pracht, 1967] Daly, B. et Pracht, A. (1967). Numerical study of density current surges. *Physics of Fluids*, 11:15–30.

[DeBar, 1974] DeBar, R. (1974). A method in two-d eulerian hydrodynamics. Technical report UCID-19683, Lawrence Livermore National Laboratory.

[Fortin et Glowinski, 1982] Fortin, M. et Glowinski, R. (1982). *Méthode de Lagrangien Augmenté - Application à la résolution numérique de problèmes aux limites.* Méthode Mathématiques de l'Informatique.

[Foster et Fell, 2001] Foster, M. et Fell, R. (2001). Assessing embankment dam filters that do not satisfy design criteria. *Journal of Geotechnical and geoenvironmental engineering*, 125(7):398–407.

[Frenette, 1996] Frenette, R. (1996). *Modélisation tridimentionnelle par éléments finis du transport des sédiments dans les cours d'eau.* Thèse de doctorat, Laval U., Quebec.

[Fried et Gurtin, 2004] Fried, E. et Gurtin, M. (2004). A unified treatment of evolving interfaces accounting for deformation and atomic transport with an emphasis on grain-boundaries and epitaxy. *Advances in Applied Mechanics*, 40:1–177.

[Fried et Shen, 1999] Fried, E. et Shen, A. (1999). Generalization of the stefan model to allow for both velocity and temperature jumps. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 11:277–296.

[Fry, 1997] Fry, J. J. (1997). *(coord.) Internal erosion : Typology, Detection, Repair*, volume 6 de *Barrages&reservoir.* Comité français des grands barrages, Le bourget du Lac.

[Germain *et al.*, 1983] Germain, P., Nguyen, Q. et Suquet, P. (1983). Continuum Thermodynamics. *Journal of Applied Machanics*, 50:1010–1020.

[Gilbert, 1987] Gilbert, F. (1987). *Descriptions thermo-mécaniques de milieux à plusieurs constituants et application aux milieux poreux saturés.* Thèse de doctorat, Université Paris VI.

[Glowinski *et al.*, 2001] Glowinski, R., Pan, T., Hesla, T., Joseph, D. et Périaux, J. (2001). A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : application to particulate flow. *Journal of computationnal physics*, 169:363–426.

[Graf, 1971] Graf, W. (1971). *Hydraulics of Sediment Transport.* McGraw-Hill.

[Graziano et Marasco, 2001] Graziano, L. et Marasco, A. (2001). Balance laws for continua with an interface deduced from multiphase continuous models with a transition layer. *International Journal of Engineering Science*, 39(8):873–896.

[Harlow et Welch, 1965] Harlow, F. et Welch, J. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189.

[Hirt et Nichols, 1981] Hirt, C. et Nichols, B. (1981). Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computationnal physics*, 39:201–225.

[Hogg et Pritchard, 2004] Hogg, A. et Pritchard, D. (2004). The effect of hydrolic resistance on dam-break and other shallow intertial flows. *Journal of Fluid Machanics*, 501:179–212.

[Jackson, 2000] Jackson, R. (2000). *The dynamics of fluidized particles.* Cambridge University Press.

[Jamali, 2006] Jamali, M. (2006). A coupled boundary element-finite difference model of surface wave motion over a wall turbulent flow. *Int. journal for numerical methods in fluids*, 51:371–383.

[Jiang et Shu, 1996] Jiang, Y. et Shu, C. (1996). Efficient implementation of weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computationnal Physics*, 126:202–208.

[Julien, 1994] Julien, P.-Y. (1994). *Erosion and Sedimentation.* Cambridge university press.

[Knapen *et al.*, 2007] Knapen, A., Poesen, J., Govers, G., Gyssels, G. et Nachtergaele, J. (2007). Resistance of soils to concentrated flow erosion : A review. *Earth-Science Reviews*, 80:75–109.

[Lachouette *et al.*, 2007] Lachouette, D., Bonelli, S. et Brivois, O. (2007). Dense pipping flow with erosion. *In Congrès français de mécanique*, Grenoble.

[Lachouette *et al.*, 2008] Lachouette, D., Golay, F. et Bonelli, S. (2008). One-dimentional modeling of piping flow erosion. *C.R. mecanique*, 336:731–736.

[Lagrée, 2000] Lagrée, P. Y. (2000). Erosion and sedimentation of a bump in fluvial flow. *C. R. Acad. Sci.*, 328(IIb):869–874.

[Landau et Lifchitz, 1980] Landau, L. et Lifchitz, E. (1980). *Fluid Mechanics.* Pergamon Press, Oxford.

[Lhuillier, 2003] Lhuillier, D. (2003). A mean-field description of two-phase flows with phase changes. *nternational Journal of Multiphase Flows*, 29:511–525.

[Liu *et al.*, 1994] Liu, X.-D., Osher, S. et Chan, T. (1994). Weighted essentially non oscillatory schemes. *journal of Computational physics*, 115:200–212.

[Løvoll et Vaskin, 2003] Løvoll, A. et Vaskin, K. (2003). Data report no. 5, large scale field test 2003. Rapport technique, IMPACT (Investigation of Extreme Flood Process and Uncertainty) FP5 European Project.

[Maitre, 2006] Maitre, E. (2006). Review of numerical methods for free interface. *In Ecole thematique*, pages 1–28, Les houches.

[Marigo, 1985] Marigo, J. (1985). Loi de bilan en thermomécanique des milieu continus. *E.D.F. Bulletin de la direction des études et recherches*, Série C, Mathématique, informatique n°2:5–46.

[Massoudi *et al.*, 1999] Massoudi, M., Rajagopal, K. et Phuoc, T. (1999). On the fully developed flow of a dense particulate mixture in a pipe. *Powder Technology*, 104:258–268.

[Mitchener et Torfs, 1995] Mitchener, H. et Torfs, H. (1995). Erosion of mud/sand mixtures. *Coastal Engineering*, 29:1–25.

[Morland et Sellers, 2001] Morland, L. et Sellers, S. (2001). Multiphase mixtures and singular surfaces. *International Journal of non-linear mechanics*, 36:131–146.

[Nigmatulin, 1990] Nigmatulin, R. (1990). *Dynamics of multiphase media.* Book news, Inc Portland.

[Noh et Woodward, 1976] Noh, W. et Woodward, P. (1976). Slic (simple line interface calculation). *In* Springer-Verlag, éditeur : *Proceedings of the Fifth international Conference on Numerical methods in fluid dynamics*, volume 59, pages 330–340, New-York.

[Osher et Sethian, 1981] Osher, S. et Sethian, J. (1981). Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithm fot tracking material interface. *journal of Computational physics*, 39:201–225.

[Ouriemi, 2007] Ouriemi, M. (2007). *Erosion, transport et instabilités d'un lit de particules dans un tube.* Thèse de doctorat, Université de provence, école doctorale Physique, modélisation et Sciences pour l'ingénieur.

[Papamichos *et al.*, 2006] Papamichos, E., Desmorat, R. et Vardoulakis, I. (2006). Geomechanical and structural issues in energy production. *Special Iissue of European Journal of Civil Engineering, Hermes.*

[Papamichos et Vardoulakis, 2005] Papamichos, E. et Vardoulakis, I. (2005). Sand erosion with a porosity diffusion law. *Computers and Geotechnics*, 32:47–58.

[Papamichos *et al.*, 2001] Papamichos, E., Vardoulakis, I., Tronvoll, J. et Skjaerstein, A. (2001). A. volumetric sand production model and experiment. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics*, 25:789–808.

[Parker et Youngs, 1992] Parker, B. et Youngs, D. (February 1992). two and tree dimensional Eulerian simulation of fluid flow with material interfaces. *UK Atomic Weapons Establisment, Aldermaston, Berkshire*, Technical report 01/92.

[Partheniades, 1965] Partheniades, E. (1965). Erosion and deposition of cohesive soils. *Journal of the Hydraulics Division ASCE*, 91:105–139.

[Pilliod Jr, 1992] Pilliod Jr, J. E. (September 1992). *an analysis of piecewise linear interface reconstruction algorithms for volume-of-fluid method.* Thèse de doctorat, University of California.

[Pilliod Jr et Puckett, 2004] Pilliod Jr, J. E. et Puckett, E. G. (2004). Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces. *journal of Computational physics*, 199:465–502.

[Puckett, 1991] Puckett, E. G. (1991). A volume-of-fluid interface tracking algorithm with applications to computing shock wave refraction. *H.dwyer, Proceeding of the fourth international symposium on computational fluid dynamics, Davis, CA*, pages 933–938.

[Rajagopal et Tao, 1995] Rajagopal, K. et Tao, L. (1995). *Mechanics of mixtures.* World Scientific, River Edge, NJ.

[Ramière *et al.*, 2007] Ramière, I., Angot, P. et Belliard, M. (2007). A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computeur methods in applied mechanics and engineering*, 196:766–781.

[Raudkivi, 1998] Raudkivi, A. J. (1998). *Loose Boundary hydraulics*. A. A. Balkema/-Rotterdam/Brookfield.

[Roma *et al.*, 1999] Roma, A. M., Peskin, C. S. et Berger, M. J. (1999). An adaptative version of the immersed boundary method. *Journal of computational physics*, 153(jcph.1999.6293):509–534.

[Savioli, 2000] Savioli, J. C. (2000). *Turbulence and sediment transport : a numerical investigation*. Thèse de doctorat, University of Twente, THe netherlands.

[Sethian, 1996] Sethian, J. A. (1996). A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. Nat. Acad. Sci. - Applied Mathematics*, 93(4):1591–1595.

[Shu et Osher, 1989] Shu, C. et Osher, S. (1989). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, 2. *Journal of computational physics*, 83:32–78.

[Singh, 1996] Singh, V. (1996). *Dam breach modelling technology*. Water Science and Technology Library. Kleiwer Academic Publishers.

[Sleijpen et R., 1993] Sleijpen, G. L. et R., F. D. (1993). Bicgstab (l) for linear eqations involving unsymetric matrices with complex spectrum. *Electronic Transactions on numerical analysis*, 1:11–32.

[Sterpi, 2003] Sterpi, D. (2003). Effects of the erosion and transport of fine perticles due to seepage flow. *International journal of Geomechanics*, 3(1):111–122.

[Sussman *et al.*, 1994] Sussman, M., Smereka, P. et Osher, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flows. *journal of Computational physics*, 114:146–159.

[Tsitsiklis, 1995] Tsitsiklis, J. N. (1995). Efficient algorithms for globally optimal trajectories. *IEEE Transportation automated control*, 40(9):1528–1538.

[Van der Vorst, 1992] Van der Vorst, H. A. (1992). Bi-cgstab : a fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2):631–644.

[Vander Meûlen, 2006] Vander Meûlen, R. (2006). *The immersed boundary method for the (2D) incompressible Navier-Stokes equations*. Thèse de doctorat, Delft university of technology.

[Vardoulakis, 2004] Vardoulakis, I. (2004). Fluidization in artesian flow conditions : Ii. hydro-mechanically unstable granular media. *Géotechnique*, 54:165–177.

[Vardoulakis *et al.*, 2001] Vardoulakis, I., P., P. et Stavropoulou, M. (2001). Sand erosion in axial flow conditions. *Transport in Porous Media*, 45:267–281.

[Vardoulakis *et al.*, 1996] Vardoulakis, I., Stavropoulou, M. et P., P. (1996). Hydromechanical aspects of sand production problem. *Transport in Porous Media*, 22:225–244.

[Vigneaux, 2007] Vigneaux, P. (2007). *Méthodes Level Set pour des problèmes d'interface en microfluidique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeau I.

[Vincent, 1999] Vincent, S. (1999). *Modélisation d'écoulements incompressibles de fluide non-miscibles*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

[Vincent et Caltagirone, 2000] VINCENT, S. et CALTAGIRONE, J. (2000). A one-cell local multigrid method for solving unsteady incompressible multiphase flows. *Journal of computational Physics*, 163.

[Vincent *et al.*, 2004] VINCENT, s., CALTAGIRONE, j.-P., LUBIN, p. et RANDRIANARIVELO, T. N. (2004). an adaptative augmented lagrangian methode for three-dimentional multimaterial flows. *Computers and fluids*, 33:1273–1289.

[Wan et Fell, 2004a] WAN, C. et FELL, R. (2004a). Investigation of rate of erosion of soils in embankment dams. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130-4:373–380.

[Wan et Fell, 2004b] WAN, C. et FELL, R. (2004b). Laboratory Tests on the Rate of Piping Erosion of Soils in Embankment Dams. *Journal of Geotechnical Testing Journal*, 27-3.

[Yalin, 1977] YALIN, M. (1977). *Mechanics of sediment transport.* 3rd Ed. McGraw-Hill.

[Zalesak, 1978] ZALESAK, S. (1978). Fully multidimensional flux-corrected transport. *Technical repport.*

[Zhu *et al.*, 2001] ZHU, J., GANTZER, C., ANDERSON, S., PEYTON, R. et ALBERTS, E. (2001). Comparison of concentrated-flow detachment equations for low shear stress. *Soil & Tillage Research*, 61:203–212.