Modélisation et simulation numériques de l'érosion par méthode DDFV

Jalal Lakhlili

▶ **To cite this version:**

Jalal Lakhlili. Modélisation et simulation numériques de l'érosion par méthode DDFV. Physique mathématique [math-ph]. Université de Toulon, 2015. Français. NNT : 2015TOUL0013 . tel-01234291v2

HAL Id: tel-01234291

https://hal.science/tel-01234291v2

Submitted on 24 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE TOULON

ÉCOLE DOCTORALE Mer et Sciences (ED548)

Institut de Mathématiques de Toulon

THÈSE présentée par :

Jalal LAKHLILI

soutenue le : **20 novembre 2015**

pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques Appliquées

Spécialité : Calcul Scientifique

Modélisation et simulation numériques de l'érosion par méthode DDFV

THÈSE dirigée par :

M. GALUSINSKI Cédric	Professeur, Université de Toulon
M. GOLAY Frédéric	Maître de conférence HDR, Université de Toulon

JURY :

M. BONELLI Stéphane	Directeur de Recherche, Irstea Aix-en-Provence
Mme. HUBERT Florence	Maître de conférence HDR, Aix - Marseille Université
M. ANGOT Philippe	Professeur, Aix - Marseille Université
Mme. KRELL Stella	Maître de conférence, Université de Nice Sophia Antipolis
M. GALUSINSKI Cédric	Professeur, Université de Toulon
M. GOLAY Frédéric	Maître de conférence HDR, Université de Toulon

Table des matières

Introduction **11**

1 État de l'art et modélisation **13**

1.1 Le contexte . . . 13

1.1.1 Origines et typologie de l'érosion . . . 15

1.1.2 Les mécanismes élémentaires . . . 16

1.2 Modélisation de l'érosion . . . 18

1.2.1 Hypothèses . . . 18

1.2.2 Modélisation des milieux . . . 19

1.2.3 La loi d'érosion . . . 20

1.2.4 Modélisation numérique . . . 22

1.3 Organisation du calcul . . . 24

1.4 Conclusion . . . 25

2 Suivi d'interface par Level Set **27**

2.1 Méthodes de suivi d'interface . . . 27

2.2 La fonction Level Set . . . 28

2.2.1 Définition . . . 28

2.2.2 L'équation de transport . . . 29

2.2.3 Propriétés . . . 29

2.3 Résolution numérique de l'équation de transport . . . 30

2.3.1 Discrétisations de l'équation . . . 31

2.3.2 Montée en ordre . . . 32

2.4 Tests et validations . . . 34

2.4.1 Translation diagonale d'un cercle . . . 34

2.4.2 Compression/décompression d'un cercle . . . 35

2.4.3 Rotation d'une sphère . . . 36

2.4.4 Disque de Zalesak . . . 38

2.5 Application à l'extension des vitesses . . . 40

2.6 Redistanciation . . . 42
2.6.1 Équation de redistanciation . . . 43
2.6.2 Exemple de redistanciation . . . 44
2.7 Conclusion . . . 46

3 Schémas et maillages DDFV 47
3.1 Définitions et notations . . . 48
3.1.1 Construction du maillage . . . 48
3.1.2 Volumes de contrôle . . . 52
3.1.3 Normales extérieures aux volumes . . . 54
3.2 Espaces discrets . . . 58
3.3 Opérateurs discrets . . . 60
3.3.1 Le gradient discret . . . 60
3.3.2 La divergence discrète . . . 60
3.3.3 Opérateur de trace discrète . . . 61
3.3.4 Assemblage des opérateurs discrets . . . 61
3.4 Formules de Green discrètes . . . 62
3.5 Validations numériques . . . 64
3.5.1 Gradients et divergences . . . 65
3.5.2 Rotationnels . . . 67
3.5.3 Laplaciens . . . 68
3.5.4 Visualisations . . . 74
3.6 Conclusion . . . 77

4 Écoulements fluides incompressibles 79
4.1 Équation de Stokes . . . 80
4.1.1 Discrétisation temporelle . . . 80
4.1.2 Algorithme de résolution . . . 81
4.1.3 Discrétisation spatiale . . . 88
4.2 Équation de Navier-Stokes . . . 96
4.2.1 Discrétisations . . . 97
4.2.2 Algorithme de résolution . . . 99
4.3 Les conditions aux bords . . . 100
4.4 Tests et validations numériques . . . 100
4.4.1 Solutions polynômiales . . . 100
4.4.2 Tourbillons de Green-Taylor . . . 102
4.4.3 Translation de tourbillons . . . 103

4.4.4 Cavité entrainée . . . 104
4.4.5 Champs tournant . . . 105
4.5 Parallélisation . . . 107
4.5.1 Le schéma . . . 107
4.5.2 Mise en œuvre avec OpenMP . . . 108
4.5.3 Tests de performance . . . 109
4.6 Conclusion . . . 111

5 Applications à l'érosion 113
5.1 Équations du modèle . . . 113
5.2 Gestion du problème à frontière libre . . . 115
5.3 Calcul de la contrainte . . . 116
5.3.1 Discrétisation DDFV . . . 116
5.3.2 Calcul du cisaillement brut . . . 117
5.3.3 Correction de la contrainte . . . 119
5.3.4 Validation de la correction . . . 120
5.3.5 Limites de la correction . . . 125
5.4 Nouvelle correction . . . 127
5.4.1 Principe de la méthode . . . 128
5.4.2 Validation . . . 130
5.5 Applications . . . 133
5.5.1 Érosion d'un cylindre . . . 133
5.5.2 Érosion d'une bille . . . 143
5.6 Conclusion . . . 147

Conclusion générale 149

Introduction

Les phénomènes d'érosion représentent des mécanismes complexes et sont sources de très grands problèmes provoquant, par exemple, la rupture des ouvrages hydrauliques tels que les digues ou les barrages. Ces ruptures peuvent générer des dégâts catastrophiques, à l'exemple des inondations qui ont dévasté une partie importante du littorale vendéen, suite à la destruction des digues de protection, après le passage de la tempête Xynthia en 2010. Plus gravement affectées, les digues de la Nouvelle Orléans ont cédé face à la force du cyclone Katrina en 2005, en ravageant la moitié de la ville et en causant une gigantesque inondation. Des incidents similaires sont observés un peu partout dans le monde et avec le réchauffement de la planète qui cause le dérèglement climatique et l'élévation du niveau des eaux, ces événements seront de plus en plus fréquents et dévastateurs.

L'agence européenne pour l'environnement recommande, via le programme EUROSION [1], de renforcer la base de connaissance de la gestion, ainsi que de la planification de l'érosion. Plusieurs axes de recherche et d'innovation ont été privilégiés pour répondre à cette problématique afin de l'anticiper et planifier des solutions pour y remédier. Dans ce contexte, la modélisation des mécanismes de l'érosion doit permettre l'élaboration de solutions pour sécuriser les ouvrages et les rendre moins sensibles à ces phénomènes. C'est pourquoi depuis quelques années de nombreux travaux portent sur la modélisation et la simulation numérique des phénomènes d'érosion.

Dans ce domaine, les projets développés pendant la collaboration entre l'Institut de Mathématiques de Toulon (IMATH) et l'Institut National de Recherche en Sciences et Technologies pour l'Environnement et l'Agriculture d'Aix-En-Provence (Irstea), à travers la thèse de Damien Lachouette [60], ont porté un intérêt particulier sur la modélisation d'une interface fluide/solide avec érosion en application à l'érosion interne. Le travail a été consacré à la modélisation de l'évolution d'une interface entre un milieu de sol et un milieu fluide. Le mouvement de cette interface est régi par l'érosion du sol sous l'effet de l'écoulement. La présente étude s'inscrit dans la continuité de ce travail.

1. http://www.eurosion.org

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse porte sur la modélisation numérique de l'érosion d'un sol supposé cohésif par un écoulement incompressible décrit par les équations de Navier-Stokes à des nombres de Reynolds faibles ou modérés. Le but est de réaliser des simulations numériques avec précision et à moindre coût. Cette étude s'articule en cinq chapitres, organisés selon l'axe : modélisation, approximation et application.

Dans le premier chapitre, nous présentons le contexte relatif à l'érosion dans les ouvrages hydrauliques, en exposant une brève étude des enjeux et des problématiques liés à ce phénomène. Ensuite, nous exposons la modélisation que nous allons suivre, en commençant par établir les hypothèses du problème. Le modèle suppose un sol cohésif et imperméable sous un écoulement dilué conduisant à une loi d'érosion interfaciale. Puis, nous présentons les équations relatives aux comportements du fluide, à l'érosion du sol et à l'interface fluide/sol. Enfin, nous exposons l'approche numérique retenue pour la mise en œuvre.

Les chapitres deux, trois et quatre, présentent respectivement la méthode Level Set utilisée pour le suivi de l'interface, les schémas de discrétisation DDFV (Discrete Duality Finite Volume), qui présentent des formulations pertinentes pour autoriser des raffinements locaux sur maillages non-conformes et non-structurés, ainsi que la résolution des écoulements incompressibles décrits pas les équations de Navier-Stokes.

Le cinquième chapitre a pour objet de donner des résultats numériques de validation et d'analyse d'érosion. Avant de commencer l'assemblage des outils développés lors des trois chapitres précédents, nous proposons deux approches consistantes pour déterminer la contrainte exercée par l'écoulement sur le sol. Ce point est essentiel pour prédire la vitesse d'érosion. On terminera par des simulations d'érosion de cylindre et de boule pour comprendre les effets de l'érosion à des échelles caractéristiques de la naissance du phénomène et au delà.

1 État de l'art et modélisation

Ce chapitre est consacré en premier lieu à une brève présentation des problématiques et des enjeux soulevés par les phénomènes liés à l'érosion interfaciale en présence d'ouvrages hydrauliques. Dans la première partie nous donnons une description générale des techniques expérimentales mises en œuvre pour étudier l'érosion des sols. Cette partie permet donc de mettre en évidence le niveau de vulnérabilité des ouvrages lorsqu'ils sont confrontés à ce type d'érosion. Pour les sécuriser et pour comprendre les processus de leur érodabilité, une modélisation de l'érosion est donc essentielle. Dans le but de réaliser des simulations numériques décrivant les mécanismes de ces phénomènes, nous introduisons le modèle physique qui constituera le cadre de notre étude. Ainsi, dans la seconde partie de ce chapitre nous annonçons les détails de la modélisation numérique de l'érosion avec les choix des hypothèses et l'approche que nous avons retenu.

1.1 Le contexte

L'érosion constitue un des principaux problèmes dans la dégradation, l'appauvrissement et la perte des sols en déplaçant les matériaux les constituant. Par conséquent, les phénomènes liés à l'érosion affaiblissent la qualité et la productivité des terres et nuisent à l'efficacité et à la performance des écosystèmes. Ces phénomènes sont aussi une cause majeure dans la rupture des ouvrages hydrauliques tels que les digues ou les barrages. De nombreux cas de ruptures de barrages à travers le monde ont été rapportés dans la littérature du génie civil [39,42] et il en est de même pour les digues et les levées [71]. Dans ce domaine, la gestion des ouvrages hydrauliques en terre et la maitrise du risque nécessitent de mieux connaitre les mécanismes élémentaires mis en jeu lors de l'érosion. J.-J. Fry a dressé récemment un bilan complet du problème de l'érosion interne dans les barrages et les digues dans [41].

Le dérèglement climatique accentuera ces problèmes et en fera surgir d'autres qui pourraient atteindre des proportions plus catastrophiques. En plus, la Commission Internationale des Grands Barrages recense que 63% des barrages sont en terre, donc soumis à un risque réel d'érosion. La connaissance des mécanismes d'érosion et de sa modélisation sont donc cruciales : d'une part, pour prédire leur comportement et anticiper leur scénarios de rupture, et d'autre part pour permettre de réaliser des ouvrages neufs ou réhabilités plus résistants.

Pour illustrer ces phénomènes de rupture d'ouvrages, un exemple récent en France qu'on pourrait citer est la rupture de barrage des Ouches dans le Puy-de-Drôme en juillet 2001. Dans ce registre, la rupture en moins de quatre heures du barrage de Teton au États-Unis en 1976 ($100m$ de haut) est une référence historique. Sur les photos de la figure 1.1, on observe que, ce qui n'était apparemment qu'une simple fuite à l'aval de l'ouvrage, a conduit à l'effondrement total de l'ouvrage. Une brèche a été creusée et élargie à cause de la conduite d'eau, en laissant passer un écoulement important qui a continué d'arracher le sol de l'ouvrage.

FIGURE 1.1: Différentes prises de vue du barrage de Teton au cours de sa rupture.

Les petits barrages sont également concernés, comme en témoigne la rupture d'un autre barrage dans le Missouri aux États-Unis en 2005, où de petites fuites avaient affaibli son parement amont. Les digues peuvent subir aussi le même sort à l'instar des seize brèches survenues dans les digues de Camargues lors des crues du Rhône de l'hiver 1993-1994 ou plus récemment l'érosion de l'ensemble du cordon dunaire de l'Île de Ré et des plages avoisinantes lors du passage de la tempête Xynthia en 2010 en Vendée.

FIGURE 1.2: Exemple de brèche suite à l'érosion d'une digue (R. Frell et J.-J Fry [37]).

1.1.1 Origines et typologie de l'érosion

Des études expérimentales menées par J. L. Briaud [18] ont mis en évidence que trois catégories de paramètres sont en jeu dans le problème d'érosion. Premièrement la nature et l'état du sol, deuxièmement l'eau environnante et troisièmement la géométrie qui détermine l'écoulement de l'eau en interface ou à travers l'ouvrage. Le sol se caractérise principalement par son érodabilité, l'eau essentiellement par sa vitesse, et la géométrie par les dimensions de l'ouvrage ou des obstacles.

Les phénomènes d'érosion se différencient en deux types : érosion externe et érosion interne.

- **L'érosion externe** : elle peut être décrite comme la déstructuration de surface par arrachement et déplacement des particules d'un sol ou d'une roche sous l'action d'un écoulement. Elle peut être engendrée par des circulations d'eau sur la crête de l'ouvrage provoquant alors une surverse (exemple (a) de la figure 1.3).
- **L'érosion interne** : elle est définie comme une migration de particules engendrée par un écoulement hydraulique souterrain dans le sol ou dans un ouvrage en terre. Elle se développe s'il y a la combinaison, à l'intérieur du volume de l'ouvrage, de deux phénomènes : l'arrachement des particules et leur transport. Plusieurs mécanismes de l'initiation de ce type d'érosion ont été identifiés par J.-J. Fry [41], dont les deux principaux sont :

  1. L'érosion de conduit où l'écoulement dans une fissure, un trou ou une cavité, érode les parois (figure 1.3, exemple (b)). Elle représente le mécanisme ultime, celui qui provoque la rupture.
  2. L'érosion régressive concerne tout phénomène d'érosion qui se produit en un point aval et se poursuit en progressant vers l'amont (figure 1.3, exemple (c)). Sous l'effet de la pression du fluide qui percole à travers l'ouvrage un chemin peut être créé à l'aval de l'écoulement. Dans ce chemin, l'eau va s'infiltrer et circuler en arrachant les particules de sol et en les entrainant le long du conduit. Ce phénomène, dénommé plus communément "renard hydraulique", reste difficilement détectable et il est particulièrement dangereux.

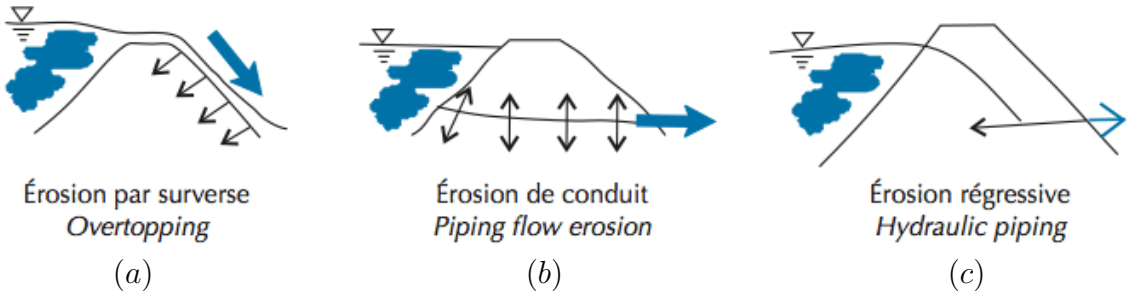


FIGURE 1.3: Exemples de situation d'érosion d'ouvrages hydrauliques (S. Bonelli *et al.* [12]).

L'état actuel des connaissances des ruptures par les différents types d'érosion repose sur le recensement effectué par M. Foster *et al.* [39], puis actualisé par A. Vogel [98,99]. Quant aux bases de données constituées dans le cadre du projet national ERINOH (ERosion INterne des Ouvrages Hydrauliques) par Fry *et al.* [43], l'érosion interne est représentée comme la cause la plus fréquente des ruptures récentes des ouvrages en terre.

Pour mieux comprendre les mécanismes de ce phénomène, des expérimentations grandeur nature ont été menées. Par exemple en Norvège (figure 1.4) où une érosion de conduit a été volontairement initiée pour en mesurer l'évolution. Une fois initié, ce phénomène a une évolution très rapide. Après l'initialisation de l'érosion, le temps écoulé jusqu'à l'effondrement de la brèche est d'environ 20 minutes. Dans cette étude, on va s'intéresser à l'étape d'initialisation.

FIGURE 1.4: Évolution de l'érosion d'une digue expérimentale en Norvège [65].

1.1.2 Les mécanismes élémentaires

La modélisation de l'érosion nécessite d'abord la modélisation du transfert de masse entre le solide et le fluide, deux milieux séparés par une interface. Cette interface peut être :

1. mobile ;
2. géométrique et non matérielle ;
3. traversée par le flux de masse érodée.

Tous les phénomènes d'érosion, même l'érosion interne, peuvent être considérés comme interfaciaux [11]. Cela est illustré dans le tableau de la figure 1.5, où les différents types d'érosions d'interface sont classés en fonction de la direction d'écoulement par rapport à l'interface sol/eau et en fonction du type d'écoulement (la sollicitation hydraulique). Cette classification met en perspective les quatre types d'érosion interne proposés par R. Fell et J.-J. Frey dans [40], dont les deux principaux ont été détaillés dans le paragraphe précédent, par rapport à d'autres types d'érosion rencontrés dans le milieu naturel.

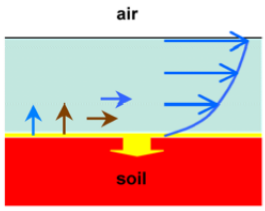
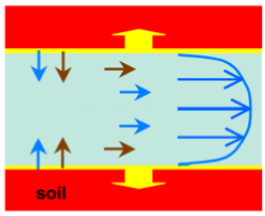
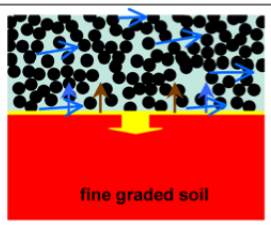
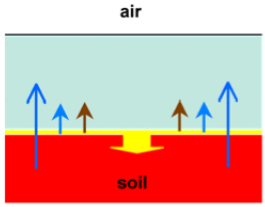
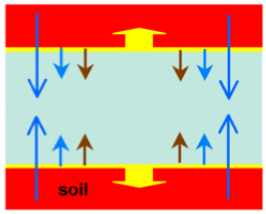
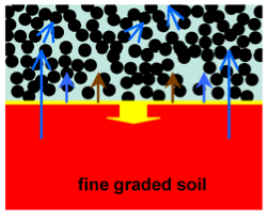
	Sollicitation hydraulique sur l'interface		
	Écoulement à surface libre	Écoulement libre en charge	Écoulement interstitiel
Écoulement tangentiel	 transport sédimentaire hydraulique fluviale ou torrentielle érosion par surverse ou déferlement	 renard hydraulique piping erosion, sinkholes	 érosion de contact
Écoulement normal	 fluidization érosion regressive piping erosion, sinkholes	 bore-holes seepage erosion sand production	 érosion de contact

FIGURE 1.5: Classification des différents types d'érosion interfaciale (S. Bonelli [11]).

Il ne s'agit que d'un choix d'adaptation de l'échelle de représentation du phénomène. En effet, la définition de l'érosion est intiment liée à l'échelle choisie pour le traitement du phénomène. Par exemple, le cas du renard hydraulique, où l'érosion régressive provoquée par des exfiltrations d'eau hors d'un mélange de sable et d'argile, doit être vu à une échelle qui assimile ce mélange à un milieu continu. À une échelle inférieure (celle du grain de sable), l'interface n'est pas définie. L'échelle de représentation pertinente pour considérer que l'érosion étudiée est interfaciale, est donc celle qui permet de considérer le solide érodé comme un milieu continu et homogène. À l'échelle de l'ouvrage hydraulique, la mécanique des sols et la mécanique des fluides sont intiment couplées.

Plusieurs travaux on été menés pour reproduire et étudier le phénomène d'érosion interne en laboratoire. Après les premières expérimentations qui ont été destinées à observer de près et à mettre en évidence ce phénomène, plusieurs essais ont été menés pour le caractériser quantitativement [61]. Un des essais qui a fait l'objet d'investigation importante est l'essai d'érosion d'un trou, dit Hole Erosion Test (HET), notamment avec les travaux de C.F. Wan et R. Frell [100, 102], et de Bonelli *et al.* [13, 14] qui ont réalisé un grand nombre d'essais de ce type sur différents sols.

1.2 Modélisation de l'érosion

Ce travail s'inscrit dans la continuité de la thèse de D. Lachouette [60], dont l'originalité de la méthode de modélisation consiste à considérer seulement deux domaines, fluide et solide. Ces deux domaines sont supposés séparés par une interface fine. Nous nous intéresserons à la loi de comportement de cette interface en présence d'érosion. L'essai HET permet de mettre en pratique un protocole expérimental à partir duquel on peut énoncer la loi d'érosion interfaciale. Dans le modèle final, nous mettrons en évidence le couplage de cette loi avec l'écoulement fluide qui régit l'érosion du sol. Nous commencerons d'abord par la formulation des hypothèses retenues pour cette étude qui donneront le cadre de la modélisation.

1.2.1 Hypothèses

L'approche que nous avons retenue est celle de l'interface fine entre le solide et le fluide. Comme illustré dans la figure 1.6, on est en présence de deux milieux : l'eau et le sol séparés par une interface fine. D'un coté de l'eau entre des particules en arrangement compact (le sol). De l'autre des particules solide dans le l'eau (l'écoulement). Les sols considérés sont des argiles quasi-imperméables. Pour d'autres types de sol comme les sols granulaires, il existe des approches différentes, telle que celle proposée par I. Vardoulakis *et al* [96], qui considèrent un troisième domaine de solide fluidisé. Dans notre cas, le caractère imperméable de l'argile permet de négliger tout écoulement intermédiaire dans le sol induit par l'écoulement externe.

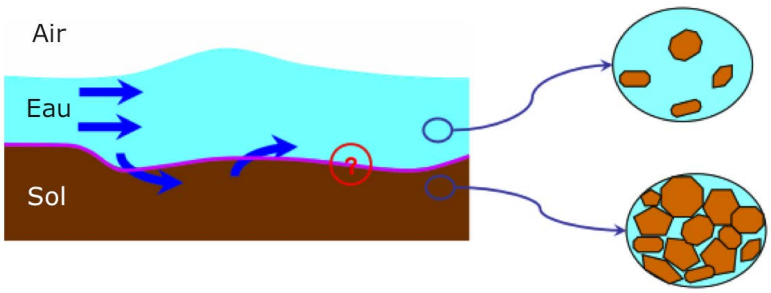


FIGURE 1.6: Les milieux en jeux pour modéliser l'érosion interfaciale.

Nous faisons une autre hypothèse qui consiste à considérer que l'érosion est plus lente que l'écoulement. Une hypothèse qui a été justifiée par l'analyse des ordres de grandeur faite par S. Bonelli *et al.* dans [15]. Par ailleurs, ceci reste légitime à l'échelle de notre étude où l'on s'intéresse à la première phase de l'érosion. De plus, cette hypothèse est en cohérence avec le fait de considérer un sol cohésif, car avec ce type d'érosion la concentration en particule reste faible dans le domaine fluide où l'écoulement est dilué. Enfin, l'hypothèse de l'érosion lente face à la vitesse d'écoulement nous permet de découpler les deux phénomènes et nous pouvons donc résoudre séparément les équations régissant le fluide et l'interface.

Pour résumer, voici nos hypothèses pour la modélisation :

1. Les deux milieux considérés sont le sol et l'eau.
   - Le sol est cohésif : on peut le voir par exemple comme une argile peu perméable.
   - L'écoulement est dilué : on ne tient pas compte des particules présentes dans le fluide.
2. L'interface solide/fluide est d'épaisseur nulle, c'est seulement une surface de séparation entre les deux milieux.
3. L'érosion est lente face à l'écoulement : les deux phénomènes peuvent être découplés.

1.2.2 Modélisation des milieux

Reprenant les deux premières hypothèses énoncées dans le paragraphe précédent, il s'agit d'établir un modèle simple qui tienne en compte des deux milieux liés par une interface fine qui puisse évoluer sous l'effet de l'érosion. Le principe de base est de considérer un domaine Ω contenant deux milieux, un fluide et l'autre solide, ces deux milieux étant non miscibles. On pourra alors parler du domaine fluide et du domaine solide, qu'on note respectivement Ω_f et Ω_s. On notera Γ l'intersection de Ω_f et Ω_s, également appelée interface solide/fluide (voir figure 1.7). L'écoulement dans la partie fluide est régit par les équations de Navier-Stokes (qui seront explicitées plus tard) et le sol sera considéré comme immobile (sa vitesse $\mathbf{u}_s = 0$).

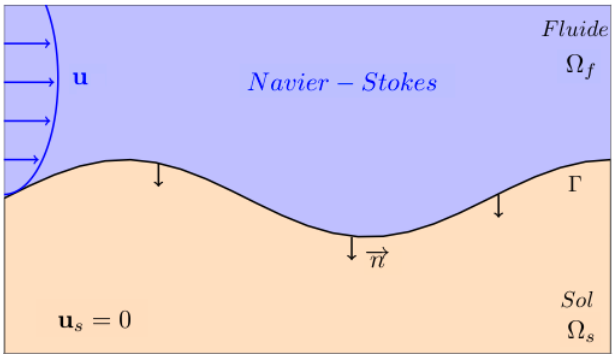


FIGURE 1.7: Schématisation du domaine d'étude et de l'interface fluide/solide.

1.2.3 La loi d'érosion

L'érodabilité d'un sol a été définie comme une relation entre le flux de la masse érodée $\dot{m}$ et la vitesse de l'écoulement $\mathbf{u}$ proche de la surface eau/sol [54]. Cette définition n'est pas satisfaisante car la vitesse varie en intensité et en direction dans le champ d'écoulement. Autrement dit, la vitesse est nulle à l'interface fluide/solide. Une définition plus rigoureuse de l'érosion est la relation entre le taux d'érosion et la contrainte de cisaillement τ à l'interface eau/sol. Plusieurs expérimentations de laboratoire ont permis de quantifier la cinétique de l'érosion et d'établir des relations entre le taux d'érosion (le flux de la masse érodée) et la contrainte de cisaillement.

Comme indiqué précédemment, le Hole Erosion Test (HET), illustré dans figure 1.8, est l'un des dispositifs expérimentaux les plus utilisés au laboratoire pour reproduire et quantifier l'érosion de conduit. C'est un essai qui consiste à réaliser un trou millimétrique traversant un échantillon de sol, puis de faire circuler un écoulement dans ce trou afin de provoquer son élargissement par érosion.

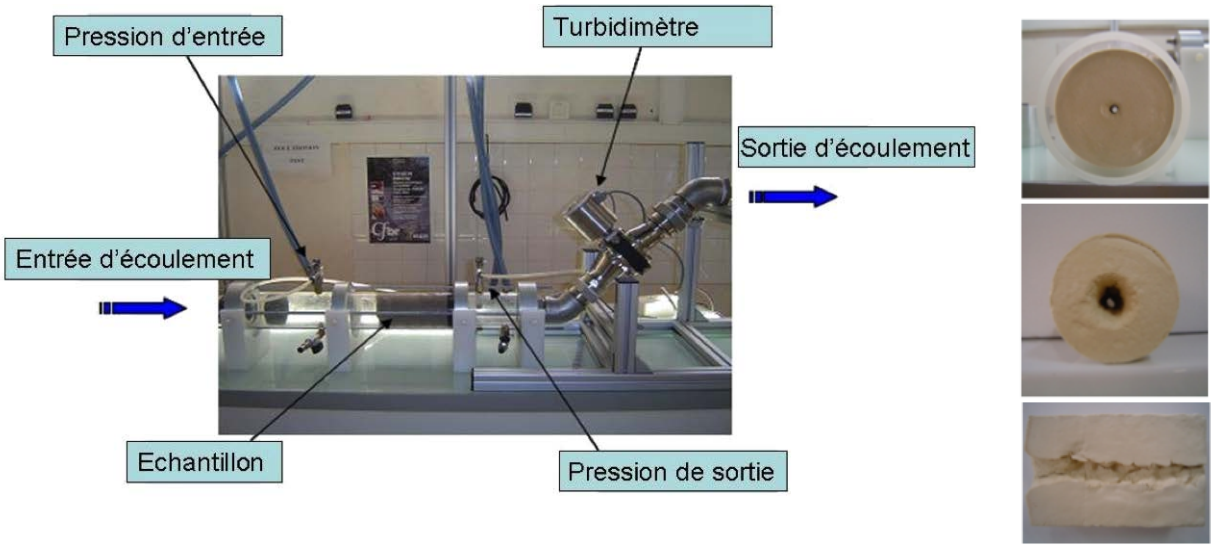


FIGURE 1.8: Photo d'un appareil d'essai HET et d'un exemple d'échantillon du sol avant et après érosion (Irstea Aix-en-Provence [9]).

Le but des essais d'érosion, dont le HET fait partie, est de déterminer la sensibilité des sols par des "lois d'érosion" ou des "courbes d'érosion" qui traduisent la relation entre la contrainte de cisaillement τ et le taux d'érosion $\dot{m}$ qui représente la masse du sol érodée par unité de temps et par unité de surface. D'après les résultats des expériences conduites par C.F. Wan et R. Fell [101, 102] et par S. Bonelli *et al.* [13, 14], l'initiation de l'érosion dépend d'une contrainte critique de cisaillement τ_c et du coefficient d'érosion K_{er} qui traduit la cinétique de l'érosion (ou de manière équivalente le coefficient d'érosion de Hanson K_d [51]).

Ainsi, il est généralement constaté une loi d'érosion empirique à seuil reliant linéairement la contrainte de cisaillement τ et le taux d'érosion $\dot{m}$. Cette loi s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{m} = \begin{cases} K_{er}(\tau - \tau_c) & \text{si } \tau > \tau_c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.1}$$

En notant $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal à l'interface Γ orienté dans le sens "fluide" vers "solide" (voir figure 1.7), on peut considérer qu'à cette interface la contrainte de cisaillement $\tau = \|\overrightarrow{\tau}\|$ est la norme de la partie tangentielle du vecteur contrainte sur Γ telle que :

$$\overrightarrow{\tau} = 2\mu[\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \overrightarrow{n} - (\overrightarrow{n} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}], \tag{1.2}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide et le tenseur $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ représente le gradient symétrique de la vitesse : $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u})/2$. Pour illustration, on représente sur la figure ci-dessous la relation entre les deux grandeurs physiques $\dot{m}$ et τ qui entre en jeu dans la loi d'érosion. Celle-ci dépend de la vitesse du fluide, ainsi que de la résistance du sol à cette sollicitation.

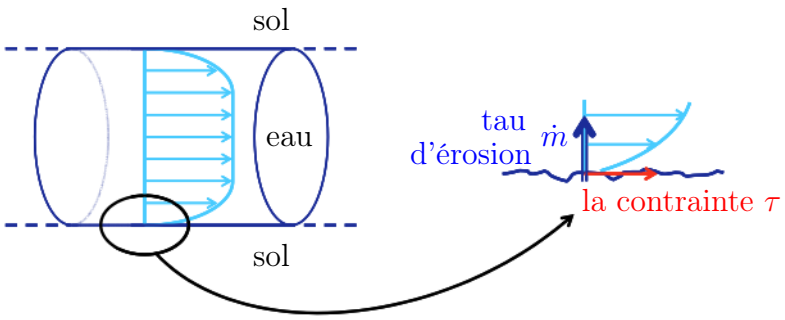


FIGURE 1.9: Schéma d'interface dans le cas d'écoulement avec érosion.

La célérité normale de l'interface v_Γ correspond à la vitesse d'érosion. En notant ρ_s la masse volumique du sol, on peut exprimer $\dot{m}$ de la façon suivante : $\dot{m} = \rho_s v_\Gamma$. Une deuxième expression équivalente à (1.1) relie donc la vitesse de l'interface à la contrainte tangentielle :

$$v_\Gamma = \begin{cases} K_d(\tau - \tau_c) & \text{si } \tau > \tau_c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Le coefficient d'érosion K_{er} et le paramètre K_d sont liés par la relation : $K_d = K_{er}/\rho_s$. Les essais HET développés au laboratoire de l'Irstea par les équipes de S. Bonelli ont permis de réaliser des mesures par un ensemble d'instruments (cf. figure 1.8) à partir d'un conduit de 3 mm de rayon et d'en déduire la contrainte critique τ_c et le coefficient d'érosion K_{er}. La gamme de valeurs de ces paramètres correspondants à des sols d'ouvrages existants est larges : de quelques Pa à 200 Pa pour τ_c, de 10^{-1} s/m à 10^{-7} s/m pour K_{er}.

La loi d'érosion est schématisée par la figure 1.10. La courbe présentée est obtenue par une régression linéaire effectuée sur des résultats expérimentaux. Elle permet aussi d'identifier une contrainte seuil de l'ordre de $0,085$ Pa, et un coefficient d'érosion $K_{er} = 2.10^{-2}$ s/m.

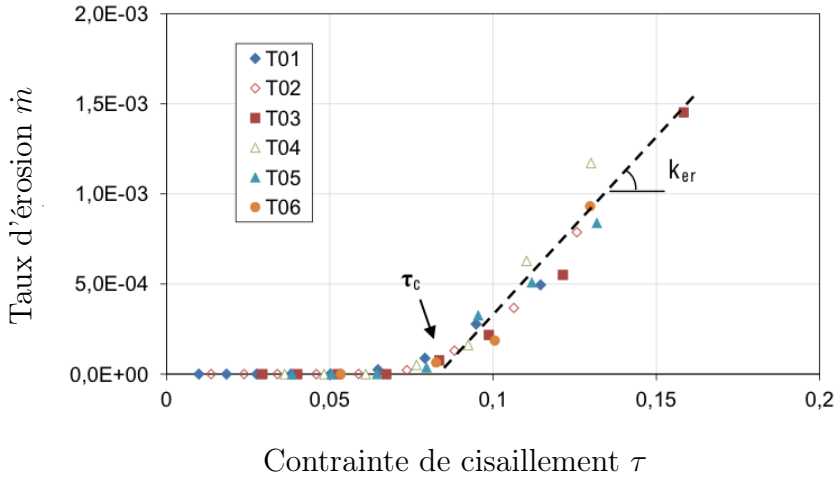


FIGURE 1.10: Relation entre le taux d'érosion et la contrainte obtenue sur des essais HET. Résultats de 6 expériences sur du sablon de l'Isère (R. Beguin [8]).

Soulignons que S. Bonelli *et al.* [13,14] ont proposé une méthode d'interprétation des essais. Cette dernière partant d'une analyse adimensionnelle en supposant que la loi d'érosion du type (1.3) repose sur une relation reliant le débit (ou la vitesse moyenne), la différence de pression et le rayon du conduit. L'évolution du rayon durant différents essais est déterminé indirectement à partir des mesures de la différence de pression en fonction du temps. Les comparaisons entre les résultats expérimentaux et les valeurs obtenues par le modèle qui repose sur la loi d'érosion, ont permit de valider cette loi.

1.2.4 Modélisation numérique

Dans le cadre de la simulation numérique d'écoulement en présence d'interface, on distingue principalement deux approches : la capture ou le suivi de l'interface.

- La première, dite *approche eulérienne*, consiste à définir les deux milieux (eau et sol) dans un domaine donné (maillage fixe) et à en déterminer l'évolution.
- La seconde, dite *approche lagrangienne*, consiste à ne modéliser que la partie fluide, puis à déplacer la frontière au cours du temps (maillage mobile).

La seconde approche a été utilisée par F. Mercier *et. al* pour la modélisation des essais HET [68] et JET (Jet Erosion Test) [69]. Dans cette étude, on travaillera avec la première approche qui ne nécessite pas de faire des remaillages lors de l'évolution de l'interface. Dans ce cas, on utilise pour le domaine entier $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ un maillage fixe et indépendant de la forme de l'interface.

Le comportement du sol et du fluide, deux milieux cantonnés dans un domaine global Ω, est à décrire de manière à n'avoir qu'une seule relation représentant ce comportement. Les paramètres de cette relation peuvent être discontinus sur l'interface, mais ils sont liés par la loi d'érosion (1.3). Quand au comportement interne au sol, il est peu important face à l'écoulement : c'est la contrainte tangentielle qui pilote l'érosion (voir le paragraphe précédent). Dans ce genre de problème, les méthodes aux domaines fictifs permettent de trouver une relation englobant les différents paramètres de manière à s'affranchir du repérage des domaines (et du maillage). Nous utilisons pour cela la méthode de pénalisation développée par Ph. Angot *et al.* [3, 4]. C'est une méthode qui se base sur une formulation simple et précise pour traiter des interactions fluide/solide.

Le problème que nous traitons est celui d'un obstacle dans un écoulement en charge. L'obstacle est présenté par un sol dont la vitesse est notée $\mathbf{u}_s$, dans le cas d'un obstacle fixe on aura $\mathbf{u}_s = 0$. L'écoulement est incompressible et décrit par les équations de Navier-Stokes (voir la figure 1.7). En notant respectivement $\mathbf{u}$ et p le champ de vitesse et la pression définis sur Ω, on peut écrire les équations de Navier-Stokes d'un écoulement incompressible auxquelles on ajoute un terme de pénalisation du champ de vitesse dans $[0,T]\times\Omega$ $(T>0)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho\left(\partial_t\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)-\mu\Delta\mathbf{u}+\frac{\mu}{K_s}\chi_{\text{sol}}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_s) &=& -\nabla p+\mathbf{f}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &=& 0, \\ (+\text{C.L.}). & & \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Le terme source $\mathbf{f}$ représente les forces volumiques agissant sur le système, ρ est la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique. Les conditions aux limites (C.L.) seront traitées plus tard. La fonction χ_{sol} est une indicatrice qui vaut 1 dans le sol et 0 ailleurs. Pour imposer $\mathbf{u}=\mathbf{u}_s$ on choisit le paramètre de pénalisation $K_s \ll 1$; il est équivalent à une perméabilité.

Une fois la position de l'interface prise en compte, nous choisissons de décrire l'évolution de cette interface par la méthode *Level Set* que nous allons détailler dans le chapitre suivant. Soit ϕ la distance signée à l'interface Γ, telle que $\phi<0$ dans Ω_f, $\phi=0$ sur Γ et $\phi>0$ dans Ω_s. Connaissant ϕ, la position de Γ est donnée par : $\chi_{\text{sol}}=1$ si $\phi>0$ et 0 si $\phi<0$; autrement dit $\chi_{\text{sol}}=H(\phi)$, où H est la fonction Heaviside. L'évolution sera décrite alors par l'équation de transport suivante :

$$\partial_t\phi+\mathbf{v}\cdot\nabla\phi=0, \tag{1.5}$$

où $\mathbf{v}$ est une vitesse définie dans le domaine Ω telle qu'à l'interface Γ : $\mathbf{v}=v_\Gamma\overrightarrow{n}$, avec v_Γ vitesse de l'interface déterminée par la loi d'érosion (1.3).

1.3 Organisation du calcul

Comme il a été évoqué précédemment, nous nous intéressons aux cas des phénomènes d'érosion ayant une cinétique lente face à l'écoulement. Avec cette hypothèse, le couplage écoulement/érosion devient très faible et une résolution découplée séquentielle est possible. Le calcul commence par la construction de la géométrie initiale, c'est-à-dire de la fonction Level Set initiale. Ensuite, on traite l'écoulement et l'érosion en deux étapes qui se succèdent. Le déroulement des calculs est résumé dans le schéma de la figure 1.11 dont les différentes parties seront détaillées dans la suite de ce manuscrit.

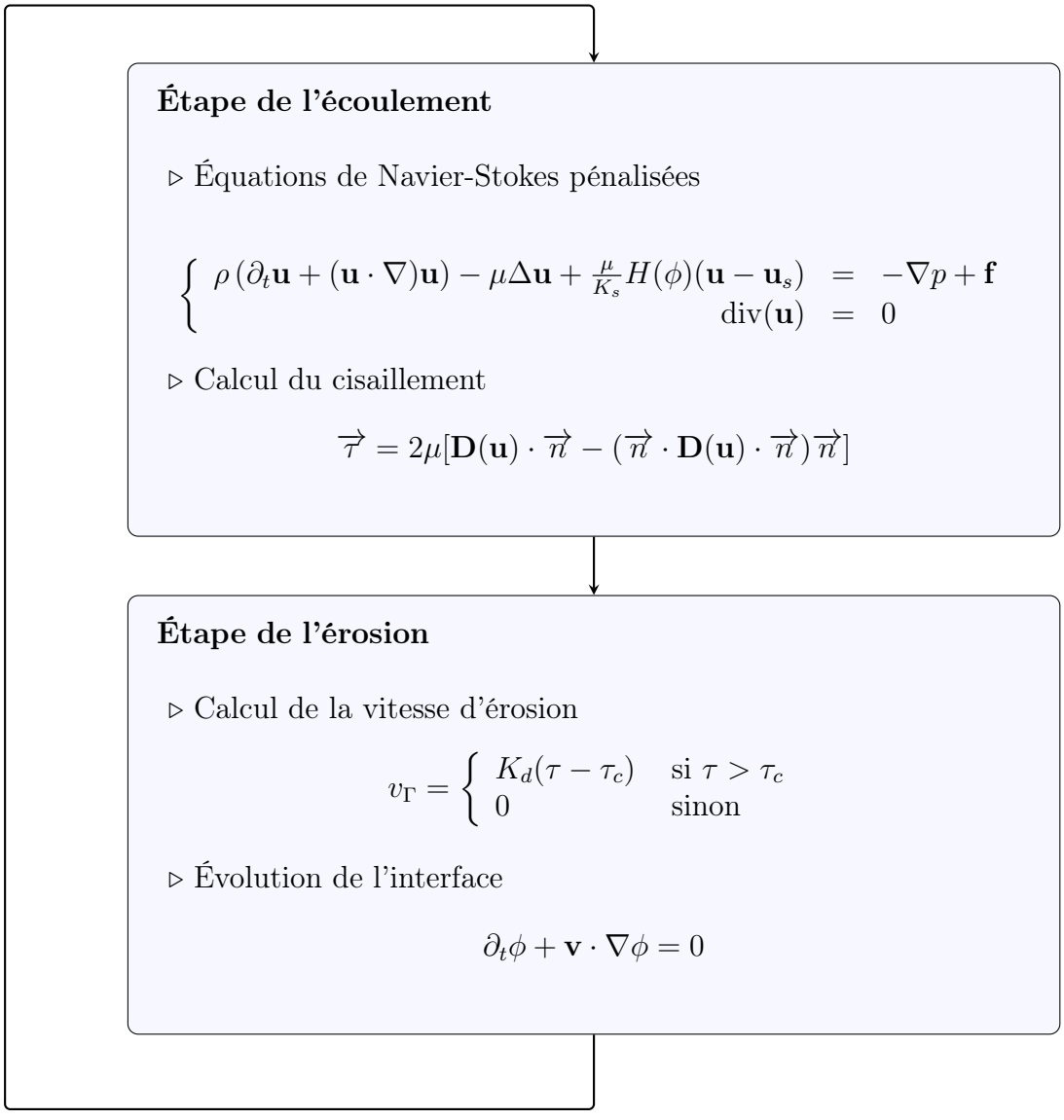


FIGURE 1.11: Schéma découplé séquentiel du calcul de l'écoulement et de l'érosion

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé dans un premier temps, le contexte général des causes et des risques liés à l'érosion des ouvrages hydrauliques. Nous avons mis en évidence les enjeux d'une détermination fiable de l'érodibilité des sols. Dans un second temps nous avons exposé le cadre de l'étude pour la modélisation d'érosion interfaciale. La modélisation d'interface fine se justifie par les matériaux employés pour le sol, les argiles étant constituées de particules très fines et ayant un caractère imperméable. Avec ce choix de modèle, l'érosion interfaciale est décrite par une loi empirique à seuil établie à partir des expérimentations élaborées et validées par des essais HET. Cette érosion est pilotée par un écoulement incompressible décrit par les équations de Navier-Stokes.

Le modèle que nous avons proposé est basé sur une approche eulérienne de l'interface, comme dans les travaux de D. Lachouette [60]. Il consiste à considérer les deux milieux en jeux (l'eau et le sol) dans un domaine discrétisé par un maillage fixe et à définir l'interface par la méthode des domaines fictifs et à en déterminer l'évolution par *Level Set*. L'avantage de cette approche est de pouvoir considérer un maillage indépendant des interfaces, celui-ci n'a pas besoin de suivre l'interface mobile et il peut être cartésien et fixe. Ainsi, cette approche est moins coûteuse. Et avec l'hypothèse de faible cinétique de l'érosion, les calculs des deux phénomènes (l'écoulement et l'érosion) peuvent être traités de manière totalement découplée.

2 Suivi d'interface par Level Set

Le modèle numérique que nous proposons donne une description de l'érosion qui prend en considération deux milieux, solide et fluide, séparés par une interface supposée fine. Dans le but de réaliser des simulations numérique des érosions interfaciales, on commence par repérer les différents milieux, puis on calcule l'évolution spatio-temporelle de l'interface qui les sépare. Le choix qui a été fait, est de travailler sur des maillages fixes au cours du calcul. Parmi les méthodes de suivi d'interface existantes, nous avons porté un intérêt particulier pour les méthodes qui sont capables de s'affranchir du maillage et de suivre les forts changements de topologie interfaciale. Nous avons choisi la méthode Level Set pour décrire précisément l'interface.

Depuis la mise au point des fondements de la méthode à la fin des années 80 par S. Osher et J.A. Sethian [74], la littérature scientifique regorge de travaux qui décrivent la technologie Levet Set et ses composantes avec des champs d'application larges et variés. On peut citer ici deux ouvrages de référence, qui sont celui de S. Osher et R. Fedkiw [73], ainsi que celui de J.A. Sethian [86]. Une étude complète de la méthode avec de nombreux cas tests sont disponibles dans la thèse de P. Vigneaux [97].

Nous consacrons ce chapitre au suivi d'interface par Level Set. Tout d'abord, nous allons exposer brièvement les principales méthodes existantes. Puis, nous allons présenter la méthode Level Set et surtout la mise en œuvre et la validation de l'équation de transport associée à la méthode qui permet de donner l'évolution de l'interface eau/sol, en reprenant plusieurs cas tests de [97].

2.1 Méthodes de suivi d'interface

Les problèmes de suivi d'interfaces interviennent dans plusieurs domaines tels que la propagation de fronts de flammes, le couplage fluide-structure, l'imagerie médicale, la dynamique de bulles, etc. On distingue deux grandes familles de ces méthodes, les méthodes dites lagrangiennes, et les méthodes dites eulériennes.

1. Les méthodes lagrangiennes sont associées aux approches appelées "front tracking" où l'interface est localisée par des marqueurs qui subissent une advection locale. Ceci

permet de réaliser un suivi explicite de l'interface. Le système des coordonnées suit l'interface de façon à la représenter à chaque instant de manière précise sans modifier le modèle.

2. Les méthodes eulériennes sont associées aux approches appelées "front capturing", qui en opposition à la première approche, permettent de capturer l'interface implicitement à l'aide des lignes de niveaux d'un champ scalaire. Une inconnue supplémentaire, définie dans tout l'espace, est ajoutée ainsi qu'une équation dans le modèle, caractérisant le transport de la fonction correspondante.

Dans première la famille, la précision de la position de l'interface permet d'imposer facilement les conditions aux limites. Mais, le traitement des changements de topologie (à cause du remaillage à chaque pas de temps) présente un inconvénient qui limite le choix du maillage et qui joue un rôle négatif dans la durée des simulations. La seconde famille est caractérisée par l'utilisation des maillages fixes. Les changements de topologie dans le front d'évolution sont traités naturellement. En effet, il suffit de donner la résolution de l'équation de transport qui régit l'évolution d'une fonction qui varie de manière continue à travers l'interface. Ceci est le cas de méthode Level Set qui donne un accès rapide à la géométrie avec une bonne précision par une simple formulation mathématique.

2.2 La fonction Level Set

Dans la suite de ce chapitre, l'érosion d'un sol (domaine Ω_s) par un écoulement fluide (domaine Ω_f) constituera le cadre cadre sous-jacent de la problématique du suivi de l'interface.

2.2.1 Définition

Soient $T > 0$ et $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$. On notera $t \in [0, T]$ la variable temps et $\mathbf{x}$ la variable d'espace. Soit $\Gamma = \overline{\Omega_f} \cap \overline{\Omega_s}$ frontière libre entre les deux domaines susceptible d'évoluer au cours du temps. L'interface Γ est repérée par le zéro d'une fonction régulière notée ϕ. Ce qui signifie plus précisément que lorsqu'on passe du domaine fluide au domaine solide, ϕ change de signe. Par convention, on prendra $\phi > 0$ dans le sol et $\phi < 0$ dans le fluide. On a :

$$\begin{cases} \Gamma = & \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}, \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_s : & \phi(\mathbf{x}, t) > 0, \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_f : & \phi(\mathbf{x}, t) < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

L'interface est donc implicitement définie par la fonction ϕ, appelée la fonction Level Set.

2.2.2 L'équation de transport

Le déplacement de l'interface Γ est obtenu en déterminant l'évolution spatio-temporelle de la fonction Level Set ϕ. Dans ce chapitre, l'interface est animée de manière passive par un champ de vitesse $\mathbf{v}$. Plus tard, dans la suite de ce manuscrit, celui-ci sera donné par un couplage entre la loi d'érosion (voir chapitre précédent) et l'équation de Navier-Stokes décrivant un écoulement fluide incompressible. Si on suppose que les isocontours de ϕ sont advectés de la même façon, alors on peut utiliser l'équation de transport canonique :

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi &= 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \phi(\mathbf{x}, t = 0) &= \phi_0(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{2.2}$$

où ϕ_0 est une condition initiale dont l'isocontour 0 représente l'interface initiale.

Le formalisme ainsi obtenu s'inscrit dans le cadre général des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Si ϕ_0 est de classe C^1 et $\mathbf{v}$ est régulier, le problème ci-dessus admet une solution unique de classe C^1 (*cf.* les travaux de G.-H. Cottet et E. Maitre [26, 27]).

2.2.3 Propriétés

Dans le but de simuler numériquement l'évolution de l'interface, il faut garantir une bonne précision dans la résolution en discret de l'équation de transport (2.2) en gardant les avantages intrinsèques de la méthode dans le cas continu. Le gradient de ϕ a un rôle majeur dans la résolution. On doit pouvoir le calculer précisément. Pour atteindre ce but, la communauté Level Set a convergé majoritairement vers un choix de ϕ donnée par une distance signée.

Dans la figure suivante, on donne une illustration d'une fonction Level Set permettant de localiser une interface Γ.

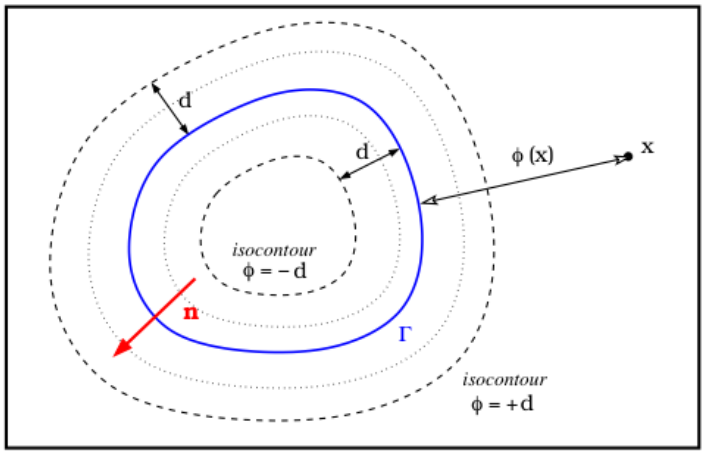


FIGURE 2.1: Level Set et isocontours définis par des distances signées [28].

À partir de cette première ébauche, on peut exposer quelques propriétés intéressantes :

- Le signe de $\phi(\mathbf{x}, t)$ permet de savoir immédiatement dans quel milieu se trouve $\mathbf{x}$ à l'instant t. La localisation de l'interface est directement connue sans une quelconque reconstitution préalable.
- Le vecteur normal $\mathbf{n}$ à l'interface (voir figure 2.1) et la courbure moyenne κ peuvent être calculés aisément grâce à la fonction ϕ :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$$

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}\right) = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

- La fonction Heavyside H permet d'utiliser le formalisme $H(\phi) = \chi$, où χ est une fonction caractéristique qui vaut 0 dans un milieu et 1 dans l'autre milieu.

2.3 Résolution numérique de l'équation de transport

Deux classes de schémas sont largement utilisées par la communauté Level Set pour résoudre l'équation de transport qui sont respectivement, si l'on suit la chronologie de leurs développement, les classes ENO pour "Essentially Non-Scillatory" [87, 88] et WENO pour "Weighted Essentially Non-Oscillatory" [56, 64]. Les schémas ENO reposent sur un algorithme prédéfinissant le stencil où la solution discrète est la plus régulière possible afin d'évaluer au mieux les flux par des interpolations polynômiales. Les schémas WENO, utilisent plutôt une combinaison convexe des stencils acceptables en les pondérant en fonction de la régularité de la solution, ce qui augmente l'ordre de la méthode (jusqu'à 5 dans les zones régulières) en comparaison à la classe ENO (qui peut atteindre l'ordre 3) .

Bien que ces schémas soient d'ordres élevés, l'extension aux maillages non réguliers s'avère très fastidieuse. Notre intérêt à des simulations sur des maillages non-structurés et non-conformes, nous pousse à choisir un schéma simple à implémenter sur ce type de maillage et qui peut garantir l'ordre 2 pour les discrétisations temporelles et spatiales. Pour avoir plus de précision, il suffit alors de raffiner. Les études menées dans le domaine, préconisent d'avoir au moins l'ordre 2 en espace tandis que l'ordre 1 en temps peut suffire. En effet, la pratique des méthodes Level Set fait ressortir que ces méthodes sont sensibles à la précision de la discrétisation en espace, alors que de faibles ordres de précision en temps affectent beaucoup moins la qualité de la solution numérique [97].

2.3.1 Discrétisations de l'équation

Afin d'élaborer une discrétisation totale de l'équation (2.2) on commence par donner une discrétisation du domaine Ω qu'on considère comme un ouvert polygonal convexe borné de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{M}$ une discrétisation de Ω en cellules fermées $\mathcal{K}$ de centre K (dans la pratique il s'agit de parallélépipèdes et pour illustration on utilise des rectangles (figure 2.2)). On note :

- $|K|$ le volume de la cellule $\mathcal{K}$,
- $|\sigma|$ la surface de la face $\sigma = \mathcal{K}/\mathcal{L}$ intersection des deux cellules voisine $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$,
- $\mathcal{V}(K)$ est l'ensemble des cellules voisines de la cellule $\mathcal{K}$,
- $\mathbf{n}_{KL}$ la normale à la face σ orientée de $\mathcal{K}$ vers $\mathcal{L}$.

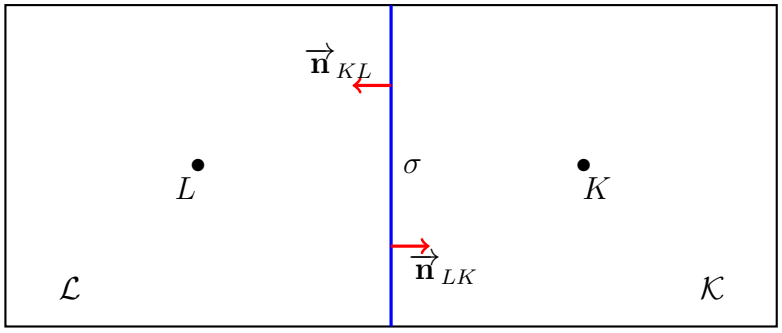


FIGURE 2.2: Définition des cellules $\mathcal{K}$ (volumes de contrôles) et des normales.

Pour la discrétisation temporelle, on considère une subdivision $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'intervalle $[0, T]$ et on pose δt^n le pas de temps à l'instant t^n : $\delta t^n = t^n - t^{n-1}$.

À l'instant t^n, la valeur discrète recherchée est définie au centre de la cellule $\mathcal{K}$ par :

$$\phi_K^n \simeq \phi(x_K, y_K, z_K, t^n).$$

On discrétise en temps l'équation (2.1) par une méthode d'Euler explicite et en espace on la discrétise en utilisant un schéma Upwind [31, 75]. La forme totalement discrétisée est la suivante :

$$\phi_K^{n+1} = \phi_K^n - \frac{\delta t^{n+1}}{|K|} \sum_{\substack{L\in\mathcal{V}(K)\\ \sigma=\mathcal{K}/\mathcal{L}}} |\sigma| F(\phi_K^n, \phi_L^n), \tag{2.3}$$

où F est le flux Upwind ou décentré défini par :

$$F(\phi_K^n, \phi_L^n) = \max(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{KL}, 0)\phi_K^n + \min(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{LK}, 0)\phi_L^n. \tag{2.4}$$

La discrétisation spatiale dans l'équation (2.3) est obtenue par la méthode des volumes finis qui repose sur l'intégration de l'équation sur un volume de contrôle (ici les cellules $\mathcal{K}$). Par le théorème de Stokes, on peut exprimer les solutions en fonction des flux aux interfaces des volumes.

Afin d'assurer la stabilité du schéma utilisé, il est nécessaire de vérifier la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) suivante :

$$\delta t^n \frac{\|\mathbf{v}\|_{\max}}{h_{\min}} = C_{\mathrm{CFL}}, \tag{2.5}$$

où $h_{\min}$ est le minimum des ratios entre volume d'une cellule et les surfaces des ces faces : $h_{\min} = \min_{\sigma,\mathcal{K}} \frac{|K|}{|\sigma|}$. La constante C_{CFL} est un coefficient CFL tel que $0 < C_{\mathrm{CFL}} < 1$. Un critère $C_{\mathrm{CFL}} = 0.9$ permettra d'avancer très vite en temps mais il n'est pas rare de prendre $C_{\mathrm{CFL}} = 0.5$.

Remarque 1

La condition (2.5) peut être interprétée comme une condition qui interdit de propager l'information de plus d'une maille pendant un pas de temps.

2.3.2 Montée en ordre

La discrétisation précédente (équation (2.3)) est d'ordre 1 en temps et en espace. Mais il est indispensable d'avoir un ordre supérieur. Pour améliorer la précision en temps, on utilise le schéma Runge-Kutta à deux pas de calcul (RK2) qui s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_K^{n+\frac{1}{2}} = & \phi_K^n - \dfrac{\delta t^{n+1}}{2|K|} \displaystyle\sum_{\substack{L\in\mathcal{V}(K)\\ \sigma=\mathcal{K}/\mathcal{L}}} |\sigma| F(\phi_K^n, \phi_L^n) \\ \phi_K^{n+1} = & \phi_K^{n+\frac{1}{2}} - \dfrac{\delta t^{n+1}}{|K|} \displaystyle\sum_{\substack{L\in\mathcal{V}(K)\\ \sigma=\mathcal{K}/\mathcal{L}}} |\sigma| F(\phi_K^{n+\frac{1}{2}}, \phi_L^{n+\frac{1}{2}}). \end{cases} \tag{2.6}$$

Cette méthode consiste à utiliser la méthode d'Euler explicite deux fois : la première pour trouver une solution intermédiaire sur un demi pas de temps ; et la seconde pour actualiser la solution finale sur le du pas de temps complet en utilisant la solution intermédiaire.

Par la méthode RK2 on obtient l'ordre 2 en temps. Pour obtenir l'ordre 2 en espace, on propose le schéma MUSCL (Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) avec limitation de pentes. C'est une méthode très simple qui a été proposé par B. Van Leer dans [95] pour améliorer la précision du schéma de Godunov. On note que de nombreux travaux sur ces méthodes sont synthétisés dans le livre de E. Godlewski and P.A. Raviart [46]. T. Buffard et S. Clain ont présenté des techniques pour l'utilisation de cette méthode dans des situations plus complexes et sur des maillages non structurés dans [19]. On propose une généralisation attribuée à T. Barth et détaillé dans [47], une méthode utilisée généralement pour une dimension d'espace ≥ 2. On s'appuie sur la mise en œuvre faite par P. Helluy et

F. Golay pour des discrétisations volumes finis des schémas non conservatifs [52]. Pour cela, on procède comme suit :

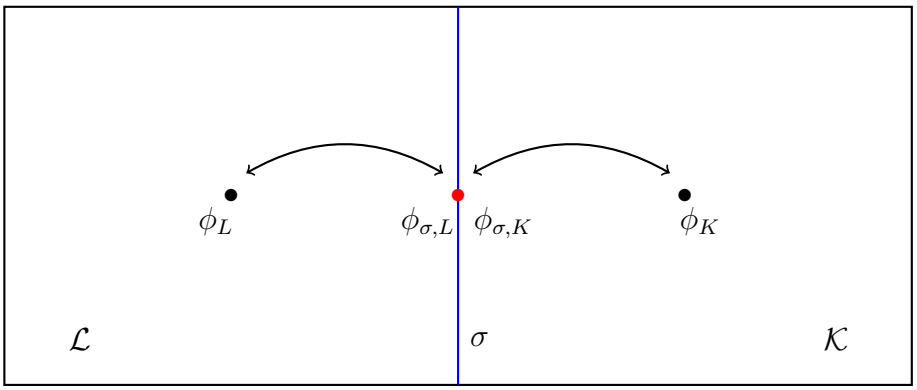


FIGURE 2.3: Construction de nouvelles valeurs aux centres des faces.

1. La prédiction du gradient noté $\nabla\phi_K$ au barycentre de chaque cellule $\mathcal{K}$ peut s'effectuer par exemple en discrétisant la formule de Green :

$$|K|\nabla\phi_K \simeq \int_{\mathcal{K}} \nabla\phi dx = \int_{\partial\mathcal{K}} \phi\mathbf{n}d\sigma \simeq \sum_{\substack{L\in\mathcal{V}(K)\\ \sigma=\mathcal{K}/\mathcal{L}}} |\sigma|\frac{\phi_K+\phi_L}{2}\mathbf{n}_{KL}.$$

2. Le calcul du gradient linéaire doit être limité de façon non linéaire pour que le schéma soit exempt d'oscillations. On pose donc :

$$\tilde{\nabla}\phi_K = \alpha_K\nabla\phi_K,$$

où $\alpha_K \in [0,1]$ est un limiteur qui doit être le plus grand réel compris entre 0 et 1, tel que pour toute face $\sigma = \mathcal{K}/\mathcal{L}$ dont le centre est M_σ :

$$\min(\phi_K,\phi_L) \leq \phi_K + \alpha_K\nabla\phi_K \cdot \overrightarrow{M_\sigma K} \leq \max(\phi_K,\phi_L).$$

3. La reconstruction des valeurs de ϕ sur les faces par interpolation utilisant la nouvelle pente donne :

$$\phi_{\sigma,K} = \phi_K + \tilde{\nabla}\phi_K \cdot \overrightarrow{M_\sigma K}.$$

4. Le nouveau flux numérique utilise les valeurs reconstruites aux faces :

$$F(\phi_{\sigma,K},\phi_{\sigma,K}) = \max(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{KL},0)\phi_{\sigma,K} + \min(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{LK},0)\phi_{\sigma,L}.$$

2.4 Tests et validations

Afin de valider le schéma numérique implémenté pour le transport de la Level Set, nous avons réalisé plusieurs tests. Dans chaque cas nous donnerons les résultats d'étude de convergence en calculant l'ordre de précision. Dans ce but, on évalue les erreurs entre la solution approchée ϕ^{app} et la solution analytique ϕ^{exa} pour des maillages d'espace de plus en plus fins. On utilise pour cela les normes $L^2(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ en calculant :

$$\text{Err}L^2 = \frac{\| \phi^{\text{app}} - \phi^{\text{exa}} \|_2}{\| \phi^{\text{exa}} \|_2} \quad \text{et} \quad \text{Err}L^\infty = \frac{\| \phi^{\text{app}} - \phi^{\text{exa}} \|_\infty}{\| \phi^{\text{exa}} \|_\infty}.$$

Les conditions aux bords sont imposées par les solutions analytiques du problème traité, sauf pour le dernier cas (disque de Zalesak), où ces conditions sont données par des extrapolations linéaires.

2.4.1 Translation diagonale d'un cercle

Le domaine de calcul est un carré unitaire $\Omega = [0, 1]^2$. On teste le transport d'un cercle de rayon $r_0 = 0.15$ et de centre initial $(x_0, y_0) = (0.25, 0.25)$ qui subit une translation diagonale.

– La donnée initiale :

$$\phi_0(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - r_0.$$

– Le champ de vitesse :

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

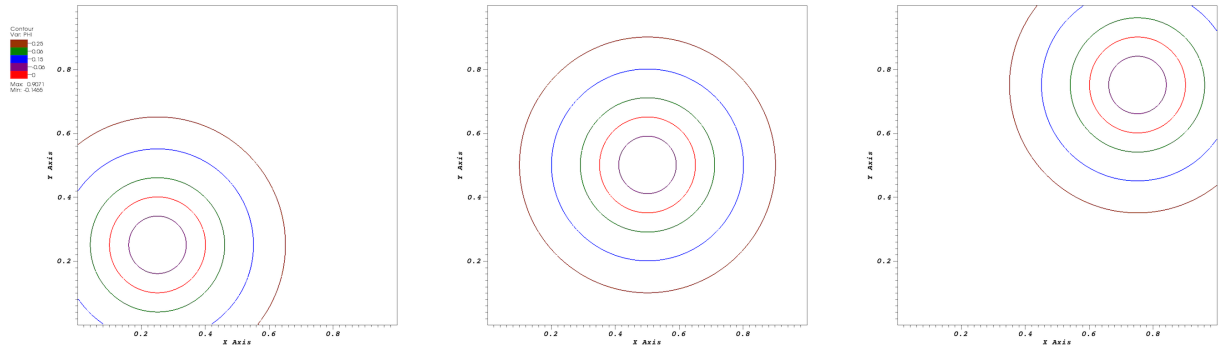
– La solution analytique :

$$\phi(x, y, z, t) = \sqrt{(x - x_0 - t)^2 + (y - y_0 - t)^2} - r_0.$$

Dans le tableau 2.1 nous donnons les résultats de l'étude de convergence après un transport d'une durées de 0.60. Dans la figure 2.4 nous donnons une illustration de quelques isocontours après des transports durant plusieurs unités de temps.

Maillage	ErrL^2	Ordre	ErrL^∞	Ordre
40x40	1.947E-03	-	3.313E-03	-
80x80	4.992E-03	1.95	8.023E-04	1.94
160x160	1.260E-04	1.98	2.046E-04	1.96
320x320	3.136E-05	2.01	5.194E-05	1.97

TABLE 2.1: Étude de convergence : translation d'un cercle.



(a) à $t = 0$ (b) à $t = 0.30$ (c) à $t = 0.60$

FIGURE 2.4: Quelques isocontours d'un cercle en translation diagonale (isocontour 0 en rouge).

2.4.2 Compression/décompression d'un cercle

Le domaine est toujours $\Omega = [0, 1]^2$. On teste le comportement d'un cercle de centre $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ et de rayon $r_0 = 0.4$ qui subit successivement une compression et une décompression par un champs de vitesse $\mathbf{v} = (x_0 - x, y_0 - y)$ puis par son opposé. Le but est de tester la robustesse du transport par des vitesses à divergence loin de zéro.

– La donnée initiale :

$$\phi_i(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - r_0.$$

– La solution analytique après compression à un intrant t_1 :

$$\phi_c(x, y, z, t_1) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - (r_0 - t_1).$$

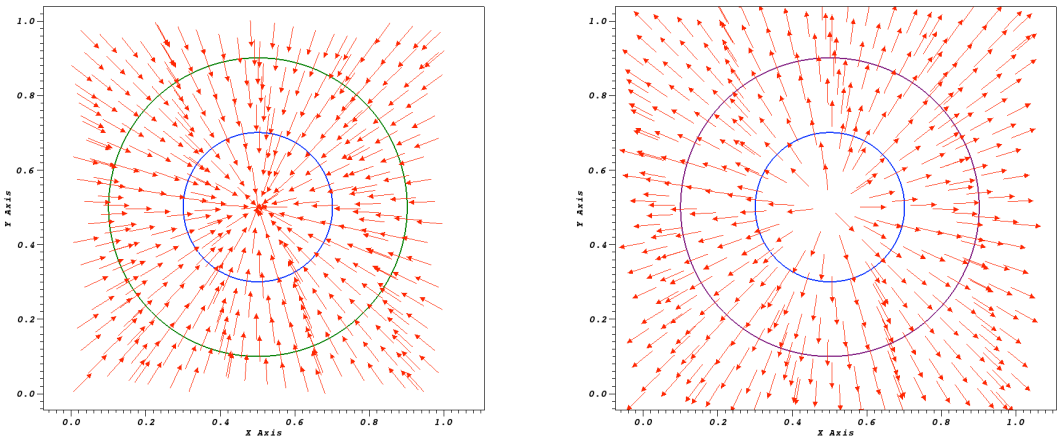
– La solution analytique après décompression à un intrant t_2 :

$$\phi_d(x, y, z, t_2) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - (r_0 - t_1 + t_2).$$

Pour le test on prend $t_1 = t_2 = 0.2$. Dans le tableau 2.2 une étude de convergence en comparant ϕ_i et ϕ_d est présentée. La figure 2.5 présente des isocontours 0.

Maillage	ErrL^2	Ordre	ErrL^∞	Ordre
40x40	2.420E-03	-	6.433E-03	-
80x80	6.368E-04	1.90	1.748E-03	1.84
160x160	1.649E-04	1.93	4.624E-04	1.89
320x320	4.230E-04	1.95	1.204E-04	1.92

TABLE 2.2: Étude de convergence : compression puis décompression d'un cercle.



(a) isocontour 0 de : ϕ_i en vert, ϕ_c en bleu (b) isocontour 0 de : ϕ_c en bleu, ϕ_d en mauve

FIGURE 2.5: Compression et décompression d'un cercle.

2.4.3 Rotation d'une sphère

Le domaine de calcul est cube unitaire $\Omega = [0,1]^3$. Dans ce cas test, nous allons faire tourner une sphère de centre $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.75, 0.5)$ et de rayon $r_0 = 0.15$ dans un champ de vitesse circulaire non déformant. Le transport est effectué de $t_0 = 0$ jusqu'à $t = 2\pi$ de telle manière que le cercle fasse un tour complet en retrouvant sa position initiale.

– La donnée initiale :

$$\phi(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - r_0.$$

– Le champ de vitesse :

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (y_0 - y, x - x_0, 0).$$

– La solution analytique :

$$\phi(x, y, z, t) = \sqrt{(x - x_c(t))^2 + (y - y_c(t))^2 + (z - z_0)^2} - r_0.$$

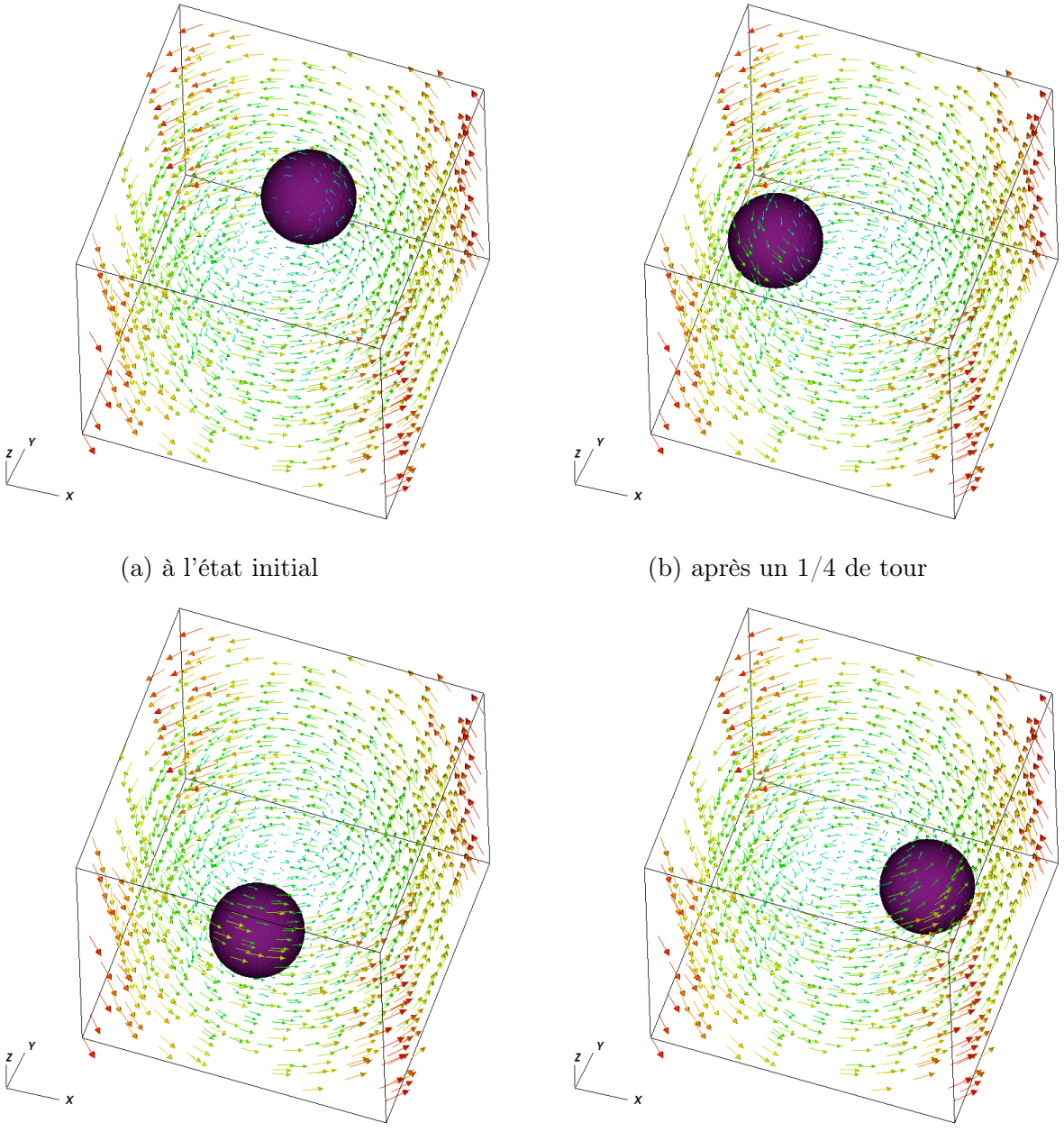
avec :

$$x_c(t) = x_0 - 0.25\sin(t) \text{ et } y_c(t) = y_0 + 0.25\cos(t).$$

Sur la figure 2.6, on visualise la rotation de la sphère à travers les isocontours de ϕ sur différentes étapes. Le tableau 2.3 donne une étude de convergence faite après un tour complet.

Maillage	ErrL^2	Ordre	ErrL^∞	Ordre
40x40	9.532E-03	-	8.666E-03	-
80x80	2.651E-03	1.79	2.3809.532E-03	1.82
160x160	7.268E-04	1.82	6.3999.532E-04	1.86
320x320	1.828E-04	1.98	1.6589.532E-04	1.93

TABLE 2.3: Étude de convergence : sphère en rotation.



(a) à l'état initial

(b) après un 1/4 de tour

(c) après 1/2 tour

(d) après 3/4 de tour

FIGURE 2.6: Visualisations d'une sphère en rotation.

2.4.4 Disque de Zalesak

Dans ce cas de test, on met en jeu la rotation d'un disque de Zalesak [104], disque évidé d'une fente rectangulaire suivant son diamètre. Cette configuration permet d'identifier les problèmes de dispersion et de diffusion du schéma numérique dans les régions où $\nabla\phi$ présente des singularités.

Dans le domaine $\Omega = [0, 100]^2$, on considère un cercle de rayon 15 possédant une fente de largeur 5 et de hauteur de 25 centré au point $(x_0, y_0) = (50, 75)$ (voir la figure 2.7). Le champ de vitesse est défini par : $\mathbf{v}(x, y) = (y_0 - y, x - x_0)$. Le transport est effectué jusqu'à $t = 2\pi$ de afin que le disque se retrouve exactement à sa position initiale.

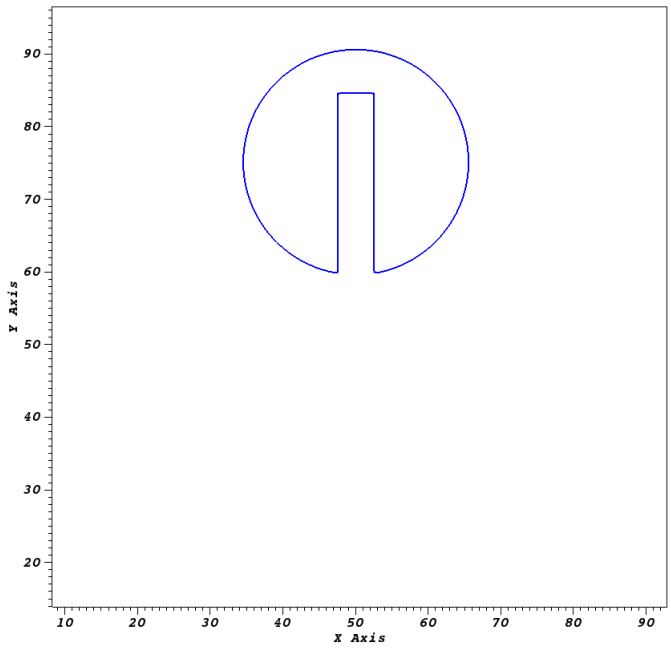
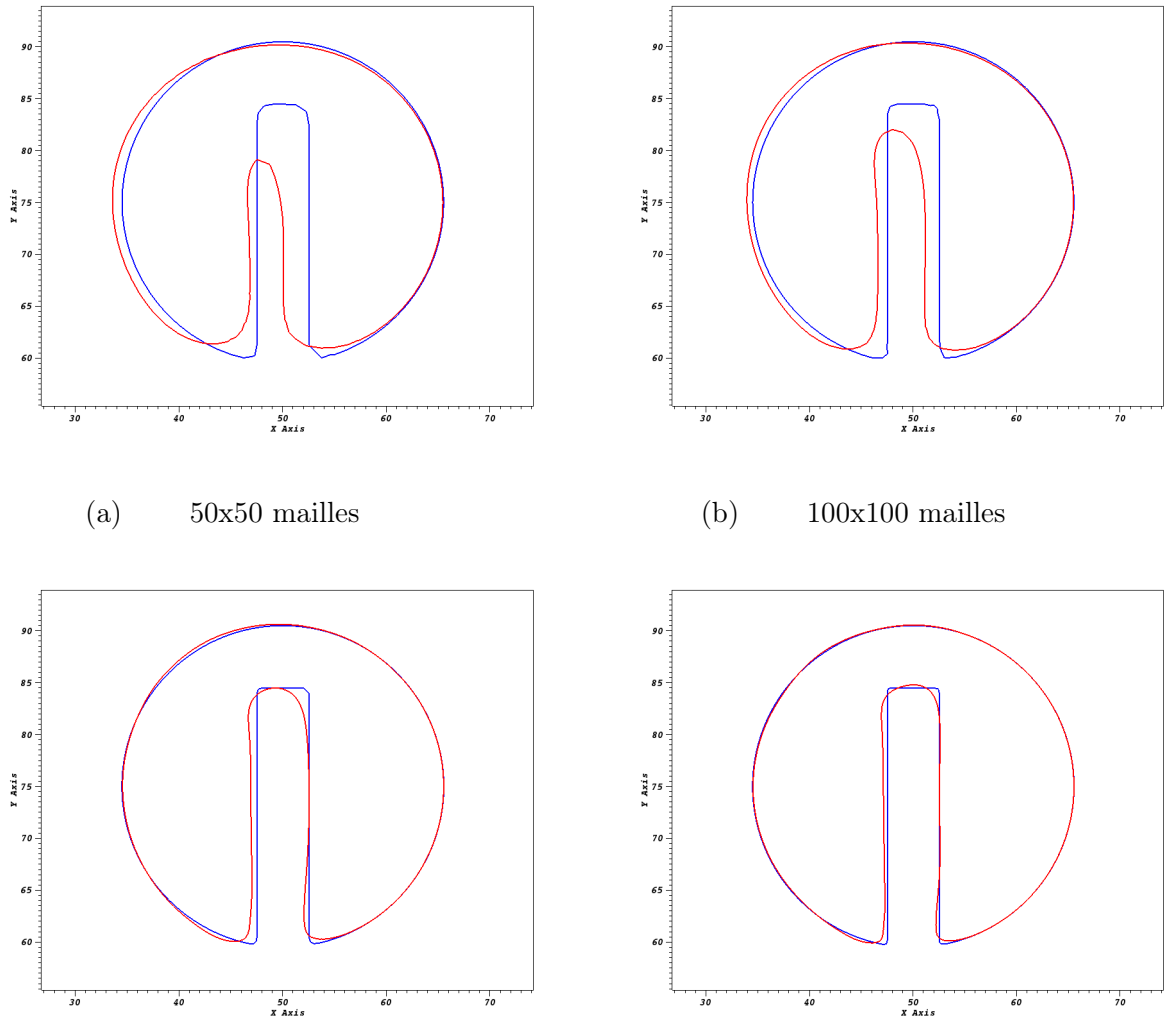


FIGURE 2.7: Un exemple du disque de Zalesak.

Le tableau 2.4 présente l'étude de convergence en calculant l'erreur sur une bande autour de l'isocontour 0. La figure 2.8 présente des illustrations du test pour différents maillages.

Maillage	ErrL^2	Ordre	ErrL^∞	Ordre
50^3	3.313E-03	-	5.250E-02	-
100^3	9.306E-04	1.78	1.590E-02	1.65
200^3	2.423E-04	1.92	4.208E-03	1.89
300^3	1.615E-04	2.01	1.073E-03	1.96

TABLE 2.4: Étude de convergence : test de la rotation du disque de Zalesak.



(a) 50x50 mailles

(b) 100x100 mailles

(c) 200x200 mailles

(d) 300x300 mailles

FIGURE 2.8: Cas test du disque de Zalesak pour différentes tailles de maille. En bleu le disque à l'état initial et en rouge le disque après un tour complet.

Nous avons donné ci-dessus quelques résultats graphiques du test de Zalesak où nous avons choisi de zoomer sur le disque pour mieux se rendre compte de la convergence vers une solution exacte. On constate que les plus fortes erreurs se concentrent au niveau des angles du disque de Zalesak où $\nabla\phi$ change brutalement de direction. Mais, on obtient une nette amélioration en comparant la solution sur un maillage grossier (figure 2.8a) avec la solution sur un maillage plus fin (figure 2.8d). Ce résultat qualitatif confirme l'étude de convergence présentée au tableau 2.4 où, comme dans les études de convergence des tests précédents, on obtient bien l'ordre 2 en espace pour les normes L^2 et L^∞.

2.5 Application à l'extension des vitesses

Le champ de vitesse que nous utiliserons pour transporter ϕ provient du calcul du cisaillement au niveau de l'interface (voir le chapitre précédent). Il faut que la vitesse de transport soit définie et régulière sur plusieurs mailles autour de l'interface, de manière à ce que la résolution de l'équation de transport induise un déplacement précis de Γ. Dans ce cas, on utilise une procédure d'extension de vitesse depuis l'interface. Ainsi, pour étendre une quantité scalaire c_Γ selon la direction normale à l'interface, il suffit de résoudre une autre équation de transport, à savoir :

$$\partial_t c_\Gamma^{ext} + \mathrm{sgn}(-\phi)\frac{\nabla\phi}{\| \nabla\phi \|} \cdot \nabla c_\Gamma^{ext} = 0. \tag{2.7}$$

La condition limite est $c_\Gamma^{ext} = c_\Gamma$ sur Γ et *sgn* est la fonction signe. L'extension a pour but de faire évoluer toutes les lignes de niveau de façon similaire. Elle doit ainsi permettre de garder ϕ proche d'une fonction distance signée. Donc, nous allons effectuer des tests pour vérifier que l'équation (2.7) permet de réaliser une bonne extension même si la quantité initiale c_Γ varie fortement et l'interface présente une normale oscillante.

Comme illustré dans la figure 2.9, on considère le domaine $\Omega = [0,1]^2$ et on prend une interface Γ sous forme d'un cardioïde déformé. La quantité initiale c_Γ est donnée en coordonnées polaires (r,θ) par la fonction analytique $c_\Gamma = (r\sin(\theta)+0.5)\sin(10\theta)$ sur une bande où $-4h \leq \phi \leq 0$ (h est le pas du maillage) ; ailleurs elle est nulle. On effectue le transport dans la direction où ϕ est négative le long de ses gradients.

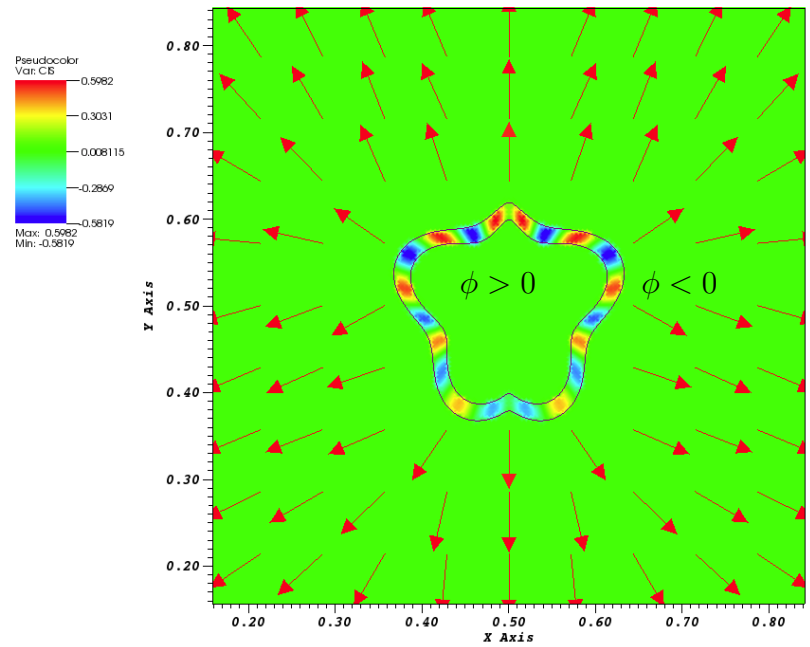


FIGURE 2.9: La donnée c_Γ à l'état initial et le champ de vitesse pour le transport.

En résolvant l'équation (2.7) sur plusieurs périodes, on observe que c_Γ a été bien étendue. Dans les deux figures qui suivent, on donne des illustrations de ces extensions.

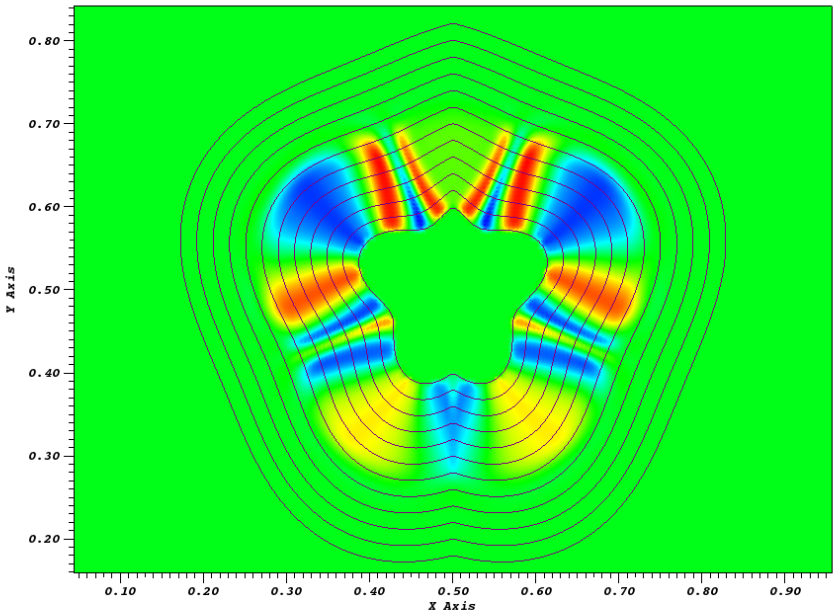


FIGURE 2.10: c_Γ^{ext} après une extension sur 20 mailles.

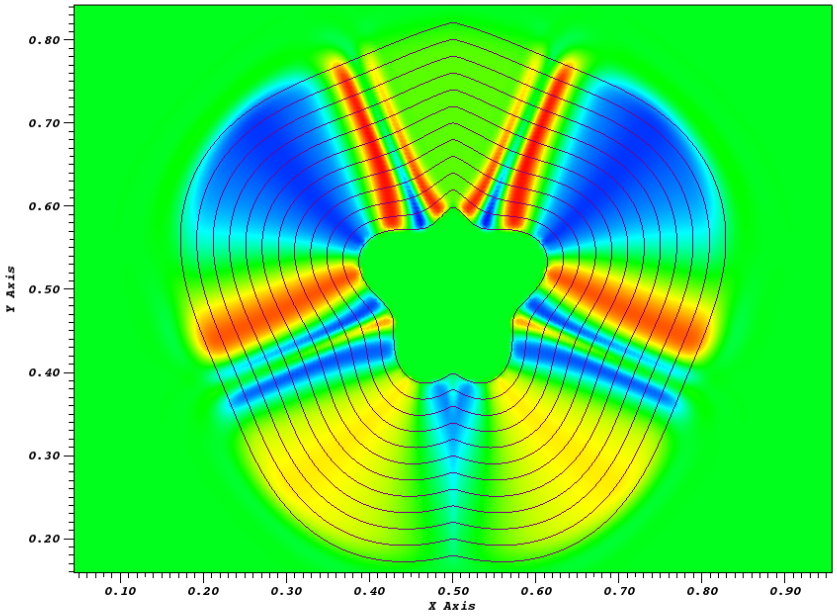


FIGURE 2.11: c_Γ^{ext} après une extension sur 40 mailles.

Il est par ailleurs intéressant de déterminer les variations de c_Γ^{ext} induites par l'extension au cours du temps. Pour cela, on calcule les valeurs minimales et maximales de c_Γ à l'état initial et après quelques extensions. Dans les deux tableaux suivants on donne ces valeurs pour deux tailles de grilles, 100^2 et 200^2, en variant le temps de transport de $t = 0$ (l'état initial) à $t = 40h$:

	Grille de taille 100^2		Grille de taille 200^2	
t	Min	Max	Min	Max
0	-0.601	0.598	-0.581	0.598
10h	-0.625	0.608	-0.592	0.610
20h	-0.633	0.614	-0.592	0.610
30h	-0.636	0.616	-0.592	0.614
40h	-0.637	0.616	-0.592	0.615

TABLE 2.5: Variations de c_Γ^{ext} lors de l'extension.

On constate que l'erreur commise entre les valeurs minimales et maximales à un instant t en comparant avec les mêmes valeurs à l'instant initial est de l'ordre de 3% ; ce qui, pour nos applications d'extension de la vitesse d'érosion (voir chapitre 5) est tout à fait satisfaisant. Ainsi, si l'on considère le cas où l'on doit étendre un champs de vitesse $\mathbf{v}_\Gamma = c_\Gamma \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$ (où c_Γ représentera le cisaillement calculé au niveau de l'interface Γ) dans tout le domaine, il suffit de résoudre le problème (2.7) induit par la donnée initiale c_Γ. Une fois l'état asymptotique atteint sur le tout domaine de calcul, on dispose d'un nouveau champ de vitesse étendu $\mathbf{v}_\Gamma^{ext}$.

2.6 Redistanciation

La construction de l'équation de transport de la Level Set a été faite pour que chaque isocontour soit advecté par le champ de vitesse local. Lorsque le champ utilisé a un sens global, comme dans la plupart des simulations numériques, les lignes de niveaux de la Level Set ne restent pas forcement à la même distance l'un de l'autre puisque le transport va probablement les compresser ou les étirer. Dans ce cas, la propriété de *fonction distance signée* donnée initialement à ϕ est perdue pendant le transport et cela signifie que $\|\nabla\phi\| \neq 1$. En effet, D.L. Chopp avait mis en évidence dans [23] des exemples d'apparition de zones où ϕ présente de forts gradients, ou au contraire d'autres où les lignes de niveaux s'écartent. Il avait proposé donc une ré-initialisation qui consiste à recalculer périodiquement ϕ pour lui permettre de redevenir une fonction de distance sans en altérer l'interface de valeur nulle. En gardant donc au cours du calcul la propriété :

$$\|\nabla\phi\| = 1.$$

2.6.1 Équation de redistanciation

Nous proposons une méthode qui permet de corriger la perte de la propriété distance signée en effectuant des ré-initialisations *a posteriori*. Nous nous appuyons sur les résultats E. Rouy et A. Tourin [83], puis M. Sussman *et al.* [90], qui ont mis au point un algorithme de ré-initialisation de la Level Set, dit algorithme de redistanciation. À partir du seul isocontour valable, qui est l'interface, on corrige les positons des autres isocontours. Il consiste donc à résoudre sur un temps fictif $t^* \in [0, T^*]$ $(T^* > 0)$ et pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_{t^*}\psi + \mathrm{sgn}(\phi(\mathbf{x},t))\,(\|\nabla\psi\| - 1) & = 0, \\ \psi(\mathbf{x}, t^* = 0) & = \phi(\mathbf{x},t). \end{cases} \tag{2.8}$$

La solution stationnaire de cette équation est bien celle que l'on recherche. $\psi(\mathbf{x}, t^*)$ est la distance signée à l'interface pour tous les points situés à une distance inférieure ou égale à T^* de Γ. En posant $\mathbf{w} = \mathrm{sgn}(\psi)\frac{\nabla\psi}{\|\nabla\psi\|}$, on peut réécrire l'équation (2.8) sous la forme d'une équation de transport à la vitesse $\mathbf{w}$ et dont le terme source est non nul :

$$\partial_{t^*}\psi + \mathbf{w}\cdot\nabla\psi = \mathrm{sgn}(\psi). \tag{2.9}$$

Cette formulation montre que l'information se propage de part et d'autre de l'interface, dans la direction normale avec une vitesse unitaire. Cela empêche les caractéristiques de se croiser. De plus, l'ajout de la fonction signe permet d'avoir une interface intacte en maintenant $\psi = 0$ aux points de $\phi = \phi_0$. Mais pour que l'isocontour 0 de ψ reste inchangé numériquement, cette fonction doit être lissée sur quelques mailles (en général 2 ou 3) tout en gardant la propriété $\mathrm{sgn}(0) = 0$.

Dans l'approche élaborée par E. Rouy et A. Tourin dans [83], le transport est fait en deux étapes : la première dans les zones où $\psi > 0$, puis la deuxième dans celles où $\psi < 0$; il est donc impératif de garder une bande autour de l'interface $\psi = 0$ dans laquelle la ligne de niveau 0 reste inchangée au cours de la résolution de l'équation (2.9). C'est dans ce but que M. Sussman *et al.* ont proposé dans [90] la fonction signe suivante :

$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \epsilon^2}}, \tag{2.10}$$

où $\epsilon \ll 1$, et dans la pratique, il est de l'ordre d'un pas d'espace h. La vitesse $\mathbf{w}$ étant unitaire, le pas de temps et le pas d'espace peuvent être confondus. On peut donc prendre : $\delta t^* = h/2$, ce qui nous permet de réaliser 3 itérations de redistanciation (ce qui correspond au meilleur compromis entre la précision et le temps de calcul).

Par les discrétisations utilisées précédemment (voir la section 2.3), on résout l'équation (2.9) en utilisant le paramètres δt^* et la fonction signe définie en (2.10), puis en (2.11).

Remarque 2

D. Peng et al. ont proposé en [76] une version plus raffinée pour la fonction signe :

$$sgn(\psi) = \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 + \|\nabla\psi\|^2\epsilon^2}}. \tag{2.11}$$

Ce qui permet d'adapter la régularisation à l'échelle spatiale de ψ.

2.6.2 Exemple de redistanciation

Afin de valider la résolution numérique de l'équation de redistanciation, nous présentons un test fait par G. Russo et P. Smereka dans [84], qui met en lumière les effets de la redistanciation dans un cas très rude. Le domaine de calcul est le carré $\Omega = [0, 10]^2$ et la donnée initiale est une ellipse perturbée (voir figure 2.12 où l'isocontour 0 est en noir) dont l'équation est :

$$\phi_0(x, y) = \beta(x, y)\left(\sqrt{\frac{(x-5)^2}{a^2} + \frac{(y-5)^2}{b^2}} - 1\right)$$

où : $\beta(x, y) = \epsilon + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, avec : $\epsilon = 0.1, x_0 = 1.5, y_0 = 3, a = 4$ et $b = 2$. ϕ_0 présente des zones de forts et faibles gradients au voisinage de $\phi_0 = 0$.

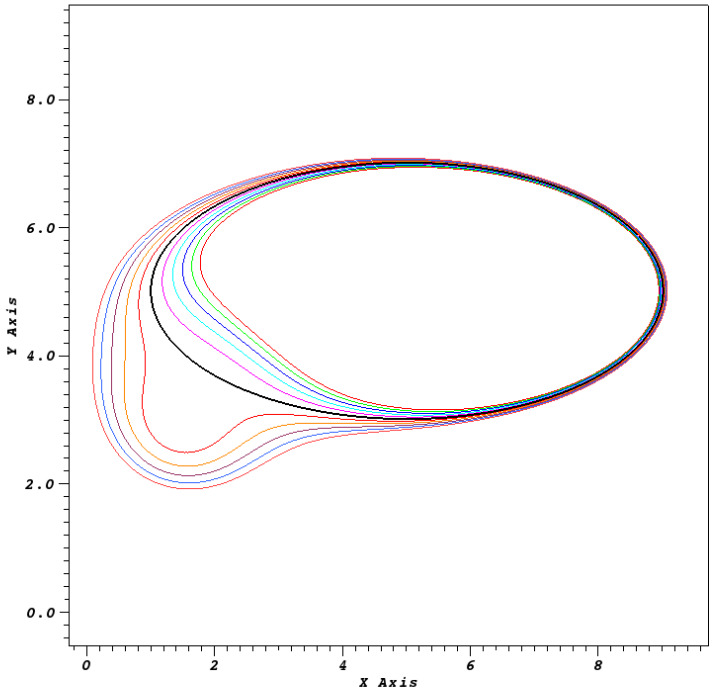


FIGURE 2.12: Lignes de niveau de la donnée initiale elliptique perturbée.

Le résultat du 800$^{\text{ème}}$ itéré de la redistanciation est donné dans la figure 2.13. Contrairement au premier tracé qui présente des perturbations, sur le deuxième, on aperçoit qu'il n'y a pas de différence discernable de la position de l'isocontour 0 alors que les autres iso-contours de la Level Set sont positionnés correctement des deux cotés de l'interface. Ceci permet de valider le schéma et rendre compte de l'influence de la régularisation de la fonction signe.

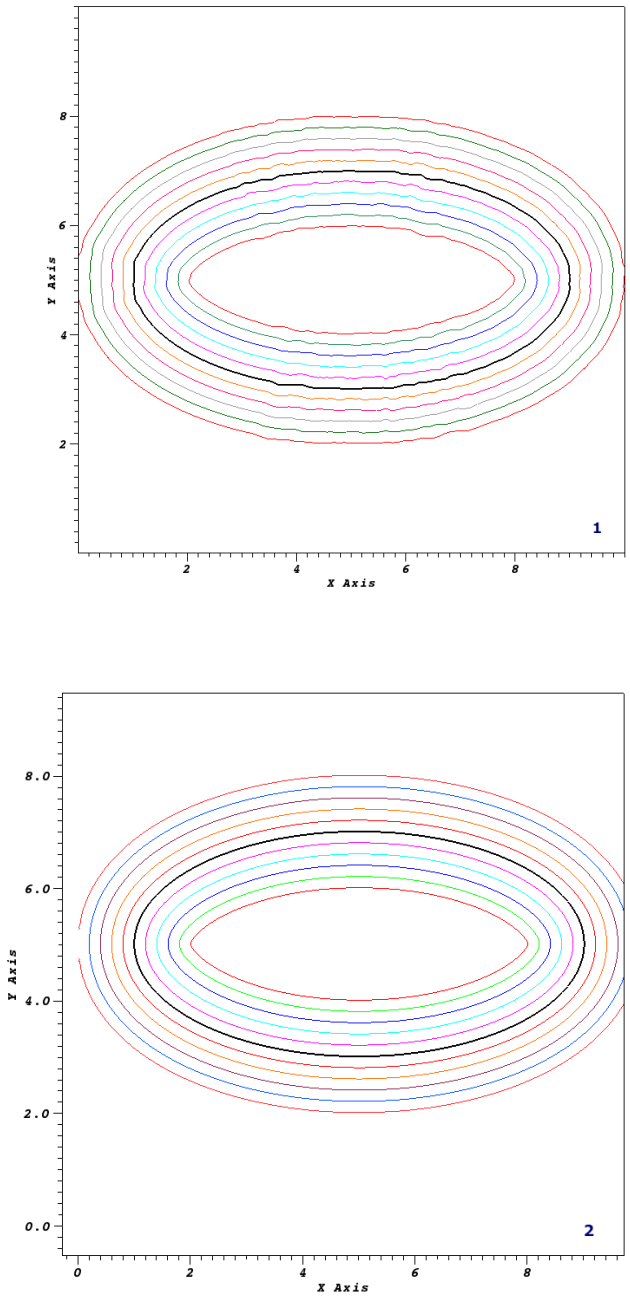


FIGURE 2.13: Lignes de niveau après redistanciation de la donnée initiale (maillage 200^2). La première avec la fonction signe (2.10), la seconde avec la fonction (2.11).

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode Level Set assortie d'un ensemble d'outils qui nous permettront le suivi d'interface dans le cadre des simulations numériques de l'érosion. D'abord, nous avons montré qu'on peut repérer explicitement et avec précision la position de chaque milieu et de l'interface et obtenir également le champ de normales à cette dernière. Puis, nous avons considéré l'équation de transport qui traite l'évolution de la Level Set. Par une série de tests, on a prouvé que le schéma implémenté pour cette équation convenait pour notre étude. Nous avons montré aussi que ce schéma peut être appliqué parfaitement à l'extension des vitesses, outil très important dans le cas de l'érosion (voir chapitre 5). Finalement, nous avons traité le cas de la redistanciation, ce qui pourrait être nécessaire pour corriger des fluctuations au niveau de l'interface au cours du transport.

3 Schémas et maillages DDFV

Dans ce chapitre, nous décrivons les maillages et les principaux résultats de la méthode de volumes finis, appelée DDFV acronyme de "Discrete Duality Finite Volume". Avec ces schémas, nous faisons les discrétisations spatiales des équations de Stokes et de Navier-Stokes décrivant des écoulements d'un fluide incompressible sur des maillages conformes et non conformes. Le principe consiste à construire des opérateurs gradient, divergence et rotationnel discrets, puis de remplacer les opérateurs qui interviennent dans les EDP par leurs équivalents discrets. Ces opérateurs agissent sur des maillages quelconques par un choix judicieux des inconnues.

Les méthodes DDFV sont une généralisation des schémas MAC. Elles ont été introduites et étudiées par F. Hermeline dans [53] et depuis, plusieurs versions ont vu le jour [32], [34], [17]. L'idée générale de ces méthodes est de combiner deux maillages Volumes Finis distincts en les superposant : le maillage primal et le maillage dual où les cellules sont construites autour des sommets du maillage primal. Un troisième maillage, appelé maillage diamant est nécessaire pour la construction d'un gradient consistant. Ceux-ci conservent la structure du problème continu, si bien qu'il est possible d'écrire une formule de Green discrète qui donne un équivalent de la formule continue. Les opérateurs ainsi construits sont en dualité discrète, ce qui donne le nom à la méthode.

Le premier schéma que nous avons étudié est basé sur la méthode proposée par Y. Coudière et F. Hubert [30], puis détaillée par S. Krell *et al.* [58, 59]. Dans ce schéma, les inconnues sont localisées aux centres des cellules, aux sommets et aux faces, et également aux milieux des arêtes, d'où l'appellation CeVeFE-DDFV (Cell/Vertex/Face/Edge). De cette façon, on doit tenir compte d'un autre maillage dit "faces-arêtes". Le second schéma auquel nous nous sommes intéressé et qui est adaptée dans ce travail, repose sur une méthode appelée CeVe-DDFV. Contrairement au premier schéma, les inconnues ne sont pas positionnées aux milieux des arêtes. Cette méthode a été introduite par C. Pierre [78] et utilisée également par Y. Coudière *et al.* [29]. La méthode que nous avons développée est basée sur la variante étudiée par B. Andreianov *et al.* [1, 2]. La particularité de ce schéma est que le maillage primal et le maillage dual recouvrent chacun exactement une fois le domaine. Néanmoins, les relations de dualité discrètes restent conservées.

3.1 Définitions et notations

3.1.1 Construction du maillage

Soit Ω un ouvert polygonal convexe borné de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. On définit un maillage DDFV par une discrétisation du domaine Ω constituée d'un couplet $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \mathcal{D})$ tel que :

- $\mathcal{T}$ est l'ensemble composé par des cellules et des sommets.
- $\mathcal{D}$ est l'ensemble relatif aux interfaces.

Le maillage $\mathcal{M}$ est défini par deux ensembles complémentaires, le domaine est ainsi recouvert deux fois et peut être discrétiser par deux maillages $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$.

Le maillage $\mathcal{T}$

Le maillage $\mathcal{T}$ est composé d'un ensemble des mailles primales et duales relatives respectivement aux cellules $\mathcal{K}$ et aux sommets $\mathcal{V}$.

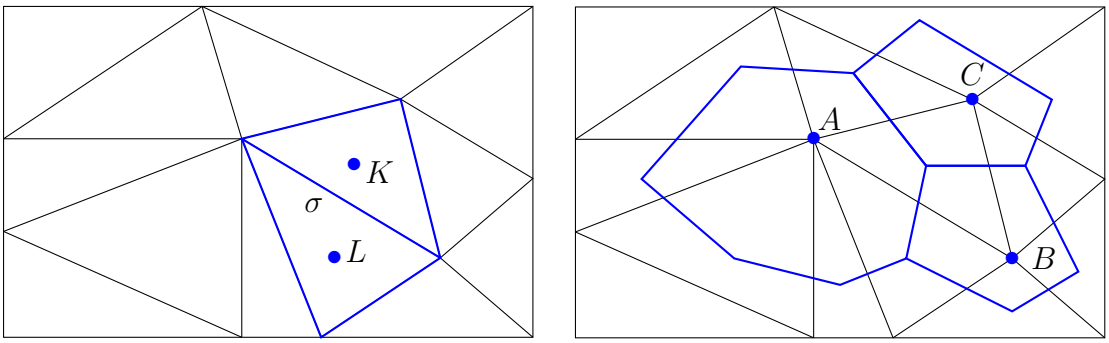
- Les mailles primales $\mathcal{K}$ sont des polygones disjoints auxquels on associe les points K, en général le centre de gravité de la cellule $\mathcal{K}$. Ces points sont appelés nœuds du maillage primal. Ils vérifient les deux relations suivantes où $\mathcal{L}$ est une autre cellule :

$$\bigcup_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathcal{K} = \overline{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset \ \text{ si } \ \mathcal{K} \neq \mathcal{L}.$$

- Pour toutes les mailles primales voisines $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, on suppose que $\partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{L}$ est une face et on la note $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$ (voir figure 3.1a). L'ensemble des faces, noté $\mathcal{F}$, est tel que :

$$\bigcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \sigma = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \partial\mathcal{K}.$$

- Les noeuds du maillage dual $\mathcal{V}$ sont les sommets du maillage primal (voir figure 3.1b). Ce maillage est donc formé par les sommets A des faces σ.



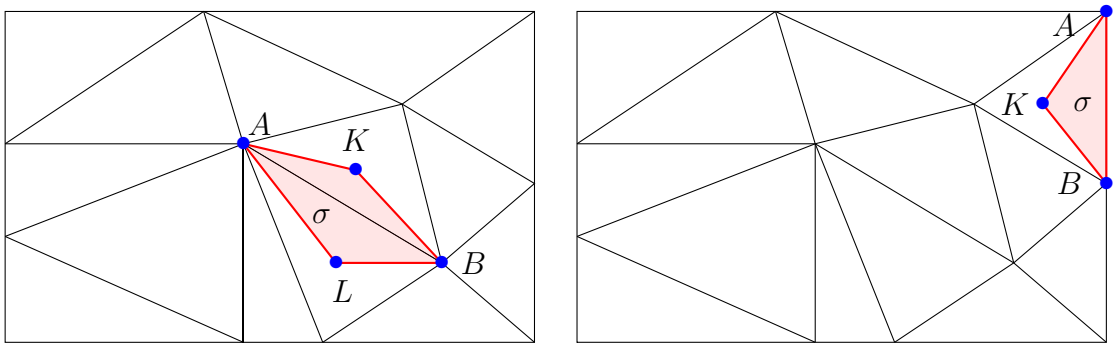
(a) Cellules $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ (b) Sommets A, B et C

FIGURE 3.1: Exemple de mailles primales et duales.

Le maillage $\mathcal{D}$

À chaque face $\sigma \in \mathcal{F}$, on associe la cellule diamant $D_\sigma \in \mathcal{D}$ de la manière suivante :

- Pour une face σ interne, dont on note l'ensemble par $\mathcal{F}^{int}$, on considère les deux cellules voisines $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ telle $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$. Le diamant D_σ est défini comme l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\mathcal{K} \cup \sigma \cup \mathcal{L}$ (voir figure 3.2a).
- Pour une face σ du bord, dont on note l'ensemble par $\mathcal{F}^b$, on considère une cellule $\mathcal{K}$ telle que $\sigma = \partial\mathcal{K} \cap \partial\Omega$. Le diamant D_σ est défini comme l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\sigma \cup \mathcal{K}$ (voir figure 3.2b).



(a) Diamant interne : $\sigma \in \mathcal{F}^{int}$ (b) Diamant au bord : $\sigma \in \mathcal{F}^b$

FIGURE 3.2: Exemples de diamant D_σ.

En considérant une face σ et sa cellule de centre K on peut construire un demi-diamant $D_{\sigma,K}$. Ainsi, un diamant $D_{\sigma,K}$ est la réunion de deux demi-diamants $D_{\sigma,K}$ et $D_{\sigma,L}$. Les demi-diamants sont 2 à 2 disjoints et couvrent entièrement le domaine Ω, de sorte que :

$$\bigcup_{\substack{\mathcal{K}\in\mathcal{T} \\ \sigma\in\partial\mathcal{K}}} D_{\sigma,K} = \Omega.$$

Remarque 3

- *Tout diamant du bord D_σ peut être réduit au demi-diamants $D_{\sigma,K}$. Dans ce cas, les points L se confondent avec les points F centre de des faces σ, autrement dit :*

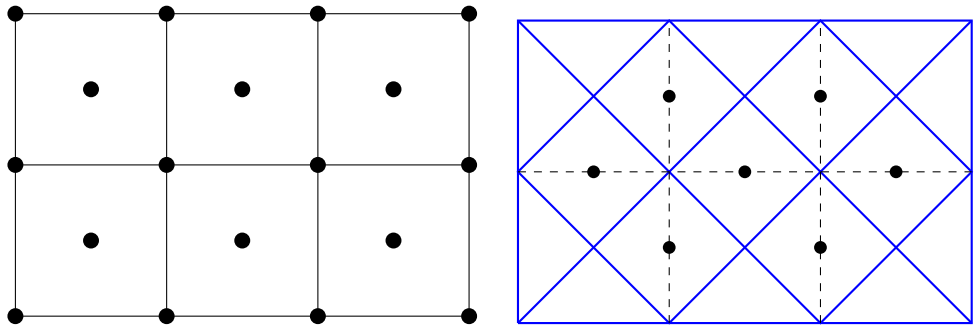
$$\text{si } \sigma \in \mathcal{F}^b \text{ alors } L = F.$$

- *On associe à chaque demi-diamant $D_{\sigma,K}$ une unique face σ et une unique cellule $\mathcal{K}$.*

Nous traitons par la suite deux exemples concrets et importants de maillage DDFV en dimension 2 puis en dimension 3 adaptés respectivement pour les domaines quadrilatères et parallélépipédiques et leurs unions.

Maillage 2D DDFV

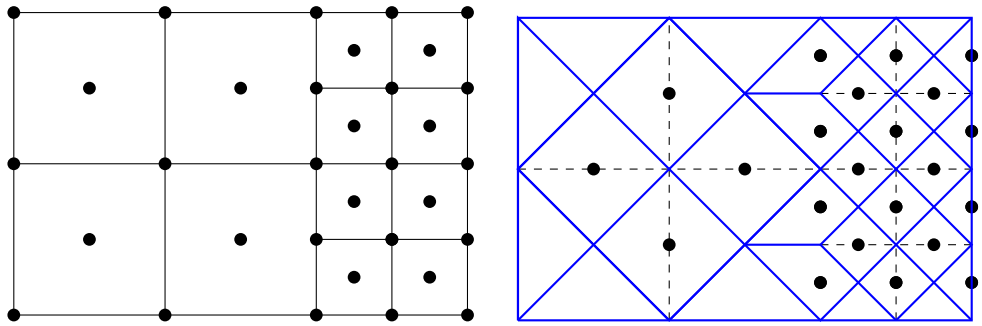
En dimension 2, les faces sont des segments de droite non réduits à un point. Les cellules sont sous forme triangulaire (voir les figures précédentes) ou quadrilatère (voir la figure 3.3). Grâce aux mailles primales et duales, on définit les mailles diamants qui composent le maillage $\mathcal{D}$ comme illustré dans figure 3.4. En pratique on remarque que ces diamants sont une réunion de triangles disjoints.



(a) Maillage $\mathcal{T}$ (b) Maillage $\mathcal{D}$

FIGURE 3.3: Maillage cartésien 2D conforme.

Le maillage peut être non conforme comme illustré dans la figure 3.4.



(a) Maillage $\mathcal{T}$ (b) Maillage $\mathcal{D}$

FIGURE 3.4: Maillage cartésien 2D non conforme.

Maillage 3D DDFV

En dimension 3, les faces sont des polygones ; en pratiques ce sont des triangles ou des quadrilatères. Pour simplifier les notations et pour donner des illustrations, nous prenons un parallélépipède rectangle, comme illustré dans la figure 3.5 partitionné de façon uniforme (à noter que ni la forme cubique, ni l'uniformité des mailles n'est importante ; la construction se généralise aux maillages cartésiens non conformes).

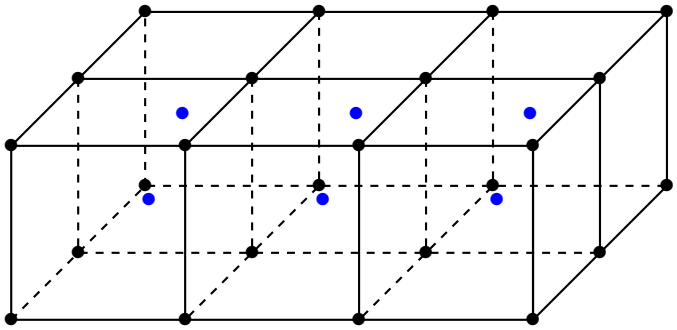


FIGURE 3.5: Maillage $\mathcal{T}$ d'un cube.

Dans cette étude, on travaille avec des faces $\sigma \in \mathcal{F}$ sous forme quadrilatérale. Notons F le centre de σ. Les diamants ont la forme d'octaèdres construits à partir des centres K et L des deux cubes primaires $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ et des faces $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$ qu'ils partagent. Ainsi, comme illustré dans la figure 3.6, les diamants D_σ sont formés donc par les six points suivants :

- A, B, C et D : les sommets qui constituent la face σ ;
- K et L : les centres de deux cellules voisines partageant la même face σ.

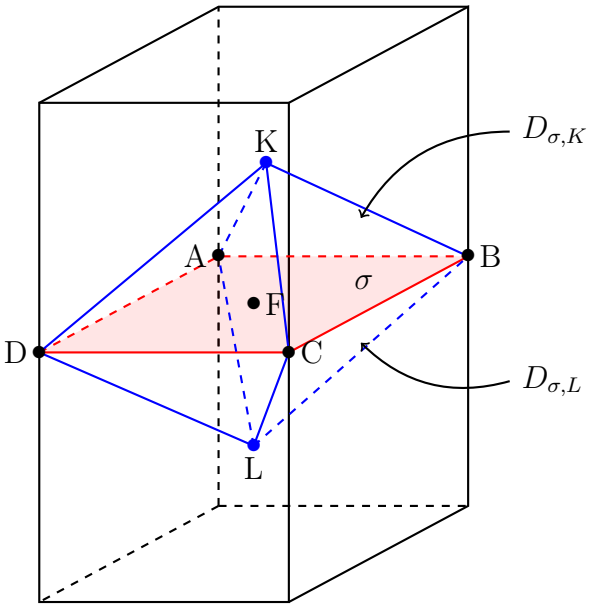


FIGURE 3.6: Maille diamant 3D.

Le maillage $\mathcal{T}$ est constitué par les nœuds sommets et cellules (A et K) et le maillage $\mathcal{D}$ par les centres des faces (F). Sur le bord du domaine, comme vu précédemment, les diamants sont réduits aux demi diamants $D_{\sigma,K}$ et les points $L = F$.

Remarque 4

L'orientation des points A, B, C, D est choisie de telle façon à avoir $det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FK}) > 0$.

3.1.2 Volumes de contrôle

Chaque élément du maillage DDFV a un volume de contrôle. Il s'agit d'une mesure que l'on associe à cet élément. On note $|X|$ la mesure d'un objet géométrique X. Les grandeurs $|K|$ et $|A|$ désignent respectivement les mesures dans $\mathbb{R}^d$ d'une cellule primale de centre K et d'une cellule duale dont le centre est le sommet A. Pour une interface σ, $|\sigma|$ désigne sa mesure en dimension $d-1$ (sa longueur si $d=2$ ou son aire si $d=3$).

Afin de calculer les volumes de contrôle de ces éléments, on introduit tout d'abord une décomposition de chaque demi diamant $D_{\sigma,K}$ en simplexe. Les diamants formant une partition du domaine, cette décomposition aboutit à une partition du domaine en simplexe. En dimension 2 ces simplexes sont des triangles indexés sur les sommets de σ, en dimension 3, ce sont des tétraèdres indexés sur les arêtes de σ (voir figure 3.7 et 3.10).

– **En 2D** :

Soient A et B les sommets d'une face σ de centre F. On définit deux triangles $T^A_{\sigma,K}$ et $T^B_{\sigma,K}$ comme :

$$T^A_{\sigma,K} = KAF \quad , \quad T^B_{\sigma,K} = KBF.$$

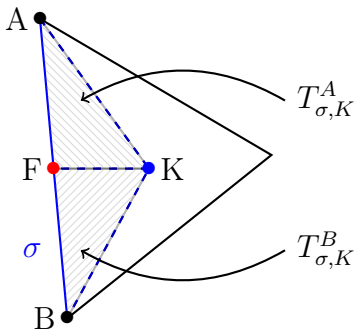


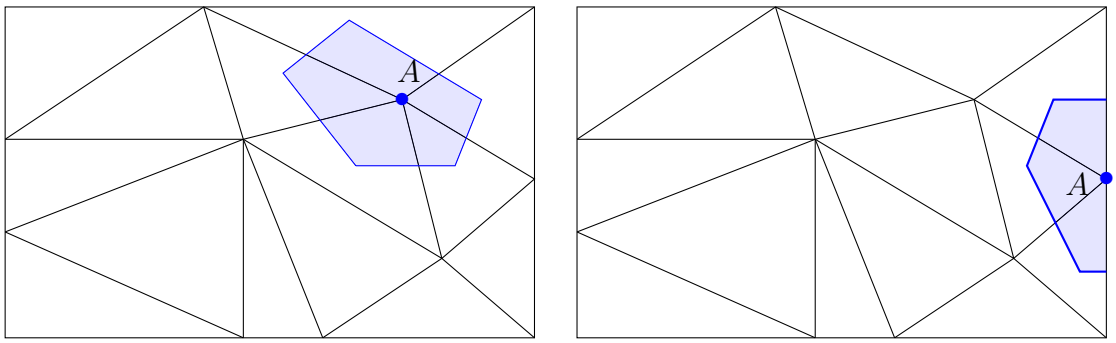
FIGURE 3.7: Décomposition en simplexe d'un demi diamant 2D.

Les volumes de contrôle sont :

$$|K| = \sum_{\substack{A\in\partial\mathcal{K}\\ \sigma\ni A}} |T^A_{\sigma,K}| \quad , \quad |A| = \sum_{\substack{K\in\partial\mathcal{V}\\ \sigma\ni A}} |T^A_{\sigma,K}|.$$

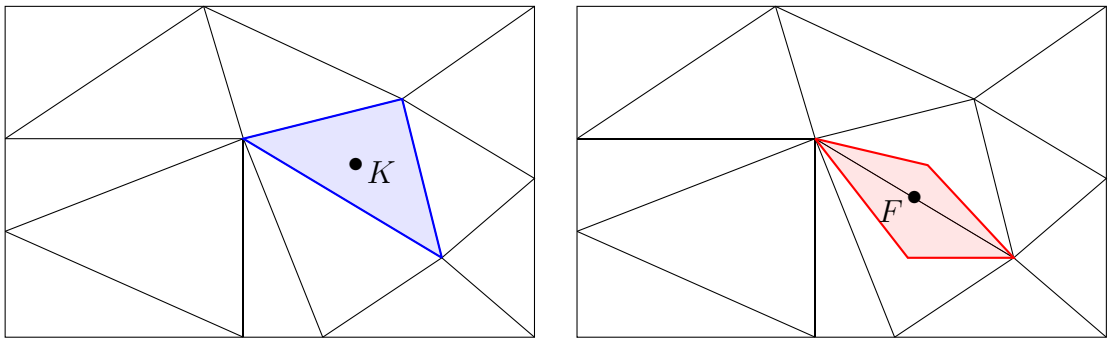
$$|D_{\sigma,K}| = |T^A_{\sigma,K}| + |T^B_{\sigma,K}| \quad , \quad |D_\sigma| = |D_{\sigma,K}| + |D_{\sigma,L}|.$$

L'aire du triangle $T^A_{\sigma,K}$ constitue l'élément de base avec lequel nous assemblons les volumes de contrôle des maillages $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$. Dans les figures 3.8 et 3.9a, on illustre les volumes de contrôles d'un nœud A (à l'intérieur et au bord du domaine), d'une cellule de centre K et d'un diamant de centre F.



(a) A à l'intérieur du domaine (b) A au bord du domaine

FIGURE 3.8: Volumes de contrôle d'une cellule duale dont le sommet est A.



(a) Cellule : volume de contrôle $|K|$ (b) Diamant : volume de contrôle $|D_\sigma|$

FIGURE 3.9: Volume de contrôle d'une cellule primale et d'un diamant.

– **En 3D** :

On rappelle que dans cette étude, en 3D, on travaille avec des faces quadrilatérales. Soient A, B, C et D les sommets d'une face σ. On considère le sommet A (les autres sommets sont interchangeables) ; Soient E_1 et E_2 les milieux respectifs des arêtes $[A, B]$ et $[A, D]$ et soit F le centre de σ.

On définit deux tétraèdres $T_{\sigma,K}^{E_1}$ et $T_{\sigma,K}^{E_2}$ comme (voir figure 3.10) :

$$T_{\sigma,K}^{E_1} = KAFE_1 \quad , \quad T_{\sigma,K}^{E_2} = KAFE_2.$$

Les volumes de contrôles sont :

$$|K| = \sum_{\substack{E_i \in \partial\mathcal{K} \\ \sigma \ni E_i}} |T_{\sigma,K}^{E_i}| \quad , \quad |A| = \sum_{\substack{K \in \partial\mathcal{V} \\ \sigma \ni E_i}} |T_{\sigma,K}^{E_i}|.$$

$$|D_{\sigma,K}| = \sum_{E_i \in \partial\mathcal{K} \cap \sigma} |T_{\sigma,K}^{E_i}|.$$

$$|D_\sigma| = |D_{\sigma,K}| + |D_{\sigma,L}|.$$

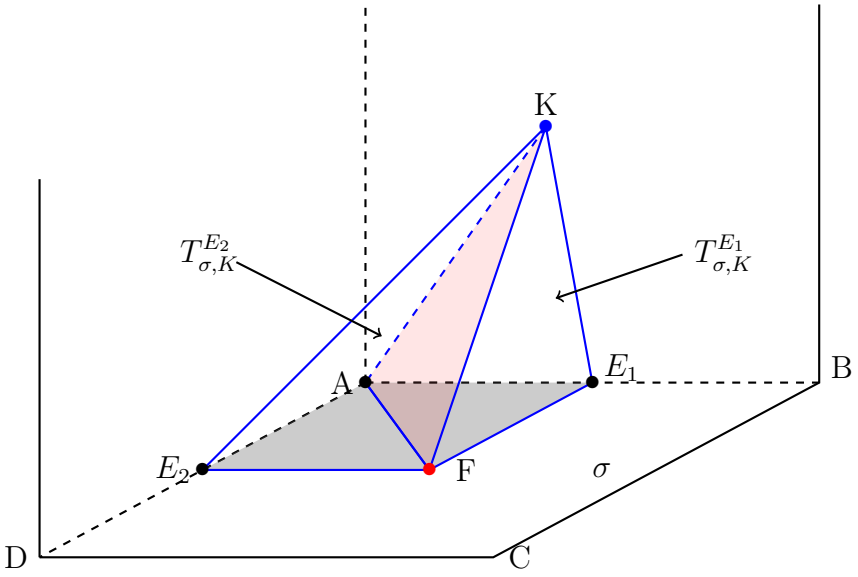


FIGURE 3.10: Décomposition en simplexe d'un demi diamant 3D.

Dans le cas cartésien on a :

– Le volume du tétraèdre $T^{E_1}_{\sigma,K}$ est :

$$|T^{E_1}_{\sigma,K}| := \frac{1}{6}|det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE_1}, \overrightarrow{AK})|.$$

– Le volume d'un demi diamant $D_{\sigma,K}$ est :

$$|D_{\sigma,K}| := \frac{1}{6}|det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FK})|.$$

3.1.3 Normales extérieures aux volumes

À partir des volumes de contrôle définis autour de chaque élément du maillage $\mathcal{T}$, nous obtenons les surfaces du bord de chaque volume $\mathcal{K}$ et $\mathcal{V}$ notées respectivement $\partial\mathcal{K}$ et $\partial\mathcal{V}$. Ces surfaces sont portées par les vecteurs normaux aux bords $\mathbf{N}^\sigma_\mathcal{K}$ et $\mathbf{N}^\sigma_\mathcal{V}$.

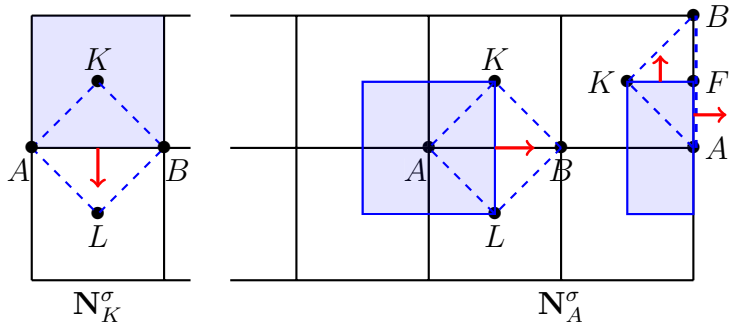


FIGURE 3.11: Vecteurs normaux aux cellules primales et duales (internes et aux bord).

Chaque vecteur normal extérieur à un volume de contrôle d'un élément X peut être associé à une face σ tel que $X \in D_\sigma$ (voir figure 3.11 où $\sigma = [A, B]$). Pour déterminer les vecteurs normaux on utilise la décomposition en simplexe des diamants $D_{\sigma,K}$.

En 2D :

– Cas d'une cellule primale $\mathcal{K}$: soient K le centre de cette cellule et $\sigma = [A, B]$ une de ses arêtes, comme illustré dans la figure 3.12, on peut donner l'expression du vecteur $\mathbf{N}_\mathcal{K}^\sigma$ sous la forme :

$$\mathbf{N}_\mathcal{K}^\sigma = \overrightarrow{AF}^\perp + \overrightarrow{FB}^\perp.$$

Les deux parties du vecteur $\mathbf{N}_\mathcal{K}^\sigma$ correspondent aux vecteurs normaux aux interfaces formées par l'intersection du volume $\mathcal{V}$ et les deux triangles $T_{\sigma,K}^A$ et $T_{\sigma,K}^B$ qui composent le demi diamants $D_{\sigma,K}$.

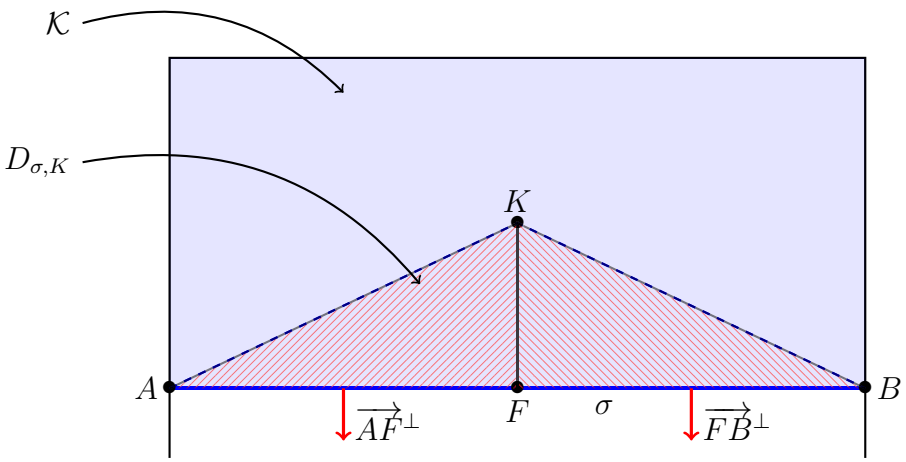


FIGURE 3.12: Vecteurs normaux aux cellules primales et au demi diamant (en hachuré).

– Cas d'une cellule duale $\mathcal{V}$: soient K le centre d'une cellule primale telle que $K \in \partial\mathcal{V}$, L le centre de sa cellule voisine et F le centre de $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$ (on rappelle que $L = F$ si $\sigma \in \mathcal{F}^b$) ; en utilisant de la même manière les triangles issus de la décomposition en simplexe du diamant $D_{\sigma,K}$ et leurs intersections avec le volume de contrôle de $\mathcal{V}$, on peut donner l'expression du vecteur $\mathbf{N}_\mathcal{V}^\sigma$ sous la forme (voir les cellules duales internes et aux bord dans la figure 3.11) :

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma \in \mathcal{F}^{int} \quad &: \quad \mathbf{N}_V^\sigma = \overrightarrow{FK}^\perp + \overrightarrow{LF}^\perp, \\ \text{si } \sigma \in \mathcal{F}^b \quad &: \quad \mathbf{N}_V^\sigma = \overrightarrow{FK}^\perp + \overrightarrow{AF}^\perp. \end{aligned}$$

Le découpage des vecteurs $\mathbf{N}_\mathcal{K}^\sigma$ et $\mathbf{N}_\mathcal{V}^\sigma$ comme indiqué ci-dessus nous permet de mieux décrire les volumes du bord et les volumes dans le cas des maillages non conformes. Dans la figure 3.13 on donne une illustration dans le cas non conforme.

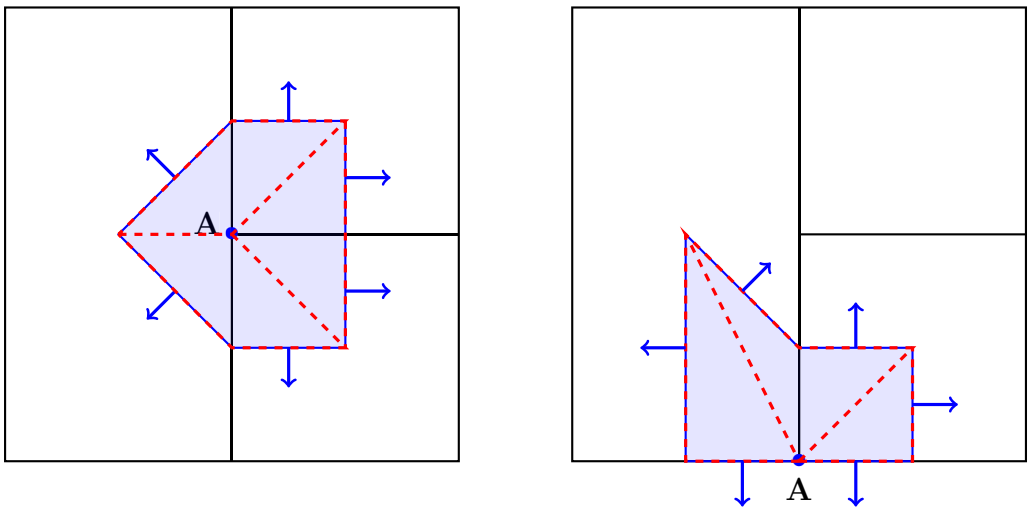


FIGURE 3.13: mailles non conformes : vecteurs normaux aux cellules duales $\mathcal{A}$.

En 3D

Soient K le centre d'une cellule et σ une des faces constituée par les sommets A, B, C et D, telles que $\sigma \subset \partial\mathcal{K}$. Comme dans le cas 2D, on utilise la décomposition du diamant D_σ en simplexe. On considère le sommet A, en 3D il s'agit des deux tétraèdres $T^{E_1}_{\sigma,K}$ et $T^{E_2}_{\sigma,K}$ avec E_1 et E_2 les milieux respectifs des arêtes $[A, B]$ et $[A, D]$ (voir la figure 3.14).

On peut donner l'expression des vecteurs $\mathbf{N}^\sigma_\mathcal{K}$ et $\mathbf{N}^\sigma_\mathcal{V}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\sigma_\mathcal{K} &= \sum_{\substack{A\in\partial\mathcal{K}\\ A\in\sigma}} \mathbf{N}^\sigma_A, \\ \mathbf{N}^\sigma_\mathcal{V} &= \sum_{\substack{K\in\partial\mathcal{V}\\ A\in\sigma\cap\mathcal{V}}} \mathbf{N}^\sigma_K + \epsilon^\sigma_\mathcal{V}\mathbf{N}^\sigma_A, \end{aligned}$$

avec : $\epsilon^\sigma_\mathcal{V} = 1$ si $\sigma \subset \mathcal{F}^b \cap \mathcal{V}$ et $\epsilon^\sigma_\mathcal{V} = 0$ sinon.

Le calcul des composantes $\mathbf{N}^\sigma_K$ et $\mathbf{N}^\sigma_A$ s'effectue à partir des faces externes des tétraèdres $T^{E_1}_{\sigma,K}$ et $T^{E_2}_{\sigma,K}$ comme illustré dans la figure 3.14. On trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\sigma_A &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}\wedge\overrightarrow{FE_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}\wedge\overrightarrow{FE_2} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{FA}\wedge\overrightarrow{DB}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\sigma_K &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FK}\wedge\overrightarrow{FE_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FK}\wedge\overrightarrow{FE_1} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{FK}\wedge\overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

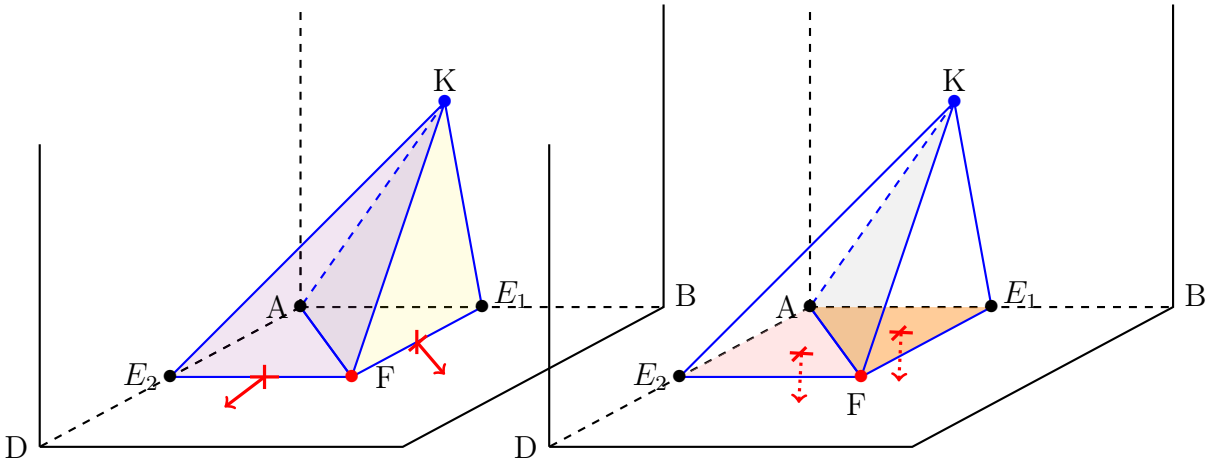


FIGURE 3.14: Vecteurs normaux : composantes $\mathbf{N}_A^\sigma$ et $\mathbf{N}_K^\sigma$.

Les calculs des normales extérieures font intervenir une face, donc un diamant D_σ, et un volume de contrôle $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{V}$. Comme chaque diamant est constitué par les points K, L, A, B, C et D, on peut exhiber à l'intérieur du domaine les expressions de $\mathbf{N}_\mathcal{K}^\sigma$ et $\mathbf{N}_\mathcal{V}^\sigma$ pour chaque élément du sextuplet (K, L, A, B, C, D).

– Pour K et L, le calcul de $\mathbf{N}_\mathcal{K}^\sigma$ permet d'obtenir deux vecteurs :

$$\mathbf{N}_K = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB} \text{ et } \mathbf{N}_L = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

– Pour A, B, C et D le calcul de $\mathbf{N}_\mathcal{V}^\sigma$ permet d'obtenir les vecteurs suivants :

$$\mathbf{N}_A = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{LK}, \mathbf{N}_B = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{LK}, \mathbf{N}_C = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{LK} \text{ et } \mathbf{N}_D = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{LK}.$$

Par des raisons de symétrie, on observe que $\mathbf{N}_L = -\mathbf{N}_K$, $\mathbf{N}_C = -\mathbf{N}_A$ et $\mathbf{N}_D = -\mathbf{N}_B$. Donc, pour alléger les notations, on peut introduire trois vecteurs $\mathbf{N}_{KL}, \mathbf{N}_{AC}$ et $\mathbf{N}_{BD}$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{KL} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB}, \\ \mathbf{N}_{AC} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{LK}, \\ \mathbf{N}_{BD} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{LK}. \end{aligned}$$

Remarque 5

Si A est un sommet appartenant à une face du bord, alors la contribution de la normale à cette face en intersection avec le volume de A sera prise en compte et dans ce cas on a :

$$\boldsymbol{N}_A = \boldsymbol{N}_{AC} + \frac{1}{4}\boldsymbol{N}_{KL}.$$

3.2 Espaces discrets

Désormais, on ne traite que le schéma DDFV en dimension 3. Dans cette partie nous définissons les espaces d'approximation et les inconnues discrètes. Les calculs 2D seront réalisés avec une seule cellule selon la profondeur et les conditions de symétrie.

Définition 1

- *On introduit l'espace d'approximation $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ du maillage $\mathcal{T}$. Ainsi une inconnue discrète $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$. est définie de la manière suivante :*

$$u^{\mathcal{T}} = \left((u_K), (u_A) \right)_{K,A \in \mathcal{T}}.$$

- *L'espace $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ est l'espace des champs de vecteurs discrets définis sur le maillage $\mathcal{T}$. Ainsi, un vecteur discret $u^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$est défini de la manière suivante :*

$$u^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{T}} \\ u_2^{\mathcal{T}} \\ u_3^{\mathcal{T}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } u_1^{\mathcal{T}}, u_2^{\mathcal{T}}, u_3^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

- *On définit l'espace $\mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ comme l'ensemble des inconnues du bord $\partial\mathcal{T}$.*

Définition 2

- *On introduit l'espace d'approximation $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ du maillage $\mathcal{D}$. Ainsi une inconnue discrète $q^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est définie de la manière suivante :*

$$q^{\mathcal{D}} = (q_\sigma)_{D_\sigma \in \mathcal{D}}.$$

- *L'espace $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$ des champs de vecteurs discrets définis pour des fonctions constantes sur chaque diamant de $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, un vecteur discret $\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$ est défini de la manière suivante :*

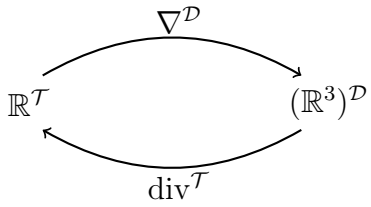
$$\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} q_1^{\mathcal{D}} \\ q_2^{\mathcal{D}} \\ q_3^{\mathcal{D}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } q_1^{\mathcal{D}}, q_2^{\mathcal{D}}, q_3^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}.$$

- *On définit l'espace $\mathbb{R}^{\partial\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ comme l'ensemble des inconnues du bord $\partial\mathcal{D}$.*

Les inconnues discrètes $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et $q^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ peuvent aussi être écrites sous la forme :

$$u^{\mathcal{T}} = \sum_{K,A \in \mathcal{T}} (u_K \mathbb{1}_{\mathcal{K}} + u_A \mathbb{1}_{\mathcal{V}}) \quad \text{et} \quad q^{\mathcal{D}} = \sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} q_\sigma \mathbb{1}_{D_\sigma}.$$

Le but de la construction des ces espaces est de définir les opérateurs gradient et divergence discrets opérant ainsi :



Les espaces $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ sont munis des produits scalaires suivants qui permettent de les identifier à des sous espaces de $L^2(\Omega)$.

Définition 3

- *Pour tout couple $(u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}})$ dans $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on définit le produit scalaire :*

$$\left\langle u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| u_K v_K + \frac{2}{3} \sum_{A \in \mathcal{T}} |A| u_A v_A.$$

- *Pour tout couple $(p^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}})$ dans $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$, on définit le produit scalaire :*

$$\left\langle p^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} |D_\sigma| p_\sigma q_\sigma.$$

- *Pour tout couple $(p^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}})$ dans l'espace du bord $\mathbb{R}^{\partial\mathcal{D}}$, on définit le produit scalaire :*

$$\left\langle p^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\partial\mathcal{D}} = \sum_{\sigma \in \partial\mathcal{D}} |\sigma| p_\sigma q_\sigma.$$

Aux produits scalaires définis précédemment, on associe les normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|u^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} &= \left\langle u^{\mathcal{T}}, u^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}. \\ \|q^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D}} &= \left\langle q^{\mathcal{T}}, q^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall q^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Remarque 6

Dans le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ les coefficients $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ peuvent être interprétés comme les contributions respectives des inconnues sur les cellules primales et duales. Notons que dans la variante du schéma 3D développé par Y. Coudière et al. dans [29] et [78] ces deux coefficient valent $\frac{1}{3}$ car le le domaine est recouvert une 1 fois par les cellules primales et 2 fois par les cellules duales. Nous n'avons pas besoin de pondérer le produit scalaire. On a :

$$\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle_{\mathcal{T}} = \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| + \frac{2}{3} \sum_{A \in \mathcal{T}} |A| = |\Omega|.$$

3.3 Opérateurs discrets

Dans cette section nous allons commencer par construire les opérateurs gradient et divergence discrète, $\nabla^{\mathcal{D}}$ et $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}$, illustrés dans le diagramme de la section (3.2).

3.3.1 Le gradient discret

Définition 4

Le gradient discret, $\nabla^{\mathcal{D}}$, est défini pour $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ de la manière suivante :

$$\nabla^{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \longrightarrow \left(\mathbb{R}^3\right)^{\mathcal{D}}$$

$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = (\nabla^{D_\sigma} u^{\mathcal{T}})_{D_\sigma \in \mathcal{D}}$, *avec pour* $D_\sigma = (K, L, A, B, C, D)$:

$$\nabla^{D_\sigma} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3|D_\sigma|}\left((u_L - u_K)\boldsymbol{N}_{KL} + 2(u_C - u_A)\boldsymbol{N}_{AC} + 2(u_D - u_B)\boldsymbol{N}_{BD}\right)$$

Notons que ce gradient discret est évalué en utilisant les différences finies entre les inconnues u_K et u_L aux deux cellules primaires voisines $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ et deux différences finies entre les inconnues u_A et u_C puis entre les inconnues u_B et u_D sur l'interface $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$ contenant les sommets A, B, C et D.

3.3.2 La divergence discrète

Définition 5

La divergence discrète, $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}$, est définie pour $\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$ de la manière suivante :

$$\mathrm{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$$

$\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}}) = \left(\mathrm{div}_K(\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}}), \mathrm{div}_A(\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}})\right)_{K,A \in \mathcal{T}}$, *avec pour* $K, A \in \mathcal{T}$ *on a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_K(\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}}) &= \frac{1}{|K|}\sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} \boldsymbol{q}_\sigma \cdot \boldsymbol{N}_K \\ \mathrm{div}_A(\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}}) &= \frac{1}{|A|}\sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} \boldsymbol{q}_\sigma \cdot \boldsymbol{N}_A \end{aligned}$$

Remarque 7

Si $L \in \partial\mathcal{T}$ alors, comme la cellule $\mathcal{L}$ de centre $L = F \in \mathcal{F}^b$ n'a aucun volume de contrôle, on pose : $\forall \boldsymbol{q}^{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}, \mathrm{div}_L(\boldsymbol{q}^{\mathcal{D}}) = 0$.

Les expressions de la divergence discrète correspondent aux formulations de la discrétisation par volumes finis appliquées à chaque partie $\mathcal{K}$ et $\mathcal{V}$ du maillage $\mathcal{T}$. Cette définition est équivalente à la divergence continue obtenue pour une fonction vectorielle régulière $\mathbf{u}$ de Ω calculée par la formule de la divergence, où K est une partie de Ω et $\mathbf{n}_\sigma$ est sa normale extérieure :

$$\int_K \mathrm{div}(\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{\sigma\in\partial K}\int_\sigma \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\sigma \mathrm{d}s.$$

Remarque 8

La construction décrite ci-dessus permet d'avoir une approximation consistante de l'opérateur divergence discrète.

3.3.3 Opérateur de trace discrète

Comme mentionné précédemment, les opérateurs gradient et divergence discrets sont liés par des relations de Green discrètes qui seront annoncées plus loin. Pour obtenir des formulations complètes de ces relations nous définissons un opérateur de trace discrète.

Définition 6

La trace discrète, $\gamma^{\mathcal{D}}$, est définie de $\mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}}$ dans $\mathbb{R}^{\partial\mathcal{D}}$ pour $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}}$ de la manière suivante :

$$\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{3}u_F + \frac{1}{6}\sum_{A\in\partial\mathcal{T}} u_A$$

où : $u^{\mathcal{T}} = (u_F, u_A)$, avec $F, K \in \partial\mathcal{T}$.

Notons que la trace discrète d'une fonction constante vaut la même constante. Mais qu'une trace nulle d'une fonction n'assure pas la nullité de cette fonction.

3.3.4 Assemblage des opérateurs discrets

Grâce aux opérateurs gradient et divergence discrets définis précédemment nous obtenons les autres opérateurs discrets suivants :

$\nabla^{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$ $u^{\mathcal{T}} \longmapsto \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$	$\mathrm{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ $\mathbf{q}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathrm{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{q}^{\mathcal{D}})$	$\mathrm{rot}^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}} \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$ $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \longmapsto \nabla^{\mathcal{D}} \wedge \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$
$\nabla^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ $q^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathrm{div}^{\mathcal{T}}(q^{\mathcal{D}}\mathbf{I}_d)$	$\mathrm{div}^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \longmapsto \mathrm{tr}(\nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}})$	$\mathrm{rot}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}} \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ $\mathbf{q}^{\mathcal{D}} \longmapsto \nabla^{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{q}^{\mathcal{D}}$

La validation de l'approximation numérique de ces opérateurs sera réalisée dans la section 3.5.

3.4 Formules de Green discrètes

Les opérateurs gradient et divergence discrets, $\nabla^{\mathcal{D}}$ et $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}$, présentent une relation de dualité analogue à la formule de Green dans le cas continu. Cette formule a été établie par F. Hemeline [53] et par K. Omnès *et al.* [34] pour les maillages en dimension 2. Puis, en dimension 3, par Y. Coudière *et al.* [29], F. Hubert *et al.* [30] et B. Martin [66].

Nous annonçons ici deux versions : une semblable à celle étudiée par les auteurs cités, qui lie $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}$ et $\nabla^{\mathcal{D}}$ et une nouvelle qui lie les opérateurs $\mathrm{div}^{\mathcal{D}}$ et $\nabla^{\mathcal{T}}$.

Théorème 1

Pour tout $\mathbf{q}^{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$ et $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ on a :

$$\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{T}} \mathbf{q}^{\mathcal{D}}, u^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = -\left\langle \mathbf{q}^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle \mathbf{q}^{\mathcal{D}} \cdot \boldsymbol{n}, \gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}}$$

Preuve : Soient $\mathbf{q}^{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$ et $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, On a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{T}} \mathbf{q}^{\mathcal{D}}, u^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \, \mathrm{div}_K(\mathbf{q}^{\mathcal{D}}) u_K + \frac{2}{3} \sum_{A \in \mathcal{T}} |A| \, \mathrm{div}_A(\mathbf{q}^{\mathcal{D}}) u_A \\
&= \underbrace{\frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{D_\sigma \ni K} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{N}_K u_K}_{=S_1} + \underbrace{\frac{2}{3} \sum_{A \in \mathcal{T}} \sum_{D_\sigma \ni A} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{N}_A u_A}_{=S_2}.
\end{aligned}$$

On peut écrire les deux sommes S_1 et S_2 sous la forme :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{D_\sigma \ni K} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{N}_K u_K \\
&= \sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} \mathbf{q}_\sigma \cdot \sum_{K \in D_\sigma} \mathbf{N}_K u_K = \sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} \mathbf{q}_\sigma \cdot (u_K \mathbf{N}_K + u_L \mathbf{N}_L) \\
&= \sum_{\substack{D_\sigma \in \mathcal{D} \\ \sigma \in \mathcal{F}^{int}}} \mathbf{q}_\sigma \cdot (u_K - u_L) \mathbf{N}_{KL} + \sum_{\substack{D_\sigma \in \mathcal{D} \\ \sigma \in \mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{N}_{KL} u_F.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{A \in \mathcal{T}} \sum_{D_\sigma \ni A} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{N}_A u_A = \sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} \mathbf{q}_\sigma \cdot \sum_{A \in D_\sigma} \mathbf{N}_A u_A \\
&= \sum_{\substack{D_\sigma \in \mathcal{D} \\ \sigma \in \mathcal{F}^{int}}} \mathbf{q}_\sigma \cdot (u_A \mathbf{N}_A + u_B \mathbf{N}_B + u_C \mathbf{N}_C + u_D \mathbf{N}_D) + \sum_{\substack{D_\sigma \in \mathcal{D} \\ \sigma \in \mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma \cdot \sum_{A \in D_\sigma} \frac{1}{4} \mathbf{N}_{KL} u_A \\
&= \sum_{D_\sigma \in \mathcal{D}} \mathbf{q}_\sigma \cdot ((u_A - u_C) \mathbf{N}_{AC} + (u_B - u_D) \mathbf{N}_{BD}) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{D_\sigma \in \mathcal{D} \\ \sigma \in \mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma \cdot \mathbf{N}_{KL} \sum_{A \in D_\sigma} u_A;
\end{aligned}$$

Par conséquences :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{T}}\,\mathbf{q}^{\mathcal{D}}, u^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{3}S_1 + \frac{2}{3}S_2 \\
&= \sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{int}}} \mathbf{q}_\sigma\cdot(u_K-u_L)\mathbf{N}_{KL} + \sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{int}}} 2\mathbf{q}_\sigma\cdot((u_A-u_C)\mathbf{N}_{AC}+(u_B-u_D)\mathbf{N}_{BD}) \\
&+ \sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma\cdot\mathbf{N}_{KL}u_F + \frac{1}{6}\sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma\cdot\mathbf{N}_{KL}\sum_{A\in D_\sigma} u_A \\
&= \sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{int}}} \mathbf{q}_\sigma\cdot((u_K-u_L)\mathbf{N}_{KL}+2(u_A-u_C)\mathbf{N}_{AC}+2(u_B-u_D)\mathbf{N}_{BD}) \\
&+ \sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma\cdot\mathbf{N}_{KL}(u_F+\frac{1}{6}\sum_{A\in D_\sigma} u_A) \\
&= -\sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{b}}} |D_\sigma|\mathbf{q}_\sigma\cdot\nabla^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) + \sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma\cdot\mathbf{N}_{KL}\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) \\
&= -\sum_{D_\sigma\in\mathcal{D}} |D_\sigma|\mathbf{q}_\sigma\cdot\nabla^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) + \sum_{\substack{D_\sigma\in\mathcal{D}\\ \sigma\in\mathcal{F}^{b}}} \mathbf{q}_\sigma\cdot\mathbf{n}|\sigma|\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) \\
&= -\left\langle \mathbf{q}^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{D}}\,u^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle \mathbf{q}^{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{n}, \gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\right\rangle_{\partial\mathcal{D}}.
\end{aligned}$$

■

Finalement :

$$\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{T}}\,\mathbf{q}^{\mathcal{D}}, u^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}} = -\left\langle \mathbf{q}^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{D}}\,u^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q^{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{n}, \gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\right\rangle_{\partial\mathcal{D}}.$$

La nouvelle formule de Green qui lie les opérateurs $\mathrm{div}^{\mathcal{D}}$ et $\nabla^{\mathcal{T}}$:

Théorème 2

Pour $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ et $q^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$:

$$\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}} = -\left\langle \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{T}} + \left\langle q^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\cdot\boldsymbol{n})\right\rangle_{\partial\mathcal{D}}$$

Preuve :

Soient $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ et $q^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$. On note par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et on pose : $u_i^{\mathcal{T}} = \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\cdot\mathbf{e}_i$ et $\nabla_i^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{e}_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Donc on peut écrire :

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{3}\left\langle u_i^{\mathcal{T}}, \nabla_i^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{T}}.$$

En utilisant les définitions données dans la section 3.3.4, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{3} \left\langle {u_i}^{\mathcal{T}}, \nabla_i^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{3} \left\langle {u_i}^{\mathcal{T}}, \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \left(q^{\mathcal{D}} \mathbf{e}_i\right) \right\rangle_{\mathcal{T}}.$$

Par la 1^{re} formule de Green et la linéarité de la trace on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \left\langle {u_i}^{\mathcal{T}}, \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \left(q^{\mathcal{D}} \mathbf{e}_i\right) \right\rangle_{\mathcal{T}} &= \sum_{i=1}^{3} - \left\langle q^{\mathcal{D}} \mathbf{e}_i, \nabla^{\mathcal{D}} u_i^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q^{\mathcal{D}} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}, \gamma^{\mathcal{D}}(u_i^{\mathcal{T}}) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}} \\
&= \sum_{i=1}^{3} - \left\langle q^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{D}} u_i^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_i \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(u_i^{\mathcal{T}} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}} \\
&= - \left\langle q^{\mathcal{D}}, \sum_{i=1}^{3} (\nabla^{\mathcal{D}} u_i^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_i) \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q^{\mathcal{D}}, \sum_{i=1}^{3} (\gamma^{\mathcal{D}}(u_i^{\mathcal{T}} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n})) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}}.
\end{aligned}$$

Or, on a :

$$\sum_{i=1}^{3} (\nabla^{\mathcal{D}} u_i^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{e}_i) = \mathrm{tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{3} (\gamma^{\mathcal{D}}(u_i^{\mathcal{T}} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n})) = \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}).$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{3} \left\langle {u_i}^{\mathcal{T}}, \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \left(q^{\mathcal{D}} \mathbf{e}_i\right) \right\rangle_{\mathcal{T}} = - \left\langle q^{\mathcal{D}}, \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}}.$$

■

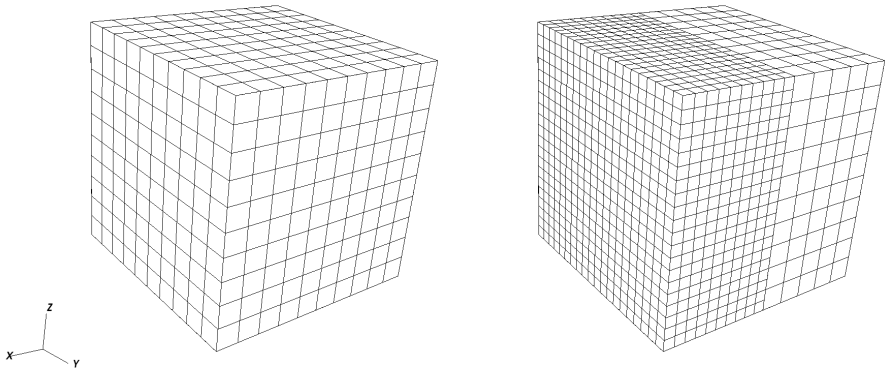
Finalement :

$$\left\langle \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = - \left\langle q^{\mathcal{D}}, \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}}.$$

3.5 Validations numériques

Nous présentons, quelques tests numériques pour l'étude de la convergence des opérateurs présentés dans le paragraphe 3.3.4. Le domaine considéré est le cube unitaire $\Omega = [0,1]^3$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, dans un premier temps nous utilisons un maillage Cartésien conforme constitué de N^3 cubes de coté $h = \frac{1}{N}$. Puis, dans un second temps nous utilisons un maillage cartésien non conforme obtenu en raffinant la moitié du domaine avec des cubes scindés en quatre cubes élémentaires de coté $\frac{h}{2}$ (voir figure 3.15).

On se donne un jeu de fonctions analytiques et on applique un opérateur à chaque fonction, puis on évalue pour divers pas de maillage l'erreur relative que nous définissons par la suite.



(a) Mesh 1 (b) Mesh 2

FIGURE 3.15: Maillages 3D DDFV conforme et non conforme.

Si la solution à évaluer est dans $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$), on note $q_e^{\mathcal{D}}$ (resp. $q_e^{\mathcal{T}}$) la solution exacte et $q_n^{\mathcal{D}}$ (resp. $q_n^{\mathcal{T}}$) la solution approchée.

La norme L^2 de l'erreur entre les deux solutions sur $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ est mesurée en utilisant respectivement le produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathcal{D}}$ et $\langle .,. \rangle_{\mathcal{T}}$:

$$\mathrm{ErrL}^2(\mathcal{D}) := \frac{\| q_n^{\mathcal{D}} - q_e^{\mathcal{D}} \|_{\mathcal{D}}}{\| q_e^{\mathcal{D}} \|_{\mathcal{D}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{ErrL}^2(\mathcal{T}) := \frac{\| u_n^{\mathcal{T}} - u_e^{\mathcal{T}} \|_{\mathcal{T}}}{\| u_e^{\mathcal{T}} \|_{\mathcal{T}}}.$$

Les tableaux présentés dans les sections qui suivront présentent les erreurs dans le cas d'un maillage conforme et un maillage non conforme (voir figure 3.15) en fonction de N, nombre de maille dans chaque direction.

3.5.1 Gradients et divergences

Nous présentons quelques résultats pour illustrer l'ordre de convergence des opérateurs gradient et divergence.

▶ **Gradient** $\nabla^{\mathcal{D}}$:

On considère la fonction $u^{\mathcal{T}} = \ln(1+x) + 2\sqrt{1+y} + z^2$, la solution est $\mathbf{q}_e^{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$ avec :

$$\mathbf{q}_e^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x} \\ \frac{1}{1+y} \\ 2z \end{pmatrix}$$

	Mesh 1		Mesh 2	
N	ErrL^2	Ordre	ErrL^2	Ordre
5	5.35E-02	-	3.68E-02	-
10	1.35E-02	1.97	9.46E-03	1.94
20	3.40E-03	1.98	2.42E-03	1.95
40	8.25E-04	2.02	6.14E-04	1.98

▶ **Gradient** $\nabla^{\mathcal{T}}$:

On considère la fonction $q^{\mathcal{D}} = \frac{-1}{\pi}(\cos(\pi x)+\cos(\pi y)+\cos(\pi z))$, la solution est $\mathbf{u}_e^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}$ avec :

$$\mathbf{u}_e^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \\ \sin(\pi y) \\ \sin(\pi z) \end{pmatrix}$$

	Mesh 1		Mesh 2	
N	ErrL^2	Ordre	ErrL^2	Ordre
5	1.63E-02	-	0.18E+00	-
10	4.15E-03	1.96	4.91E-01	1.83
20	1.04E-03	1.98	1.28E-01	1.89
40	2.56E-04	2.00	3.27E-02	1.96

▶ **Divergence** $\mathrm{div}^{\mathcal{D}}$:

On considère la fonction $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \ln 1 + x \\ 2\sqrt{1+y}) \\ z^2 \end{pmatrix}$ la solution est $q_e^{\mathcal{D}} = \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\, \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ avec :

$$q_e^{\mathcal{D}} = \tfrac{1}{1+x} + \tfrac{1}{1+y} + 2z$$

	Mesh 1		Mesh 2	
N	ErrL^2	Ordre	ErrL^2	Ordre
5	7.00E-04	-	5.10E-03	-
10	1.82E-04	1.92	1.44E-03	1.77
20	4.65E-05	1.95	3.79E-04	1.90
40	1.17E-05	1.98	9.81E-05	1.93

▶ **Divergence** $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}$:

On considère la fonction $\mathbf{q}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \cos(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z) \\ \sin(\pi x)\cos(\pi y)\sin(\pi z) \\ \sin(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi z) \end{pmatrix}$, la solution est $u_e^{\mathcal{T}} = \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\, \mathbf{q}^{\mathcal{D}}$ avec :

$$u_e^{\mathcal{T}} = -3\pi \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$$

	Mesh 1		Mesh 2	
N	ErrL^2	Ordre	ErrL^2	Ordre
5	5.54E-02	-	0.22E+00	-
10	1.42E-02	1.95	6.07E-01	1.81
20	3.62E-03	1.96	1.59E-01	1.90
40	9.09E-04	1.99	4.11E-02	1.94

Plusieurs tests ont été effectués, et comme illustré dans les tableaux précédents, on trouve que ces opérateurs sont d'ordre 2 pour les normes $L^2(\mathcal{D})$ et $L^2(\mathcal{T})$.

Remarque 9

Pour tous ces exemples, on trouve que l'ordre de convergence en norme discrète H^1 est de l'ordre de 1.

3.5.2 Rotationnels

Pour valider les deux opérateurs $\mathbf{rot}^{\mathcal{T}}$ et $\mathbf{rot}^{\mathcal{D}}$, on procède comme dans le paragraphe précédent en utilisant respectivement la norme $L^2(\mathcal{T})$ et $L^2(\mathcal{D})$ en évaluant l'erreur entre des solutions exactes et des solutions approchées.

► **Rotationnel $\mathbf{rot}^{\mathcal{T}}$:**

On considère la fonction $\mathbf{q}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} zy\sin(\pi x) \\ xz\sin(\pi y) \\ yx\sin(\pi z) \end{pmatrix}$, la solution est $\mathbf{u}_e^{\mathcal{T}} = \mathbf{rot}^{\mathcal{T}}\,\mathbf{q}^{\mathcal{D}}$ avec :

$$\mathbf{u}_e^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} x(\sin(\pi z) - \sin(\pi y)) \\ y(\sin(\pi x) - \sin(\pi z)) \\ z(\sin(\pi y) - \sin(\pi x)) \end{pmatrix}$$

	Mesh 1		Mesh 2	
N	ErrL^2	Ordre	ErrL^2	Ordre
5	3.80E-02	-	0.16E+00	-
10	9.69E-03	1.96	4.25E-02	1.88
20	2.43E-03	1.99	1.10E-02	1.92
40	6.05E-04	2.01	2.88E-03	1.92

► **Rotationnel $\mathbf{rot}^{\mathcal{D}}$:**

On considère la fonction $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \sin(\pi y)\sin(\pi z) \\ \sin(\pi x)\sin(\pi z) \\ \sin(\pi y)\sin(\pi x) \end{pmatrix}$, la solution est $\mathbf{q}_e^{\mathcal{D}} = \mathbf{rot}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ avec :

$$\mathbf{q}_e^{\mathcal{D}} = \pi \begin{pmatrix} \sin(\pi x)(\cos(\pi y) - \cos(\pi z)) \\ \sin(\pi y)(\cos(\pi z) - \cos(\pi x)) \\ \sin(\pi z)(\cos(\pi x) - \cos(\pi y)) \end{pmatrix}$$

	Mesh 1		Mesh 2	
N	ErrL^2	Ordre	ErrL^2	Ordre
5	3.16E-02	-	9.66E-01	-
10	8.18E-03	1.93	2.61E-01	1.85
20	2.07E-03	1.97	6.68E-02	1.90
40	5.52E-04	1.99	1.77E-02	1.93

Remarque 10

On a effectué des tests avec des fonctions analytiques $\boldsymbol{u}$ à divergence nulle car elles permettent d'avoir la décomposition suivante :

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\wedge rot\boldsymbol{u} + \nabla\frac{\boldsymbol{u}^2}{2}$$

Une décomposition qu'on utilisera dans la résolution de l'équation de Navier-Stokes (voir chapitre 4). Pour cela on vérifie qu'on a $\boldsymbol{u}\wedge rot\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, afin de valider un cas non trivial.

3.5.3 Laplaciens

Deux Laplaciens discrets, $\Delta^{\mathcal{T}}$ et $\Delta^{\mathcal{D}}$, opérant sur des fonctions définies respectivement sur les espaces liés aux maillages $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$, peuvent être obtenus par composition des opérateurs gradients et divergences définis précédemment, tels que :

$$\begin{array}{l} \Delta^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \\ \qquad u^{\mathcal{T}} \longmapsto \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \Delta^{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \\ \qquad q^{\mathcal{D}} \longmapsto \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}). \end{array}$$

Pour les valider, on étudie pour chacun des deux, l'approximation du problème de Laplace suivant, où f est une fonction régulière :

$$-\triangle u = f \ \text{ dans } \Omega \ \ + \text{C.L. sur } \partial\Omega, \tag{3.1}$$

où (C.L.) désigne les conditions aux limites considérées et qui permettent de fermer le système. Ici, on traite deux types : les conditions de Dirichlet et les conditions de Neumann. Elles seront exposées dans les paragraphes qui suivront.

▶ **Laplacien $\Delta^{\mathcal{T}}$:**

La discrétisation de l'équation du problème (3.1) en utilisant l'opérateur $\Delta^{\mathcal{T}}$ donne le schéma discret suivant :

$$-\Delta^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = -\operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}) = f^{\mathcal{T}} \text{ sur } \mathbb{R}^{\mathcal{T}}. \tag{3.2}$$

Afin de donner un sens à ce problème, on procède au passage à une formulation variationnelle sur l'équation (3.2) en la multipliant par une fonction régulière $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et en intégrant le produit obtenu sur le domaine Ω. On utilise le produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\mathcal{T}}$ puis on applique la $1^{\text{ère}}$ formule de Green discrète :

$$\begin{aligned} \left\langle f^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} &= -\left\langle \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}), v^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} \\ &= \left\langle \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} v^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \underbrace{\left\langle \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}, \gamma^{\mathcal{D}}(v^{\mathcal{T}}) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}}}_{B_1}. \end{aligned}$$

On peut traiter le terme au bord B_1 selon les conditions limites et trouver par la suite les espaces dans lesquels on peut bien définir le schéma (3.2).

1. **La condition de Dirichlet**

   Dans ce cas, en imposant $v^{\mathcal{T}} = 0$ sur le bord $\partial\mathcal{T}$, on aura $\gamma^{\mathcal{D}}(v^{\mathcal{T}}) = 0$ et donc $B_1 = 0$. Dans la pratique, nous pénalisons l'opérateur elliptique par l'ajout de $\frac{1}{\epsilon} u^{\mathcal{T}}$, avec $\epsilon \ll 1$, (voir les détails de la pénalisation dans le chapitre suivant).

2. **La condition de Neumann**

   Dans ce cas, pour avoir $B_1 = 0$ il faut imposer $\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}$ sur le bord $\partial\mathcal{T}$. Pour cela on prend $v^{\mathcal{T}} = (v_K, v_F, v_A, v_B, v_C, v_D)$ un élément d'un diamant du bord D_σ et on calcule :

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{3|D_\sigma|} \left((u_F - u_K)\mathbf{N}_{KL} \cdot \mathbf{n} + 2(u_C - u_A)\mathbf{N}_{AC} \cdot \mathbf{n} + 2(u_D - u_B)\mathbf{N}_{BD} \cdot \mathbf{n} \right),$$

   comme $\mathbf{N}_{KL} \cdot \mathbf{n} = |\sigma|$ et $\mathbf{N}_{AC} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N}_{BD} \cdot \mathbf{n} = 0$, on trouve que :

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n} = \frac{|\sigma|}{3|D_\sigma|}(u_F - u_K).$$

   Donc, en prenant $u_F = u_K$ sur les faces du bords, on obtient $\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Finalement, dans les deux cas on obtient, pour toute fonction test $v^{\mathcal{T}}$ de l'espace adapté :

$$\left\langle \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} v^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = \left\langle f^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}}. \tag{3.3}$$

Avant de passer aux validations numériques, on annonce deux propositions pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.2) avec les deux conditions limites.

Proposition 1

Il existe une solution unique $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ du schéma :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}^{\mathcal{T}} (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}) = f^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega \\ u^{\mathcal{T}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

Preuve :

Le schéma (3.4) s'écrit sous forme d'un système linéaire carré, il y a autant d'inconnues que d'équations. Il suffit de montrer l'unicité pour avoir le résultat énoncé. Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions, on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$. L'inconnue $u^{\mathcal{T}}$ s'annule sur $\partial\Omega$ et vérifie :

$$-\operatorname{div}^{\mathcal{T}} (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}) = 0.$$

Par l'utilisation de la formulation variationnelle (3.3) en prenant $v^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}}$, on obtient :

$$\left\langle \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = 0.$$

Donc : $\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$ ce qui implique que : $\forall D_\sigma \in \mathcal{D}$, $\nabla^{D_\sigma} u^{\mathcal{T}} = 0$, il existe ainsi deux constantes c_1 et c_2 telles que : $\forall K, A \in \mathcal{T}, u_K = c_1$ et $u_A = c_2$. Or, $u^{\mathcal{T}} = 0$ sur $\partial\Omega$, donc $c_1 = c_2 = 0$. D'où : $u^{\mathcal{T}} = 0$. ∎

Proposition 2

Il existe une solution unique $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *du schéma :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}^{\mathcal{T}}\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}\right) &= f^{\mathcal{T}} \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

telle que :

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K| u_K = \sum_{A\in\mathcal{T}} |A| u_A = 0. \tag{3.6}$$

Preuve :

La condition (3.6) est la formulation en DDFV par discrétisation sur le maillage $\mathcal{T}$ de la condition dans le cas continu, qui est nécessaire pour l'unicité :

$$\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x = 0.$$

On note $\operatorname{card}(\mathbb{R}^{\mathcal{T}}) = N$. On a un système linéaire sous la forme $A^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = b^{\mathcal{T}}$ avec :

$$A^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^N \longrightarrow V = \left\{ f_K, f_A \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \sum_{K\in\mathcal{T}} |K| f_K = \sum_{A\in\mathcal{T}} |A| f_A = 0 \right\}.$$

Comme $\dim(V)$ =N, il suffit de montrer que $A^{\mathcal{T}}$ est injective.
Soient $u_1^{\mathcal{T}}$ et $u_2^{\mathcal{T}}$ deux solutions, on pose $u^{\mathcal{T}} = u_1^{\mathcal{T}} - u_2^{\mathcal{T}}$. Elle vérifie :$-\operatorname{div}^{\mathcal{T}}\left(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}\right) = 0$.
Par l'utilisation de la formulation variationnelle (3.3) en prenant $v^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}}$, on obtient :

$$\left\langle \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = 0.$$

Donc : $\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = 0$ ce qui implique que : $\forall D_\sigma \in \mathcal{D}$, $\nabla^{D_\sigma} u^{\mathcal{T}} = 0$.
Il existe ainsi deux constantes c_1 et c_2 telles que : $\forall K, A \in \mathcal{T}, u_K = c_1$ et $u_A = c_2$.
Or la condition (3.6) impose les deux constantes. En effet, on a :

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K| c_1 = \sum_{A\in\mathcal{T}} |A| c_2 = 0.$$

Donc $c_1 = c_2 = 0$. D'où : $u^{\mathcal{T}} = 0$. ■

Remarque 11

L'extension aux conditions de Dirichlet ou de Neumann inhomogènes est seulement technique et identique au étapes décrites pour la mise en œuvre des conditions de Dirichlet et de Neumann homogènes.

Pour la validation numérique de l'opérateur $\Delta^{\mathcal{T}}$, on utilise la configuration décrite au début de cette section, à savoir le domaine de travail $\Omega = [0,1]^3$ avec les deux types de maillages qui ont été présentés précédemment (la figure 3.15). Pour différents pas de maillage, on calcule l'erreur en norme L^2 et norme L^∞ entre une solution analytique et la solution approchée du problème (3.1) dans chaque cas selon les conditions aux limites. Les tableaux présentés donnent les résultats de l'ordre de convergence en fonction de N, nombre de mailles dans chaque direction.

1. Le cas avec la condition limite de Dirichlet homogène : on considère la solution exacte $u_e^{\mathcal{T}} = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$ et $f^{\mathcal{T}} = -3\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$ le second membre correspondant.

	Mesh 1				Mesh 2			
N	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre
5	1.22E-01	-	1.04E-01	-	9.53E-02	-	6.13E-02	-
10	3.35E-02	1.82	2.79E-02	1.88	2.59E-02	1.84	1.64E-02	1.87
20	8.26E-03	2.02	6.85E-03	2.03	6.47E-03	2.00	4.33E-02	1.89
40	2.05E-04	2.01	1.70E-03	2.01	1.62E-03	1.99	1.12E-03	1.93
80	5.14E-04	1.99	4.26E-04	1.99	4.02E-04	2.01	2.85E-04	1.96

2. Le cas avec la condition limite Neumann homogène : on considère la solution exacte $u_e^{\mathcal{T}} = \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$ et $f^{\mathcal{T}} = -3\pi^2 \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$ le second membre correspondant.

	Mesh 1				Mesh 2			
N	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre
5	1.01E-01	-	9.71E-01	-	9.04E-02	-	6.14E-02	-
10	2.88E-02	1.75	2.67E-02	1.81	2.52E-02	1.80	1.63E-02	1.88
20	7.96E-03	1.80	6.96E-03	1.92	9.45E-03	1.89	4.28E0-3	1.90
40	2.03E-03	1.96	1.74E-03	2.00	2.38E-03	1.98	1.07E0-3	1.99
80	5.12E-04	1.98	4.31E-04	2.01	5.90E-04	1.98	2.66E-04	2.01

On observe qu'on trouve "une superconvergence" d'ordre 2 pour les deux normes $L^2(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$. Des résultats qui correspondent à ceux obtenus par B. Andreianov dans [1] et par Y. Coudière et F. Hubert dans [30] pour des problèmes de diffusion anisotrope de type $-\operatorname{div} \kappa \nabla u = f$ discrétisés avec le schéma DDFV.

▶ **Laplacien** $\Delta^{\mathcal{D}}$:

On procède comme pour l'opérateur $\Delta^{\mathcal{T}}$ en discrétisant cette fois l'équation du problème (3.1) par l'utilisation de l'opérateur $\Delta^{\mathcal{D}}$, ce qui donne le schéma discret suivant :

$$-\Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = -\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} p^{\mathcal{D}}) = f^{\mathcal{D}} \text{ sur } \mathbb{R}^{\mathcal{D}}. \tag{3.7}$$

La formulation variationnelle de l'équation (3.7) donne :

$$\begin{aligned} \left\langle f^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} &= -\left\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} p^{\mathcal{D}}), q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &= \left\langle \nabla^{\mathcal{T}} p^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{T}} + \underbrace{\left\langle q^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} p^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n}) \right\rangle_{\partial\mathcal{D}}}_{B_2}. \end{aligned}$$

Ici, on a multiplié l'équation par une fonction régulière $q^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ et on a intégré ces deux parties sur le domaine Ω en utilisant le produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\mathcal{D}}$, puis on a appliqué la $2^{\text{ème}}$ formule de Green discrète. Le terme au bord B_2 obtenu peut être annulé en appliquant les conditions aux limites.

1. **La condition de Dirichlet**

   Dans ce cas, en imposant $q^{\mathcal{D}} = 0$ sur le bord $\partial\mathcal{D}$, on aura directement $B_2 = 0$.
   Dans la pratique, comme pour $\Delta^{\mathcal{T}}$, nous pénalisons l'opérateur elliptique par l'ajout de $\frac{1}{\epsilon} u^{\mathcal{T}}$, avec $\epsilon \ll 1$.

2. **La condition de Neumann**

   Dans ce cas, pour avoir $B_2 = 0$ il suffit d'avoir $\gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} p^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n}) = 0$ sur le bord $\partial\mathcal{D}$.
   Cherchons comment imposer cette condition.
   Soit $u^{\mathcal{T}} = (u_K, u_F, u_A, u_B, u_C, u_D)$ un élément d'un diamant du bord tel que :

   $$u^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{T}} p^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(p^{\mathcal{D}} \mathbf{n}).$$

   Ce qui implique pour $A \in \partial\mathcal{T}$:

   $$\begin{aligned} u_A &= \operatorname{div}_A(p^{\mathcal{D}} \mathbf{n}) \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{\sigma, A \in \sigma} (p_\sigma \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_{AC}}_{=0} + \frac{1}{4} p_\sigma \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_{KL}}_{=|\sigma|}) \\ &= \frac{1}{4|A|} \sum_{\sigma, A \in \sigma} |\sigma| p_\sigma. \end{aligned}$$

   Donc, pour avoir : $\gamma^{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{3} u_F + \frac{1}{6}(u_A + u_B + u_C + u_D) = 0$.
   Il suffit de prendre : $u_F = -\frac{1}{2}(u_A + u_B + u_C + u_D)$.

Ce qui revient à imposer une valeur non nulle à $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}(p^{\mathcal{D}}\mathbf{n})$ sur les points du bord $L = F$ et qui vaut :

$$\mathrm{div}_F(p^{\mathcal{D}}\mathbf{n}) = -\frac{1}{8}(\sum_A \frac{1}{|A|} \sum_{\sigma, A\in\sigma} |\sigma| p_\sigma).$$

Dans les deux cas on obtient :

$$\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} p^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = \left\langle f^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}. \tag{3.8}$$

Finalement, comme pour l'équation du Laplacien concernant $\Delta^{\mathcal{T}}$, on peut obtenir des résultats d'existence et d'unicité de l'équation (3.7) avec les deux conditions aux limites exposées ci-dessus.

Pour valider l'opérateur $\Delta^{\mathcal{D}}$, on utilise la même configuration et la même procédure décrite pour la validation de $\Delta^{\mathcal{T}}$.

1. Le cas avec la condition de Dirichlet homogène : on considère la solution exacte $p_e^{\mathcal{D}} = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$ et $f^{\mathcal{D}} = -3\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$ le second membre correspondant. Le tableau suivant donne des résultats de l'ordre de convergence.

	Mesh 1				Mesh 2			
N	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre
5	2.96E-02	-	9.02E-02	-	5.73E-01	-	3.49E-01	-
10	2.35E-02	1.97	2.33E-02	1.93	1.57E-01	1.82	9.38E-02	1.86
20	6.04E-03	1.98	5.98E-03	1.94	4.22E-02	1.86	2.46E-02	1.90
40	1.52E-03	1.98	1.51E-03	1.98	1.08E-02	1.94	6.32E-03	1.95
80	3.84E-04	1.99	3.82E-04	1.98	2.76E-03	1.95	1.60E-03	1.96

2. Le cas avec la condition de Neumann homogène : on considère la solution exacte $p_e^{\mathcal{D}} = \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$ et $f^{\mathcal{D}} = -3\pi^2 \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$ le second membre correspondant. Le tableau suivant donne des résultats de l'ordre de convergence.

	Mesh 1				Mesh 2			
N	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre
5	9.39E-02	-	1.03E-01	-	2.75E-01	-	1.88E-01	-
10	2.43E-02	1.93	2.49E-02	2.06	7.51E-01	1.83	5.02E-02	1.87
20	6.14E-03	1.97	6.18E-03	2.01	2.01E-02	1.86	1.34E-02	1.87
40	1.54E-03	1.99	1.54E-03	2.00	5.31E-03	1.90	9.60E-03	1.92
80	3.85E-04	2.00	3.84E-03	2.01	1.39E-03	1.91	2.46E-03	1.93

On obtient aussi une convergence d'ordre de 2 pour les deux normes $L^2(\Omega)$ et $L^\infty((\Omega))$.

3.5.4 Visualisations

Pour illustrer notre propos, on présente quelques visualisations des résultats du problème de Laplace, sur des maillages conformes, puis sur des maillages non conformes, en utilisant la discrétisation donnée dans l'équation (3.3) avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, puis avec les conditions aux limites de Neumann homogènes.

- On considère le problème sur $\Omega = [0,1]^3$ avec la condition de Dirichlet aux bords :

$$-\Delta^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = f^{\mathcal{T}} \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et } u^{\mathcal{T}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.9}$$

où $f^{\mathcal{T}} = 3\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$.
La solution exacte est : $u^{\mathcal{T}} = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$.
On affiche sur la figure ci-dessous la solution approchée du problème sur un maillage conforme, selon la coupe $z = 0.5$.

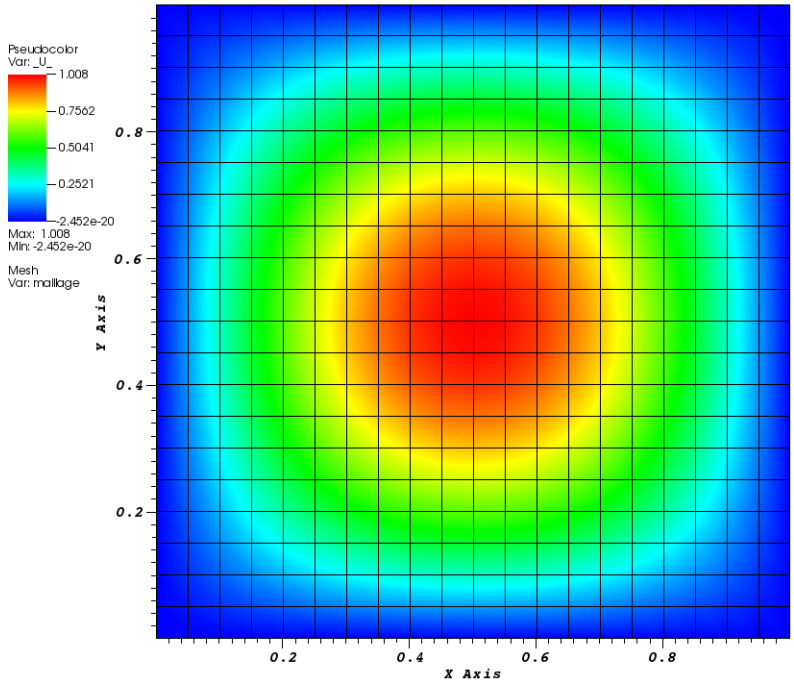


FIGURE 3.16: Solution du problème 3.9 sur un maillage conforme.

Dans les deux figures qui suivent, on affiche la solution approchée du problème , selon la même coupe $z = 0.5$, sur deux maillages non conformes : le premier avec un seul niveau de raffinement et le second avec deux niveaux de raffinement.

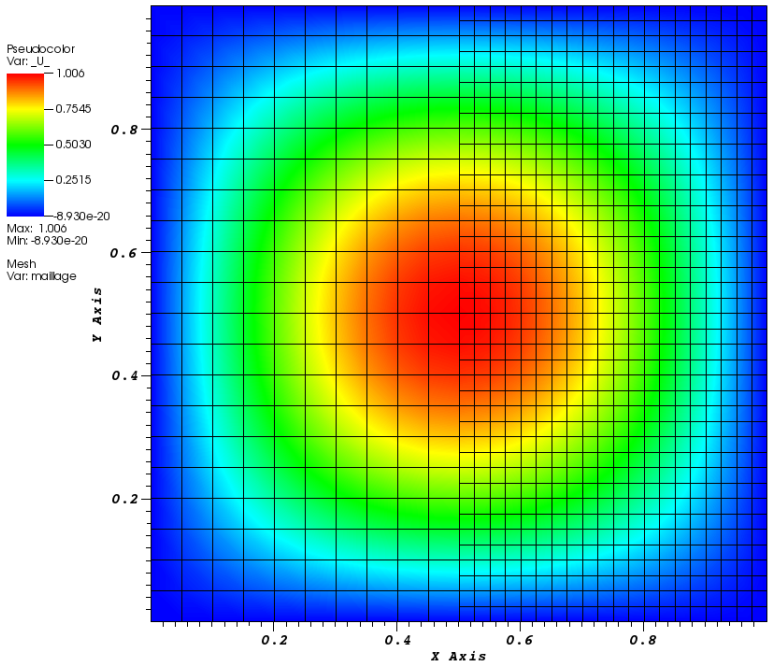


FIGURE 3.17: Solution du problème 3.9 sur le 1er maillage non conforme.

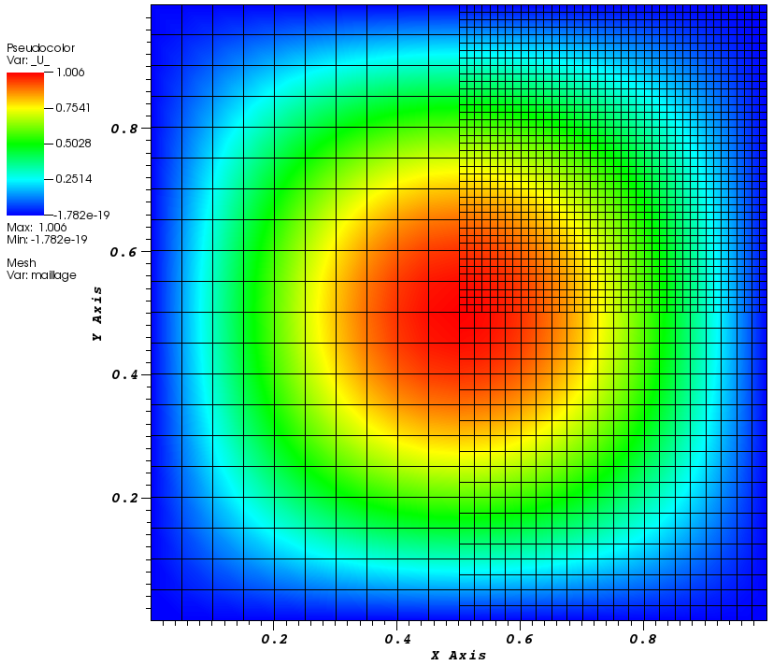


FIGURE 3.18: Solution du problème 3.9 sur le 2nd maillage non conforme.

- On considère le problème sur $\Omega = [0,1]^3$ avec la condition de Neumann aux bords :

$$-\Delta^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = f^{\mathcal{T}} \text{ dans } \Omega \text{ et } \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.10}$$

où $f^{\mathcal{T}} = 3\pi^2 \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$. La solution exacte est : $u^{\mathcal{T}} = \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$. On affiche dans les deux figures suivantes une solution approchée du problème sur un maillage conforme puis sur un maillage non conforme.

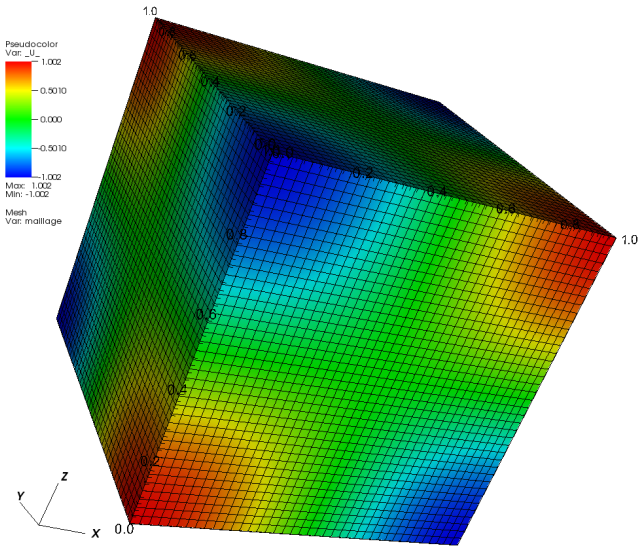


FIGURE 3.19: Solution du problème 3.10 sur un maillage conforme.

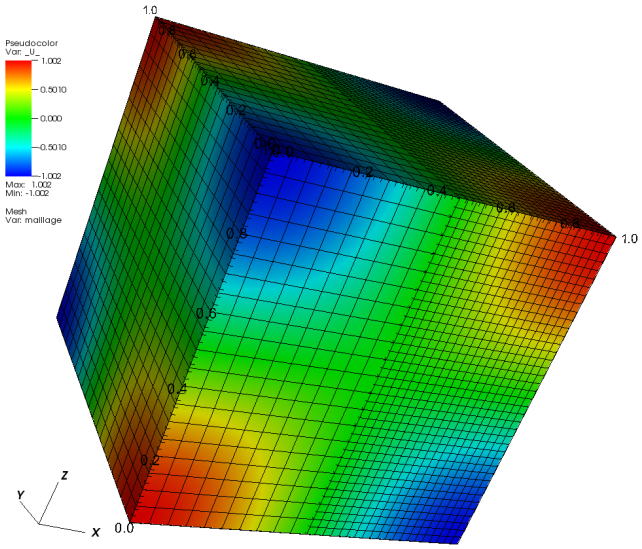


FIGURE 3.20: Solution du problème 3.10 sur un maillage non conforme.

3.6 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre un schéma DDFV et les notations associées que nous utiliserons tout le long de ce manuscrit. Ce schéma est composé de deux maillages $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$ qui vont servir par la suite pour discrétiser respectivement le champs de vitesse $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et la pression $p^{\mathcal{D}}$. On a définit sur ces maillages les opérateurs divergence et gradient discrets, $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}$ et $\nabla^{\mathcal{D}}$, qui sont en dualité (voir la $1^{\text{ère}}$ formule de Green discrète). Par un jeu d'écriture on a construit deux autres opérateurs divergence et gradient discrets, $\mathrm{div}^{\mathcal{D}}$ et $\nabla^{\mathcal{T}}$ qui sont aussi en dualité (voir la $2^{\text{ème}}$ formule de Green discrète). Dans les deux cas, on peut faire des compositions de la divergence et du gradient pour obtenir deux opérateurs Laplaciens, $\Delta^{\mathcal{T}} = \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{T}}$ et $\Delta^{\mathcal{D}} = \mathrm{div}^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{D}}$, des opérateurs consistants et d'ordre 2 en norme L^2.

Numériquement, pour le problème de Laplace utilisant un des deux opérateurs, on a même obtenu une super-convergence en norme L^2 en faisant varier les conditions limites, cependant la preuve de l'estimation théorique est encore un problème ouvert.

4 Écoulements fluides incompressibles

Comme nous l'avons introduit au premier chapitre lors de la présentation du modèle, l'écoulement que nous considérons est constitué d'un fluide incompressible gouverné par les équations de Navier-Stokes. Nous disposons à présent, avec les schémas DDFV, des outils numériques qui permettent de discrétiser des problèmes elliptiques sur des maillages conformes et non conformes. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en utilisant les discrétisations DDFV.

En considérant le domaine d'étude Ω, un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, on rappelle que ces équations peuvent s'écrire dans le cas continu sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho\left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} + \text{(C.L.)}, \tag{4.1}$$

où $\mathbf{u}$ et p sont respectivement le champ de vitesse et la pression définis sur Ω. Le terme source $\mathbf{f}$ représente les forces volumiques agissant sur le système, ρ est la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique. Les conditions aux limites (C.L.) ne sont pas données ici, mais elles sont nécessaires pour fermer le système. Nous verrons plus tard dans ce chapitre les différents types de conditions que nous allons employer.

Une difficulté majeure dans la recherche d'une solution discrète à ce système est le couplage entre la vitesse et la pression au travers de la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$. Pour tenir compte de cette condition nous utilisons une méthode de projection qui, par un procédé itératif de type "prédiction-correction", donne un découplage vitesse/pression conduisant à la résolution de deux équations en deux étapes successives. La première étape revient à chercher une prédiction de la vitesse qui *a priori* ne vérifie pas la contrainte d'incompressibilité, puis par une correction de la pression, la deuxième étape aboutit à convergence, à la vérification de la contrainte. Ces techniques font parties de l'ensemble des méthodes de projection qui sont largement employées et développées depuis les travaux originaux de A.J. Chorin [24] et R. Temam [91]. Les méthodes qui proposent des résolutions directes sous forme couplée à l'instar des méthodes de matrice d'influence [57] et des méthodes basées sur l'algorithme d'Uzawa [79], se révèlent complexes ou trop coûteuses surtout en dimension 3.

Dans ce cadre, l'intérêt d'utiliser une méthode de projection est le découplage qui permet une simplicité pratique de mise en œuvre et de souplesse d'utilisation à moindre coût. En effet, les méthodes de projection s'articulent autour de la décomposition de Hodge [24] dont le théorème stipule qu'un champ vectoriel $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ peut être décomposé en un champ à divergence nulle $\mathbf{u}^*$ et en un gradient d'une fonction scalaire ∇q tel que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \nabla q$. On peut ainsi définir un opérateur de projection orthogonale $\mathrm{P_H}$ tel que :

$$\mathbf{u}^* = \mathrm{P_H}\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \nabla q = \mathbf{u} - \mathrm{P_H}\mathbf{u}.$$

L'opérateur $\mathrm{P_H}$ projette les vitesses dans un espace de vitesse à divergence nulle avec des conditions aux limites appropriées. En appliquant cet opérateur de projection à chaque pas de temps, la condition d'incompressibilité sera respectée, associée à un correcteur en pression.

Les algorithmes que nous avons étudiés ont été proposés par J.L. Guermond *et al.* dans [49, 50]. Nous nous sommes intéressés aussi aux méthodes dites de projection vectorielles. Elles ont été utilisées par C. Romé [82] pour la résolution des équations de Navier-Stokes avec une méthode de raccordement de maillages non-conformes. Une variante plus rapide utilisant la pénalisation a été proposée et développée récemment par Ph. Angot *et al.* [5, 6].

4.1 Équation de Stokes

Nous commençons par le traitement de l'équation de Stokes instationnaire en mettant de coté le terme de convection non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ de l'équation de Navier-Stokes. Ce qui revient à modéliser l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à faible Reynolds. En imposant des conditions d'adhérence, on peut compléter l'équation (4.1) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \rho\partial_t\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = & \mathbf{f} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \mathrm{div}(\mathbf{u}) = & 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \mathbf{u} = & 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.2}$$

La fonction $\mathbf{f}$ et la donnée initiale $\mathbf{u}(t=0,\mathbf{x})$ sont supposées suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution dans un bon cadre fonctionnel [63], [92].

4.1.1 Discrétisation temporelle

On s'intéresse par la suite à l'approximation de la solution de (4.2) sur l'intervalle $[0,T]$. Introduisons une partition de l'intervalle de temps : $t_n = n\delta t$ (δt désigne le pas de temps). On note par $\mathbf{u}^n$ et p^n respectivement le champs de vitesse et la pression à l'instant t_n.

La discrétisation par un schéma implicite de la 1ère équation du système (4.2) donne :

$$\frac{\rho}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}.$$

En posant $r = \rho/\delta t$ et $\mathbf{f}^n = \mathbf{f} + r\mathbf{u}^n$ on obtient la discrétisation temporelle suivante, où $\mathbf{u}^{n+1}$ résout un problème elliptique :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{n+1} - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^n & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

4.1.2 Algorithme de résolution

Nous avons fait le choix, tel que nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, d'utiliser une méthode de projection pour la résolution des équations de Stokes et de Navier-Stokes décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible. L'algorithme que nous présentons ici et que nous avons implémenté est basé sur une variante des méthodes de projection inspirée par les travaux de J.L. Guermond *et al.* [49].

L'algorithme consiste à construire une suite d'approximation de la vitesse $(\mathbf{u}_k)$ et une autre de la pression (p_k). En premier lieu, on détermine le champ de vitesse $\mathbf{u}_k$ prédiction de $\mathbf{u}$, qualifiée de vitesse intermédiaire, avant de le projeter et de le rendre à divergence nulle suivant la décomposition de Helmholtz-Hodge en introduisant une correction sur la pression p_k. Initiatilement, on dispose d'une vitesse donnée $\mathbf{u}_0$ et d'une pression p_0 que l'on peut prendre arbitraire. Étant donnée une solution à l'itération k, on cherche la solution à l'itération $k+1$; et finalement on constitue un couple $(\mathbf{u}_k, p_k)$ destiné à converger vers $(\mathbf{u}, p)$ solution du système (4.3) selon l'algorithme suivant :

- Étape 1 : prédiction de la vitesse

$$\begin{cases} r\mathbf{u}_{k+1} - \mu\Delta\mathbf{u}_{k+1} = -\nabla p_k + \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{k+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

- Étape 2 : solution en pression

$$\begin{cases} \frac{\mu}{r}q - \Delta q = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_{k+1}) & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n q = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

- Étape 3 : correction de la pression

$$p_{k+1} = p_k + \alpha q. \tag{4.6}$$

Dans les deux première étapes, on obtient deux équations elliptiques découplées vis à vis du couple vitesse/pression à résoudre successivement. Dans la troisième étape, on introduit un cœfficient α pour corriger la pression. Il dépend d'autres paramètres du problème et, par son contrôle, on assure la convergence de l'algorithme dont le résultat est énoncé dans théorème qui suit :

Théorème 3

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{u}_k \in (H_0^1(\Omega))^3$ *et* $p, p_k \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ *tels que* $(\mathbf{u}, p)$ *et* $(\mathbf{u}_k, p_k)$ *sont les solutions respectives de* (4.3) *et* (4.4) − (4.5) − (4.6).

Si $\alpha \leq 2r$, *alors :*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k & \longrightarrow & \mathbf{u} & \text{dans } H_0^1(\Omega) \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_k & \longrightarrow & 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \\ p_k & \longrightarrow & p & \text{dans } L^2(\Omega)/\mathbb{R}. \end{cases}$$

Démonstration :

On prend $q_k = p_k - p$ et $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}$, et on choisit p_0 quelconque dans $L^2(\Omega))/\mathbb{R}$.

Connaissant q_k dans $L^2(\Omega)$, on trouve $\mathbf{v}_{k+1} \in (H_0^1(\Omega))^3$ tel que :

$$r\mathbf{v}_{k+1} - \mu\Delta\mathbf{v}_{k+1} + \nabla q_k = 0. \tag{4.7}$$

On définit q_{k+1} tel que :

$$\frac{\nu}{r}(q_{k+1} - q_k) - \Delta(q_{k+1} - q_k) + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) = 0, \tag{4.8}$$

où α est un paramètre réel positif.

On pose : $q_{k+1} - q_k = q$.

On désigne par $\langle ., . \rangle$ indifféremment le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ et sur $(L^2(\Omega))^3$. La norme associée à ce produit scalaire (indifféremment dans les deux cas) est désignée par $\|.\|$).

1. Vérifions que :

$$\frac{\mu}{r}(\|q_{k+1}\|^2 - \|q_k\|^2) + \|\nabla q_{k+1}\|^2 - \|\nabla q_k\|^2 + \alpha \langle \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}, q_{k+1} - q_k + 2q_k \rangle = 0 \tag{4.9}$$

On a :

$$\|\nabla q_{k+1}\|^2 = \|\nabla q_k + \nabla q\|^2 = \|\nabla q_k\|^2 + \|\nabla q\|^2 + 2\langle \nabla q_k, \nabla q \rangle .$$

Par la formule de Green et en utilisant l'équation (4.8), on a :

$$\begin{aligned}\|\nabla q\|^2 &= \langle \nabla q, \nabla q\rangle_{L^2} \\ &= -\langle \Delta q, q\rangle + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} q \mathrm{d}\sigma \\ &= \left\langle -\frac{\mu}{r} q - \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q \right\rangle \quad (\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega) \\ &= -\alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q\rangle - \frac{\mu}{r}\|q\|^2.\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve que :

$$\begin{aligned}\langle \nabla q_k, \nabla q\rangle &= -\langle \Delta q, q_k\rangle + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} q_k \mathrm{d}\sigma \\ &= -\left\langle \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) + \frac{\mu}{r} q, q_k \right\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\|\nabla q_{k+1}\|^2 - \|\nabla q_k\|^2 &= -\alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q\rangle - \frac{\mu}{r}\|q\|^2 - \langle 2\alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) - 2q, q_k\rangle \\ &= -\alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q + 2q_k\rangle - \frac{\mu}{r}(2\langle q, q_k\rangle + \|q\|^2).\end{aligned}$$

Or :

$$\|q\|^2 + 2\langle q, p_k\rangle = \langle q_{k+1} - q_k, q_{k+1} + q_k\rangle = \|q_{k+1}\|^2 - \|q_k\|^2.$$

Alors :

$$\frac{\mu}{r}(\|q_{k+1}\|^2 - \|p_k\|^2) + \|\nabla q_{k+1}\|^2 - \|\nabla q_k\|^2 + \alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q_{k+1} - q_k + 2q_k\rangle = 0.$$

2. Montrons que :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1}\rangle_{H^{-1},H^1} = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_k \mathrm{d}x \tag{4.10}$$

En multipliant l'équation (4.7) par $\mathbf{v}_{k+1}$ et en utilisant le produit scalaire $\langle ., . \rangle$, on a :

$$\langle r\mathbf{v}_{k+1} - \mu\Delta \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}\rangle = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1}\rangle_{H^{-1},H^1}.$$

Ainsi, on trouve que :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 - \mu\langle \Delta \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}\rangle = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1}\rangle_{H^{-1},H^1}.$$

Par la formule de Green et l'équation (4.7), on a :

$$\begin{aligned}\langle \Delta \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle &= -\langle \nabla \mathbf{v}_{k+1}, \nabla \mathbf{v}_{k+1} \rangle + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1}}{\partial n} \cdot \mathbf{v}_{k+1} \mathrm{d}\sigma \\ &= -\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 \quad (\mathbf{v}_{k+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega).\end{aligned}$$

Donc :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle .$$

D'autre part, en utilisant une intégration par partie et le fait que $\mathbf{v}_{k+1} = 0$ sur $\partial\Omega$, on trouve que :

$$-\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = \langle \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}, q_k \rangle - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{n} q_k \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_k \mathrm{d}x.$$

Finalement :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_k \mathrm{d}x.$$

3. Montrons que :

$$-\alpha \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k)\mathrm{d}x = \frac{\mu}{r}\|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \tag{4.11}$$

On a :

$$-\alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) = \frac{\mu}{r}(q_{k+1} - q_k) - \Delta(q_{k+1} - q_k).$$

Donc :

$$\begin{aligned}-\langle \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q_{k+1} - q_k \rangle &= \left\langle \frac{\mu}{r}(q_{k+1} - q_k) - \Delta(q_{k+1} - q_k), q_{k+1} - q_k \right\rangle \\ &= \frac{\mu}{r}\|q_{k+1} - q_k\|^2 - \langle \Delta(q_{k+1} - q_k), q_{k+1} - q_k \rangle .\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (4.5), on trouve :

$$\begin{aligned}\langle -\Delta(q_{k+1} - q_k), q_{k+1} - q_k \rangle &= \langle \nabla(q_{k+1} - q_k), \nabla(q_{k+1} - q_k) \rangle \\ &= \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2.\end{aligned}$$

Finalement :

$$-\alpha \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k)\mathrm{d}x = \frac{\mu}{r}\|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2.$$

4. Montrons l'inégalité :

$$\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}-q_k\|^2+\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|^2\leq\alpha^2\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 \tag{4.12}$$

En utilisant la formule de Green et le fait que $\mathbf{v}_{k+1}=0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$-\alpha\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})q_k\mathrm{d}x=\alpha\left\langle\nabla q_k,\mathbf{v}_{k+1}\right\rangle$$
$$-\alpha\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})q_{k+1}\mathrm{d}x=\alpha\left\langle\nabla q_{k+1},\mathbf{v}_{k+1}\right\rangle.$$

Donc :

$$-\alpha\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}_{k+1}(q_{k+1}-q_k)\mathrm{d}x=\alpha\left\langle\nabla(q_{k+1}-q_k),\mathbf{v}_{k+1}\right\rangle. \tag{4.13}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|\left\langle\nabla(q_{k+1}-q_k),\mathbf{v}_{k+1}\right\rangle|\leq\|\mathbf{v}_{k+1}\|\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|.$$

Et en utilisant l'équation (4.10) on déduit que :

$$\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}-q_k\|^2+\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|^2\leq\alpha\|\mathbf{v}_{k+1}\|\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|. \tag{4.14}$$

D'autre part, on a :

$$\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|^2\leq\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}-q_k\|^2+\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|^2.$$

En utilisant (4.13) et (4.11), on trouve que :

$$\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|^2\leq\alpha\left\langle\nabla(q_{k+1}-q_k),\mathbf{v}_{k+1}\right\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|^2\leq\alpha\|\mathbf{v}_{k+1}\|\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|.$$

Ce qui donne :

$$\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|\leq\alpha\|\mathbf{v}_{k+1}\|.$$

Finalement, en utilisant (4.14) :

$$\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}-q_k\|^2+\|\nabla(q_{k+1}-q_k)\|^2\leq\alpha^2\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

5. Vérifions que :

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}(q_{k+1} - q_k + 2q_k)\mathrm{d}x \geq (2r - \alpha)\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + 2\mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 \tag{4.15}$$

En utilisant (4.11) et (4.12), on trouve :

$$-\alpha \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k)\mathrm{d}x = \frac{\mu}{r}\|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \alpha^2\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

Donc :

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k)\mathrm{d}x \geq -\alpha\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

D'autre part, selon (4.10) :

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})q_k\mathrm{d}x = r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

Finalement :

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}(q_{k+1} - q_k + 2q_k)\mathrm{d}x \geq (2r - \alpha)\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + 2\mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

6. On pose :

$$r_k = \frac{\mu}{r}\|q_k\|^2 + \|\nabla q_k\|^2.$$

En utilisant (4.9), on trouve que :

$$r_{k+1} - r_k = -\alpha \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}(q_{k+1} - q_k + 2q_k)\mathrm{d}x.$$

Et en utilisant (4.15), on a :

$$r_{k+1} - r_k \leq \alpha(\alpha - 2r)\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 - 2\alpha\mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

Comme $\alpha \geq 0$, pour que la suite $(r_k)_k$ soit décroissante, il suffit d'avoir :

$$\alpha \leq 2r.$$

Sous cette condition, en prenant $C_1 = \min(\alpha(2r - \alpha), 2\alpha\mu)$ on a :

$$\begin{aligned} r_{k+1} - r_k &\leq -C_1(\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2) \\ &= -C_1\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2_{H^1}. \end{aligned}$$

La suite $(r_k)_k$ est décroissante positive, alors elle converge et donc :

$$\lim_{k\to\infty}(r_{k+1}-r_k)=0.$$

Alors, selon l'inégalité précédente on a :

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{v}_{k+1}\|_{H^1}=0.$$

Ainsi, on obtient la convergence pour la vitesse et sa divergence :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \longrightarrow \mathbf{u} & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ fortement.} \\ \operatorname{div}\mathbf{u}_k \longrightarrow \operatorname{div}\mathbf{u}=0 & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fortement.} \end{cases}$$

D'autre part, selon (4.7) on trouve que :

$$\nabla q_k=-r\mathbf{v}_{k+1}+\mu\Delta\mathbf{v}_{k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

En effet, en utilisant la formule de Green et que $\mathbf{v}_{k+1}$ sur $\partial\Omega$, on a $\forall\phi\in H_0^1(\Omega)$:

$$\langle\nabla q_k,\phi\rangle_{H^{-1},H^1}=-r\int_\Omega\mathbf{v}_{k+1}\phi\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega\nabla\mathbf{v}_{k+1}\nabla\phi\mathrm{d}x.$$

Ce qui implique :

$$|\langle\nabla q_k,\phi\rangle_{H^{-1},H^1}|\leq\max(r,\mu)|\langle\mathbf{v}_{k+1},\phi\rangle_{H^{-1},H^1}|.$$

Et par l'inégalité de Schwartz, avec $(C_2=\max(r,\mu))$, on a :

$$|\langle\nabla q_k,\phi\rangle_{H^{-1},H^1}|\leq C_2\|\mathbf{v}_{k+1}\|_{H^{-1}}\|\phi\|_{H^1}.$$

Donc : $$\|\nabla q_k\|_{H^{-1}}\leq C_2\|\mathbf{v}_{k+1}\|_{H^{-1}}.$$

Or, on sait par l'inégalité Nečas [72] qu'il existe $C_3>0$ tel que :

$$\|q_k-\int_\Omega q_k\|\leq C_3\|\nabla q_k\|_{H^{-1}}.$$

Donc : $\lim_{k\to\infty}\|q_k-\int_\Omega q_k\|=0$, et finalement :

$$p_k\longrightarrow p \quad \text{dans } L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

■

Remarque 12

On peut formuler un algorithme plus général, qui donne un schéma hybride entre la méthode du Lagrangien Augmenté [38] et la méthode de projection. Dans ce cas, les équations de prédiction/correction peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r\boldsymbol{u}_{k+1} - \mu\Delta\boldsymbol{u}_{k+1} - \xi\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{k+1} &= -\nabla p_k + \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}_{k+1} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma q - \delta\Delta q &= -\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_{k+1}) & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n q &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$p_{k+1} = p_k + \alpha q + \beta \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{k+1}.$$

Les différents paramètres permettent de combiner les deux méthodes tels que,

– *pour le Lagrangien Augmenté :*

$$\gamma = 1, \delta = \alpha = 0 \implies \beta \text{ est limité par } \xi + \frac{\mu}{2} ;$$

– *pour la projection itérative :*

$$\delta = 1, \xi = \gamma = \beta = 0 \implies \alpha \text{ est limité par } r.$$

4.1.3 Discrétisation spatiale

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la discrétisation spatiale de l'équation de Stokes et réécrire l'algorithme de projection par le schéma DDFV. Comme évoqué en détail au chapitre précédent, l'intérêt principal de ce schéma, outre son application sur presque tous les maillages (non-structurés et non-conformes), réside dans les relations de dualités discrètes qu'il présente. En effet, ces relations seront nécessaires, comme dans le cas continu, pour l'application de la méthode de projection dans le cas discret du fait du découplage pression/vitesse et les conditions aux limites qui en découlent.

Nous cherchons l'approximation de la vitesse $\mathbf{u}$ sur les centres des cellules et sur les sommets (maillage $\mathcal{T}$) et l'approximation de la pression p sur les cellules diamants (maillage $\mathcal{D}$). La discrétisation sur le maillage DDFV de l'équation (4.3) donne :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \mu\,\Delta^{\mathcal{T}}\,\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{T}}\,p^{\mathcal{D}} = \mathbf{f}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Comme dans le cas continu, on construit deux suites $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}})$ et $(p_k^{\mathcal{D}})$ respectivement pour la vitesse et la pression discrètes. La suite $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}})$ est initialisée par une donnée $\mathbf{u}_0^{\mathcal{T}}$ connue (nulle par exemple) et la suite $(p_k^{\mathcal{D}})$ initialisée en prenant une pression $p_0^{\mathcal{D}}$ quelconque.

L'algorithme de projection peut s'écrire dans le cas discret comme suit :

- Étape 1 : prédiction de la vitesse :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu\,\Delta^{\mathcal{T}}\,\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = & -\nabla^{\mathcal{T}}\,p_k^{\mathcal{D}} + \mathbf{f}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.17}$$

- Étape 2 : solution en pression :

$$\begin{cases} \frac{\mu}{r} q^{\mathcal{D}} - \Delta^{\mathcal{D}}\,q^{\mathcal{D}} = & -\operatorname{div}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{n} = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.18}$$

- Étape 3 : correction de pression :

$$p_{k+1}^{\mathcal{D}} = p_k^{\mathcal{D}} + \alpha q^{\mathcal{D}}. \tag{4.19}$$

On remarque que le formalisme des schémas DDFV nous permet de transposer tous les opérateurs écrits dans le cas continu en leurs équivalents dans le cas discret sans aucun problème. Dans l'algorithme précédent, les deux premières étapes correspondent à deux équations elliptiques discrétisées respectivement sur le maillage $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$. Notons que dans le chapitre précédent on avait testé et validé sur ces deux maillages la résolution du problème de Poissons avec deux types de conditions aux limites, Dirichlet et Neumann.

Comme dans le cas continu, le paramètre α est choisi en fonction de r afin de garantir la convergence de la méthode où le couple $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}}, p_k^{\mathcal{D}})$ est destiné à converger vers $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$ solution du système (4.16). Le résultat est annoncé dans le théorème suivant :

Théorème 4

Soient $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$ *et* $p^{\mathcal{D}}, p_k^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ *tels que* $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$ *et* $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}}, p_k^{\mathcal{D}})$ *sont les solutions respectives de* (4.16) *et* (4.17) – (4.18) – (4.19).

Si : $\alpha \leq 2r$, *alors :*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} & \longrightarrow & \mathbf{u}^{\mathcal{T}} & \text{dans } (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3 \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} & \longrightarrow & 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \\ p_k^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & p^{\mathcal{D}} & \text{dans } \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

Démonstration :

On prend $q_k^{\mathcal{D}} = p_k^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}}$ et $\mathbf{v}_k^{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$, et on choisit $p_0^{\mathcal{D}}$ quelconque dans $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$.

Connaissant $q_k^{\mathcal{D}}$, on trouve $\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$ tel que :

$$r\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu\,\Delta^{\mathcal{T}}\,\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{T}}\,q_k^{\mathcal{D}} = 0. \tag{4.20}$$

On définit $q_{k+1}^{\mathcal{D}}$ tel que (α un paramètre réel positif) :

$$\frac{\mu}{r}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) - \Delta^{\mathcal{D}}\,(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) + \alpha\,\mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}) = 0. \tag{4.21}$$

On pose : $q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} = q^{\mathcal{D}}$.

On désigne par $\|.\|$ indifféremment la norme de $(\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$ et de $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$.

1. Vérifions que :

$$\boxed{\frac{\mu}{r}(\|q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|q_k^{\mathcal{D}}\|^2) + \|\,\nabla^{\mathcal{D}}\,q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|\,\nabla^{\mathcal{D}}\,q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \alpha\,\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}} = 0.} \tag{4.22}$$

On a :

$$\begin{aligned}\|\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 &= \|\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q_k^{\mathcal{D}} + \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\|^2 \\ &= \|\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\|^2 + 2\left\langle \nabla^{\mathcal{T}}\,q_k^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Par la première formule de Green discrète on a :

$$\begin{aligned}\|\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\|^2 &= \left\langle \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{T}} \\ &= -\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{n})\right\rangle_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Comme : $\gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{n}) = 0$, car $\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\cdot\mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on trouve :

$$\|\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\|^2 = \left\langle -\,\Delta^{\mathcal{D}}\,q^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}}.$$

En utilisant l'équation (4.8), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\,\nabla^{\mathcal{T}}\,q^{\mathcal{D}}\|^2 &= \left\langle -\frac{\mu}{r}q^{\mathcal{D}} - \alpha\,\mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &= -\alpha\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\mu}{r}\|q^{\mathcal{D}}\|^2.\end{aligned}$$

De la même manière on obtient :

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{T}} &= -\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle {q_k}^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n}) \right\rangle_{\partial\Omega} \\ &= -\left\langle \alpha \,\mathrm{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}) + \frac{\mu}{r} p^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\| \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \| \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2 &= -\alpha \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\mu}{r}\|q^{\mathcal{D}}\|^2 \\ &\quad - 2\left\langle \alpha \,\mathrm{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}) - q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &= -\alpha \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\mu}{r}(2\left\langle q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \|q^{\mathcal{D}}\|^2).\end{aligned}$$

Comme :

$$\|q^{\mathcal{D}}\|^2 + 2\left\langle q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = \left\langle q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} + q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = \|q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|q_k^{\mathcal{D}}\|^2.$$

Alors, on obtient :

$$\frac{\mu}{r}(\|q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|q_k^{\mathcal{D}}\|^2) + (\| \nabla^{\mathcal{D}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \| \nabla^{\mathcal{D}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2) + \alpha \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = 0.$$

2. Montrons que :

$$\boxed{r\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \mu\| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 = -\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}} \tag{4.23}$$

En multipliant l'équation (4.20) par $\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}$ et en intégrant sur $\mathcal{T}$, on a :

$$\left\langle r\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu\, \Delta^{\mathcal{T}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = -\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}}.$$

Donc :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 - \mu \underbrace{\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{T}} (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}}}_{=A} = -\underbrace{\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}}}_{=B}.$$

Par la la première formule de Green discrète, on a :

$$\begin{aligned}A &= \sum_{i=1}^{3} \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{T}} (\nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}), v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} \ \text{(avec : } v_{k+1}^{\mathcal{T}} = (v_{i,k+1}^{\mathcal{T}})_{i=1}^{3}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (-\left\langle \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}}^{3} + \left\langle \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}, \gamma^{\mathcal{D}}(v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}) \right\rangle_{\partial\Omega}).\end{aligned}$$

Comme : $v_{k+1}^{\mathcal{T}} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors : $\gamma^{\mathcal{D}}(v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}) = 0$ et donc :

$$A = \sum_{i=1}^{3}(-\left\langle \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{D}}^{3} = -\| \nabla^{\mathcal{D}} v_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Par la seconde formule de Green discrète, on a

$$B = \left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = -\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} + \left\langle q_{k+1}^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}) \right\rangle_{\partial\Omega}.$$

Or, $\gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n})$ car $\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc : $B = -\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}$.
Ainsi, on obtient :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \mu\| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 = -\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \right\rangle_{\mathcal{T}} = \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}.$$

3. Montrons que :

$$-\alpha \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \right\rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \| \nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2. \tag{4.24}$$

En multipliant (4.21) par $q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}$ et en intégrant sur $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle -\alpha\, \mathrm{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} &= \left\langle \frac{\mu}{r}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) - \Delta^{\mathcal{D}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &= \frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 - \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} (\nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

En utilisant la deuxième formule de Green discrète , on trouve :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} (\nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} &= -\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \right\rangle_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \left\langle \nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\partial\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

Or, on a $\gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \cdot \mathbf{n}) = 0$ car $\nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} (\nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} &= -\left\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \right\rangle_{\mathcal{T}} \\ &= \| \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$-\alpha \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \right\rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \| \nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2.$$

4. Montrons l'inégalité :

$$\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}\|^2+\|\nabla^{\mathcal{T}}q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}\|^2\leq\alpha^2\|v_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 \tag{4.25}$$

En utilisant la deuxième formule de Green et que $v_{k+1}^{\mathcal{T}}=0$ sur $\partial\Omega$, on trouve :

$$\begin{aligned}-\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}),q_k^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}}&=\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}q_k^{\mathcal{D}},\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}+\left\langle q_k^{\mathcal{D}},\gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\cdot\mathbf{n})\right\rangle_{\partial\mathcal{D}}\\&=\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}q_k^{\mathcal{D}},\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}),q_{k+1}^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}}&=\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}q_{k+1}^{\mathcal{D}},\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}+\left\langle q_{k+1}^{\mathcal{D}},\gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\cdot\mathbf{n})\right\rangle_{\partial\mathcal{D}}\\&=\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}q_{k+1}^{\mathcal{D}},\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Donc :

$$-\alpha\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}),q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}\right\rangle_{\mathcal{D}}=\alpha\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}),\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}. \tag{4.26}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}),\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}|\leq\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Et en utilisant l'équation (4.23) on déduit que :

$$\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}\|^2+\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|^2\leq\alpha\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|. \tag{4.27}$$

D'autre part, on a :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|^2\leq\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}\|^2+\|\nabla^{\mathcal{T}}q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}\|^2.$$

En utilisant (4.24) et (4.26), on trouve que :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|^2\leq\alpha\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}),\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}.$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\left\langle\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}}),\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}\leq\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Ce qui donne :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|^2\leq\alpha\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}}-q_k^{\mathcal{D}})\|\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Autrement dit :

$$\| \nabla^{\mathcal{T}} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\| \leq \alpha \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Finalement, en utilisant (4.27), on trouve que :

$$\frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \| \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 \leq \alpha^2 \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

5. Vérifions que :

$$\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \geq (2r - \alpha)\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + 2\mu \| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 \tag{4.28}$$

En utilisant (4.24) et (4.25), on trouve que :

$$-\alpha \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\mu}{r}\|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \| \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 \leq \alpha^2 \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Donc :

$$\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \geq -\alpha \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

D'autre part, selon (4.23) on a :

$$\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} = r\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \mu \| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Finalement, on trouve que :

$$\left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \geq (2r - \alpha)\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + 2\mu \| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

6. On pose :

$$r_k = \frac{\mu}{r}\|q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \| \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2.$$

En utilisant (4.22), on a :

$$r_{k+1} - r_k = -\alpha \left\langle \mathrm{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}.$$

En utilisant (4.28), on trouve que :

$$r_{k+1} - r_k \leq \alpha(\alpha - 2r)\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 - 2\alpha\mu \| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Comme $\alpha \geq 0$, pour que la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit décroissante, il suffit d'avoir :

$$\alpha \leq 2r.$$

Sous cette condition, en prenant $C_1 = \min(\alpha(2r-\alpha), 2\alpha\mu)$, on a :

$$r_{k+1} - r_k \leq -C_1(\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2) = -C_1\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1}^2. \tag{4.29}$$

La suite (r_k) est décroissante positive, alors elle converge et donc $\lim\limits_{k\to\infty}(r_{k+1} - r_k) = 0$
Ainsi, selon l'inégalité (4.29) on obtient $\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1} = 0$, d'où :

$$\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \text{ dans } (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3.$$

Comme $\mathrm{div}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} = \mathrm{tr}\,(\nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}})$ est combinaison linaire d'éléments de $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$, on déduit :

$$\mathrm{div}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{\mathcal{D}}.$$

Enfin, comme on ne peut pas démontrer en DDFV une inégalité équivalente à celle de Nečac on s'arrête au niveau de la convergence du gradient de pression.
En prenant l'équation (4.20) : $\nabla^{\mathcal{T}}q_k^{\mathcal{D}} = -r\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} + \mu\,\Delta^{\mathcal{T}}\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}$,
et en la multipliant par $\phi^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$, on trouve et en utilisant la 1ère formule de Green :

$$\left\langle \nabla^{\mathcal{T}}q_k^{\mathcal{D}}, \phi^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}} = -r\left\langle \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \phi^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}} - \mu\left\langle \nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}}\phi^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{D}}.$$

Ce qui implique :

$$|\left\langle \nabla^{\mathcal{T}}q_k^{\mathcal{D}}, \phi^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}| \leq \max(r,\mu)|\left\langle \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \phi^{\mathcal{T}}\right\rangle_{H^{-1},H^1}| \leq \max(r,\mu)\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1}\|\phi^{\mathcal{T}}\|_{H^1}.$$

En considérant la norme duale discrète : $\|\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H^{-1}} = \sup_{\|\phi^{\mathcal{T}}\|\leq 1}\frac{\left\langle \mathbf{u}^{\mathcal{T}},\phi^{\mathcal{T}}\right\rangle_{\mathcal{T}}}{\|\phi^{\mathcal{T}}\|}$
L'inégalité précédente peut être écrite sous la forme (avec $C_2 = \max(r,\mu)$) :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}q_k^{\mathcal{D}}\|_{H^{-1}} \leq C_2\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1}.$$

Or on a : $\lim\limits_{k\to\infty}\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1} = 0$, donc on conclu que :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(p_{k+1}^{\mathcal{D}} - p_k^{\mathcal{D}})\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0.$$

■

Remarque 13

Notons que les normes discrètes des quantités utilisées dans la démonstration précédente sont bornées par rapport au pas de maillage. Les résultats de convergence (quand $k \to +\infty$) sont donc uniformes par rapport à la taille du maillage.

Méthode de projection vectorielle

À notre algorithme, on peut adapter la méthode de projection vectorielle [5, 6] que nous avons évoquée à l'introduction de ce chapitre. La première étape de prédiction de vitesse est la même. Dans la deuxième, on résout une équation elliptique dont l'opérateur est un ∇ div ; la solution obtenue est un pur gradient qui sert à faire, à la troisième étape, une correction en gradient de pression. Avec la discrétisation DDFV, l'algorithme peut s'écrire comme suit :

- Étape 1 : prédiction de la vitesse :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu\,\Delta^{\mathcal{T}}\,\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = & -\nabla^{\mathcal{T}}\,p_k^{\mathcal{D}} + \mathbf{f}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Étape 2 : solution en "gradient de pression" :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \frac{1}{\epsilon}\,\nabla^{\mathcal{T}}\,\mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}} & = & \frac{1}{\epsilon}\,\nabla^{\mathcal{T}}\,\mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}}\cdot\mathbf{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Étape 2 : Correction de gradient de pression :

$$\nabla^{\mathcal{T}}\,p_{k+1}^{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{T}}\,p_k^{\mathcal{D}} + \alpha\mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}}.$$

Selon Ph. Angot [5], parmi les méthodes de projection cette variante est la plus rapide. Mais, on n'a pas constaté de différence entre cette méthode et celle que nous avons présentée précédemment, car on utilise un solveur BiCGStab avec un préconditionneur de Jacobi (*cf.* patrie 4.5 de ce chapitre), tandis que Angot utilise un préconditionneur de type ILU.

4.2 Équation de Navier-Stokes

Le problème de Stokes étudié dans la section précédente est un modèle simplifié d'un écoulement de fluide visqueux incompressible. On reprend à présent l'équation de Navier-Stokes (4.1) où la partie convective $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ n'est plus négligeable, ce qui permet de tenir compte de l'inertie du fluide. Puisque l'écoulement est incompressible, ce terme d'advection peut se décomposer de la manière suivante :

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla\|\mathbf{u}\|^2 - \mathbf{u}\wedge\mathrm{rot}\mathbf{u}.$$

À cette formulation rotationnelle, nous associons la pression de Bernoulli $P = p + \rho\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}$ qui sera considérée dans la suite comme la pression du système.

Ainsi, en imposant des conditions d'adhérence aux parois, le problème (4.1) peut être écrit

comme suit :

$$\begin{cases} \rho\left(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\mathbf{u}\right) - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla P = & \mathbf{f} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \mathrm{div}(\mathbf{u}) = & 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \mathbf{u} = & 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{4.30}$$

La donnée initiale $\mathbf{u}(t=0,\mathbf{x})$ et la fonction $\mathbf{f}$ sont supposées suffisamment régulières pour assurer l'existence des solutions faibles de ce problème dans la cade du théorème de J. Leray ; dont l'étude complète est reprise et détaillée par F. Boyer et P. Fabrie dans [16, chapitre 4].

NB. Dans la suite de ce travail, le système (4.30) sera le formalisme que nous allons utiliser pour décrire les équations de Navier-Stokes de l'écoulement d'un fluide incompressible.

4.2.1 Discrétisations

Discrétisation temporelle

Comme dans le cas de l'équation de Stokes, nous introduisons une partition de l'intervalle de temps $[0,T]$: $t_n = n\delta t$. On note par $\mathbf{u}^n$ et P^n respectivement le champs de vitesse et la pression à l'instant t_n et on pose $r = \rho/\delta t$. La discrétisation temporelle par un schéma semi-implicite de (4.30) donne :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathrm{rot}\mathbf{u}^n - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1} = & \mathbf{f} + r\mathbf{u}^n & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.31}$$

Étude de la stabilité L^2

Pour cela nous allons chercher comment contrôler la solution $\mathbf{u}^n$ par la donnée initiale $\mathbf{u}^0$. On prend la 1ère équation du système (4.31) et on la multiplie par $\mathbf{u}^{n+1}$ puis on intègre sur le domaine Ω :

$$\left\langle r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathrm{rot}\mathbf{u}^n - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2} = \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{H^{-1},H^1} + r\left\langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2}.$$

En utilisant les formules de Green avec $\mathbf{u}^{n+1} = 0$ sur $\partial\Omega$ on trouve :

$$r\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \rho\underbrace{\left\langle \mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathrm{rot}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2}}_{=0} + \mu\left\langle \nabla\mathbf{u}^{n+1}, \nabla\mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2} - \underbrace{\left\langle P^{n+1}, \mathrm{div}\,\mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2}}_{=0}$$
$$= \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{H^{-1},H^1} + r\left\langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2}.$$

Selon l'inégalité de Poincaré $\exists c > 0$ tel que :$c\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \mu\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2$,

donc :

$$(r+c)\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq r\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

Ainsi :

$$(r+c)\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{H^{-1},H^1} + r\left\langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young, on a :

$$\left\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{H^{-1},H^1} \leq \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{H^1} \leq \frac{1}{2c}\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2 + \frac{c}{2}\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2$$

et

$$\left\langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}\right\rangle_{L^2} \leq \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

Donc :

$$(r+c)\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2c}\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2 + \frac{c}{2}\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{r}{2}\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{r}{2}\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

Finalement, en posant $a = \frac{1}{c(r+c)}\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2$, on trouve que :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq a + \frac{r}{r+c}\|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2. \tag{4.32}$$

On considère la suite arithmético-géométrique suivante :

$$y_{n+1} = a + \frac{r}{r+c}y_n.$$

En posant $b = \frac{a(r+c)}{c}(c \neq 0)$, on peut écrire le terme général de cette suite sous la forme :

$$y_n = (\frac{r}{r+c})^n(y_0 - b) + b.$$

En appliquant ce résultat à l'inégalité (4.32) (dont les suites sont > 0), on trouve que :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq (\frac{r}{r+c})^n(\|\mathbf{u}^0\|_{L^2}^2 - b) + b.$$

Finalement, puisque $\frac{r}{r+c} < 1$ et $b = \frac{1}{c^2}\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2$, on trouve que :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq |(\|\mathbf{u}^0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{c^2}\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2)| + \frac{1}{c^2}\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2.$$

■

Discrétisation spatiale

On utilise le même procédé que celui appliqué à l'équation de Stokes (4.16) pour discrétiser en DDFV l'équation de Navier-Stokes. Les approximations de la vitesse et de la pression sont faites respectivement sur les maillages $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$. La discrétisation spatiale de (4.31) donne :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}^{\mathcal{T}}} - \rho\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}^{\mathcal{T}}} \wedge \mathbf{rot}^{\mathcal{T}}\,\mathbf{u}^{\mathbf{n}^{\mathcal{D}}} - \mu\,\Delta^{\mathcal{T}}\,\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}^{\mathcal{T}}} + \nabla^{\mathcal{T}}\,P^{n+1^{\mathcal{D}}} = \mathbf{f}^{\mathbf{n}^{\mathcal{T}}} & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}^{\mathcal{D}}\,(\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}^{\mathcal{T}}}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{\mathbf{n+1}^{\mathcal{T}}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.33}$$

Notons que, dans la première équation de ce système, l'application de l'opérateur $\mathbf{rot}^{\mathcal{T}}$ à la vitesse nécessite de l'évaluer sur le maillage $\mathcal{D}$. Pour cela on utilise la moyenne de la vitesse $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_A)_{K,A\in\mathcal{T}}$ sur chaque diamant $D_\sigma = (K, A)_{K,A\in\mathcal{T}}$ pour calculer $\mathbf{u}^{\mathcal{D}} = (\mathbf{u}_\sigma)_{D_\sigma\in\mathcal{D}}$.

On peut également utiliser l'opérateur $\mathbf{rot}^{\mathcal{D}}$ que l'on applique directement à la vitesse $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$. On obtient dans ce cas un vecteur $\mathbf{w}^{\mathcal{D}} = \mathbf{rot}^{\mathcal{D}}\,\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$. Pour la discrétisation de la partie convective, on cherche $\mathbf{w}^{\mathcal{T}}$ sur chaque élément K et A de $\mathcal{T}$, pour cela on utilise les moyennisations des valeurs prises sur les diamants auxquels appartiennent chaque éléments K et A.

Pour la stabilité, on peut appliquer la même démonstration en suivant les même étapes que dans le cas continu en utilisant la norme $L^2(\mathcal{T})$.

4.2.2 Algorithme de résolution

En prenant $\mathbf{f}^n = \mathbf{f} + r\mathbf{u}^n$, on peut écrire l'équation (4.31) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathrm{rot}\mathbf{u}^n + \rho - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1} = \mathbf{f}^n & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.34}$$

Grâce à l'asymétrie du terme $\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathbf{rot}\mathbf{u}^n$, l'application de l'algorithme de projection à cette équation se déroulera de la même manière comme pour l'équation de Stokes (4.3). En effet, ce terme sera éliminé en le multipliant par $\mathbf{u}^{n+1}$; et donc, on peut appliquer exactement les mêmes démonstrations de la convergence de l'algorithme décrites précédemment dans le cas continu et discret.

4.3 Les conditions aux bords

Afin de traiter efficacement des conditions aux limites de type Dirichlet pour imposer une vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{b}}$, on utilise la méthode de pénalisation décrite dans le premier chapitre (pour imposer une vitesse nulle au sol). Pour cela, on ajoute le terme de pénalisation dans l'équation de la prédiction de vitesse au niveau des éléments de $\partial\Omega$. Cette équation devient :

$$r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathbf{rot}\mathbf{u}^{n} - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1} + \frac{\mu}{K_s}\chi_{\partial\Omega}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_{\mathrm{b}}) = \mathbf{f}^{n}.$$

Dans le cas discret cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$r\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}\mathcal{T}} - \rho\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}\mathcal{T}} \wedge \mathbf{rot}^{\mathcal{T}}\,\mathbf{u}^{\mathbf{n}\mathcal{D}} - \mu\,\Delta^{\mathcal{T}}\,\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{T}}\,P^{n+1\mathcal{D}} + \frac{\mu}{K_s}\chi_{\partial\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathbf{n+1}\mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\mathrm{b}}^{\mathcal{T}}) = \mathbf{f}^{\mathbf{n}\mathcal{T}}.$$

La fonction χ_E est une indicatrice qui vaut 1 sur l'ensemble E et 0 ailleurs. On choisit le paramètre de pénalisation $K_s \ll 1$; il est équivalent à une perméabilité. L'avantage de cette méthode est qu'elle nécessite simplement de connaître le champs de vitesse à imposer au bord du domaine, ce qui rend son implémentation aisée.

Remarque 14

Le traitement des conditions de Neumann se fait en imposant aux opérateurs $\mathrm{div}^{\mathcal{T}}$ *et* $\nabla^{\mathcal{D}}$*, au niveau des faces du bord, des valeurs issues des calculs de la trace. Au chapitre précédent, ces calculs sont détaillés lors de l'étude des Laplaciens* $\Delta^{\mathcal{T}}$ *et* $\Delta^{\mathcal{D}}$ *(cf. § 3.5.3).*

4.4 Tests et validations numériques

On présente des résultats obtenus sur le domaine $\Omega = [0,1]^d$ (d=2 ou d=3) de quelques tests numériques pour valider l'algorithme implémenté dans le cas de l'équation de Stokes, puis dans celui de l'équation de Navier-Stokes.

4.4.1 Solutions polynômiales

On commence par le test de l'équation de Stokes stationnaire avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogènes. Le domaine de calcul est le carré $\Omega = [0,1]^2$ et les données et conditions aux limites sont choisies de telle sorte que la solution exacte soit donnée par :

$$\mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} 2000x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y) \\ -2000y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_e = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}.$$

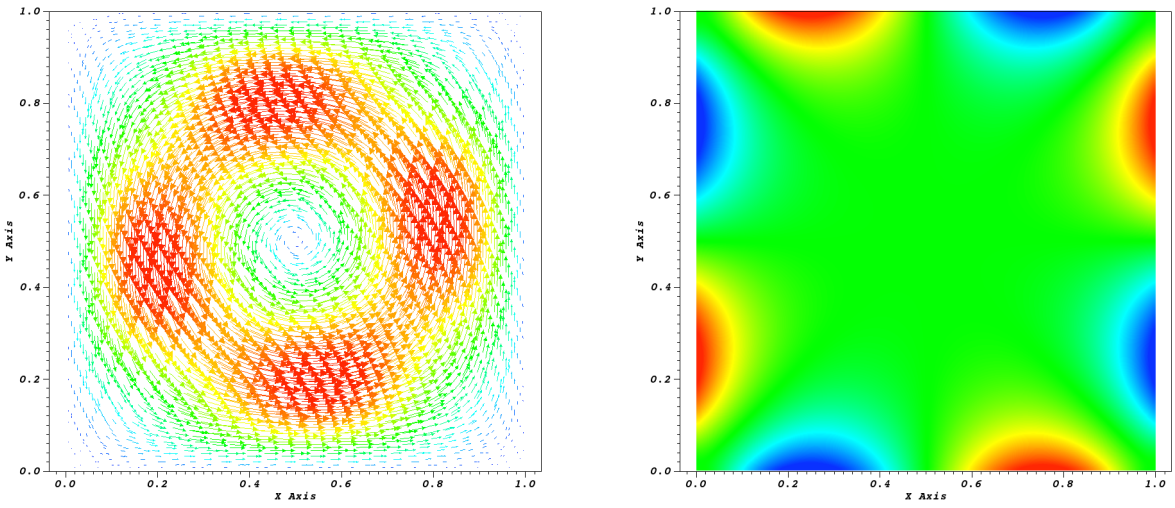
Nous nous sommes intéressés à la convergence de la vitesse $\mathbf{u}$ et de la pression p. Pour cela, on calcule les normes L^2 et L^∞ de l'erreur respectivement entre les solutions exactes et les solutions approchées de la vitesse et de la pression, pour différentes tailles du maillage. Les résultats accompagnés des taux de convergence associés sont regroupés dans le tableau suivant :

	La vitesse				La pression			
Maillage	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre
20^2	2.61E-01	-	1.21E-01	-	1.30E-01	-	1.19E-01	-
40^2	6.76E-02	1.93	3.20E-02	1.89	3.44E-02	1.89	3.18E-02	1.87
80^2	1.73E-02	1.95	8.264E-03	1.94	8.95E-03	1.92	8.28E-03	1.92
160^2	4.38E-03	1.98	2.119E-03	1.95	2.28E-03	1.96	2.15E-03	1.93

TABLE 4.1: Solutions polynômiales : convergence de la vitesse et de la pression.

De ces résultats, on déduit que l'algorithme que nous avons implémenté pour la résolution des équations de Stokes incompressibles avec les conditions de Dirichlet possède donc un ordre de convergence de 2.

Dans les deux figures qui suivent, nous donnons une illustration du champ de la vitesse et de la pression produites.



(a) Le champ de vitesse (b) La pression

FIGURE 4.1: Équation de Stokes - Solution polynômiale.

4.4.2 Tourbillons de Green-Taylor

On reprend le domaine de calcul $\Omega = [0,1]^2$ et on utilise la solution exacte donnée par le couple vitesse/pression suivant :

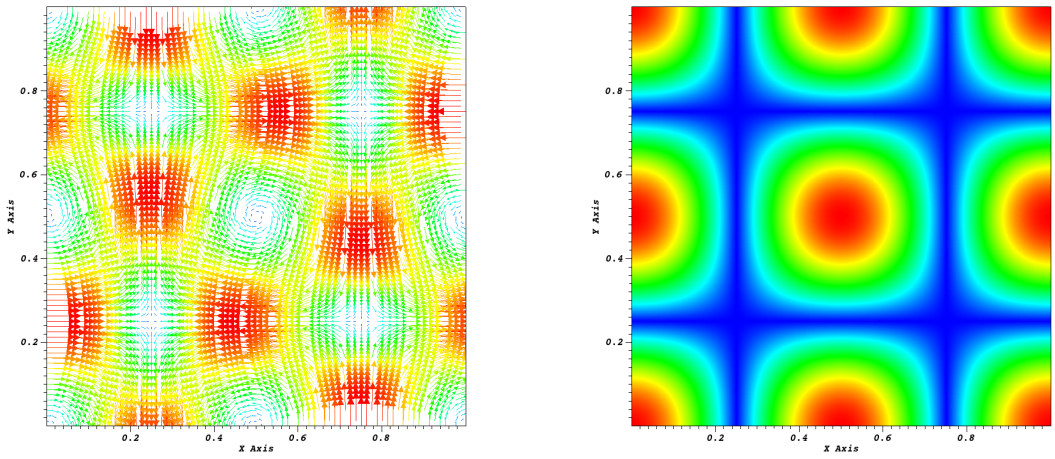
$$\mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x)\sin(2\pi y) \\ -\sin(2\pi x)\cos(2\pi y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_e = \frac{1}{4}(\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)).$$

De la même manière que dans le cas test précédent, on calcule les normes L^2 et L^∞ de l'erreur entre les solutions exactes et les solutions approchées de la vitesse et la pression en fonction de la taille du maillage. Les résultats accompagnés des taux de convergence associés sont regroupés dans le tableau 4.2 où on observe une convergence d'ordre 2 en norme L^2.

	La vitesse				La pression			
Maillage	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre	ErrL^2	Ordre	ErrL$^\infty$	Ordre
20^2	5.30E-01	-	1.59E-01	-	2.18E-01	-	2.02E-01	-
40^2	1.49E-01	1.77	4.54E-02	1.75	6.08E-02	1.79	5.70E-02	1.77
80^2	3.03E-02	1.86	1.25E-02	1.81	1.68E-02	1.81	1.58E-02	1.80
160^2	8.03E-03	1.89	3.37E-03	1.86	4.52E-03	1.86	4.35E-03	1.82

TABLE 4.2: Tourbillons de Green-Taylor : convergence de la vitesse et de la pression.

Dans les deux figures qui suivent, nous donnons une illustration du champ de la vitesse et de la vorticité associée.



(a) Le champ de vitesse (b) La vorticité

FIGURE 4.2: Tourbillons de Green-Taylor.

Dans les deux cas tests précédents, on observe une super convergence en norme L^2 pour la vitesse ce qui correspond aux mêmes ordres de convergence que ceux obtenus par S. Krell [58] pour la résolution du problème de Stokes standard par un un schéma DDFV stabilisé et un algorithme couplé. On remarque que nos ordres de convergence sont plus grand que les ordres théoriques, même constat dans [58] et [33]. Enfin, dans les campagnes de tests que nous avons effectuées, on a remarqué également que l'ordre de convergence n'est pas sensible à la présence de mailles localement raffinées non-conformes.

4.4.3 Translation de tourbillons

Dans ce test, on simule la translation de vortex. On considère le domaine $\Omega = [0,1]^2$, la solution visqueuse des équations de Navier-Stokes en écoulement incompressible traduit la translation diagonale de tourbillons. La solution initiale et les conditions aux limites sont choisies en fonction de la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} u(x,y,t) &= 1 + 2\cos(2\pi(x-t))\sin(2\pi(y-t))\,\mathrm{e}^{-8\pi^2\nu t} \\ v(x,y,t) &= 1 - 2\sin(2\pi(x-t))\cos(2\pi(y-t))\,\mathrm{e}^{-8\pi^2\nu t} \\ p(x,y,t) &= -(\cos(4\pi(x-t)) + \cos(4\pi(y-t)))\,\mathrm{e}^{-16\pi^2\nu t} \end{cases}$$

La translation s'accompagne d'un amortissement exponentiel de l'intensité des tourbillons sous l'effet de la dissipation visqueuse portée par la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0.01$.

Dans les figures qui suivent, on donne les représentations de la solution ($\mathbf{u}$,p) à l'instant initial puis à l'instant $t = 1.125$s.

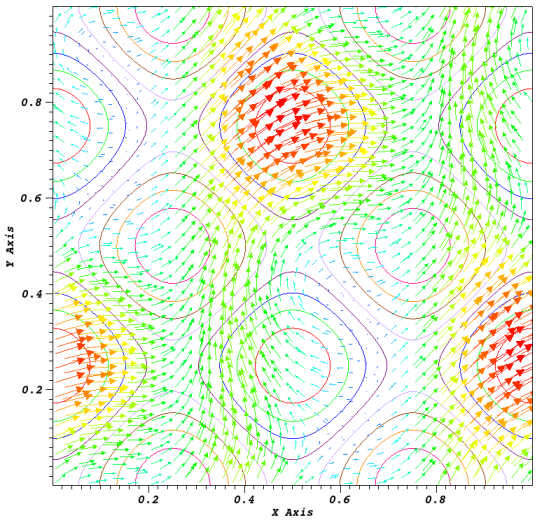


FIGURE 4.3: Solution ($\mathbf{u}$,p) à l'instant initial.

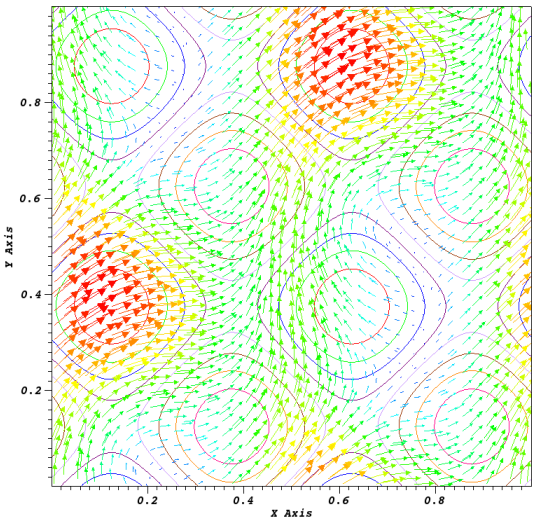
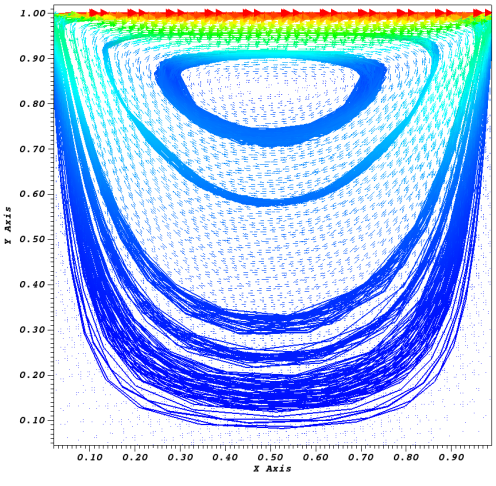


FIGURE 4.4: Solution (**u**,p) à l'instant $t = 1.125$s.

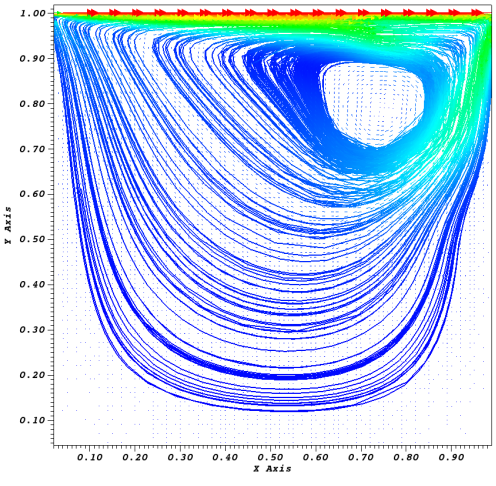
Comme pour les tests précédents, connaissant la solution exacte, on calcule les taux de convergence en norme L^2 pour la vitesse et la pression. On trouve des ordres qui valent 2.

4.4.4 Cavité entrainée

On considère un écoulement dans une cavité carré $[0,1]^2$ où la paroi supérieure $y = 1$ est entrainée à une vitesse constante horizontale $\mathbf{u} = (1,0)$, les autres étant immobiles. Les figures ci-dessous représentent quelques lignes de courant du champ de vitesse :



(a) avec Stokes



(b) avec Navier-Stokes ($Re = 1000$)

FIGURE 4.5: Lignes de courant du champ de vitesse d'une cavité entrainée.

On refait le même test de la cavité entrainée en dimension 3. Le domaine de calcul est le cube $[0,1]^3$. La paroi supérieure $z = 1$ est entrainée à la vitesse constante horizontale $\mathbf{u} = (1,0,0)$, les autres étant immobiles. La figure suivante donne quelques lignes de courant du champ de vitesse issu de l'équation de Navier-Stokes.

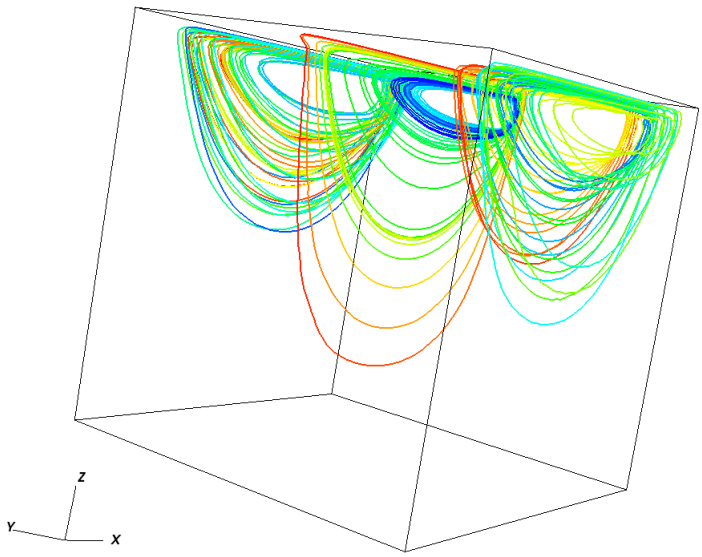


FIGURE 4.6: Lignes de courant d'une cavité entrainée en $3D$.

On ne connaît pas la solution analytique de ce problème, mais en observant les profils de vitesse, on constate que les lignes de niveaux issues de l'équation de Stokes sont symétriques tandis que celles issues de l'équation de Navier-Stokes sont dissymétriques par l'effet d'inertie, ces résultats sont en accord avec [103].

4.4.5 Champs tournant

Dans ce test, on s'intéresse au comportement de la divergence de la vitesse en fonction des itérations de la méthode de projection. On considère l'équation de Stokes dans le domaine $\Omega = [0,1]^3$ en imposant le terme source :

$$\mathbf{f} = (y - 0.5, 0.5 - x, 0)\,.$$

Dans la figure, 4.7 on présente quelques lignes de courant et le champ de vitesse résultat de l'algorithme au bout d'un nombre d'itérations où la divergence devient de l'ordre de $\mathrm{O}(h^2)$ où h est le pas de maillage.

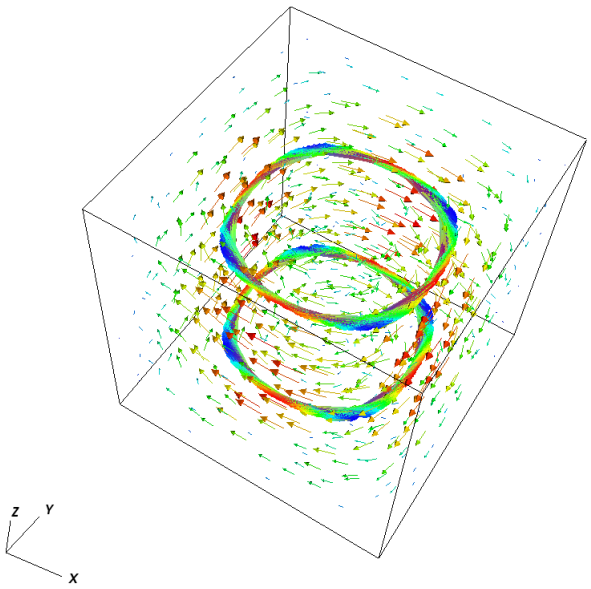


FIGURE 4.7: Profil de la vitesse d'un champ tournant.

À chaque itération, on calcule $\|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_2$ pour différents pas de maillage h. On obtient les graphes suivants qui donnent la décroissance de la quantité $\frac{\|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}$ (en échelle logarithmique) en fonction du nombre d'itérations *iter*, ce qui correspond aux résultats attendus :

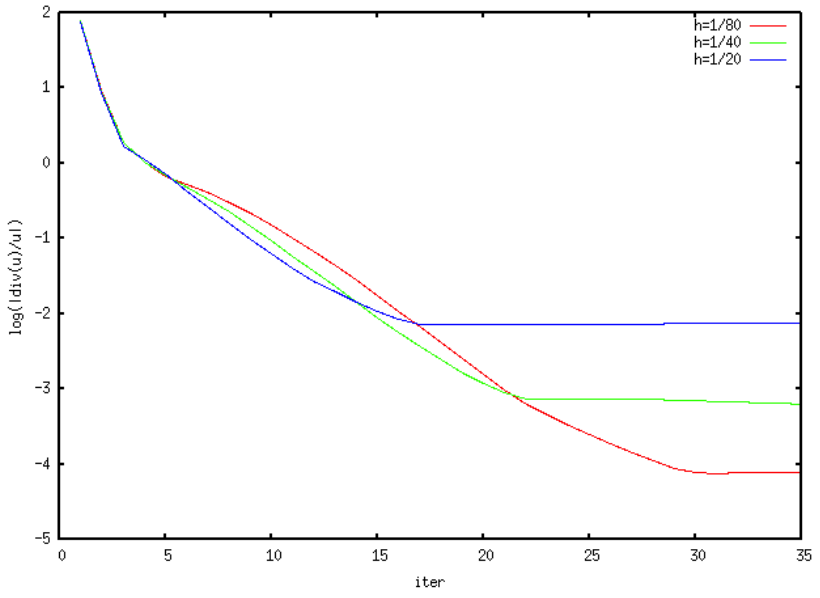


FIGURE 4.8: Divergence de la vitesse en norme L^2 pour différents pas de maillage.

Ces courbent ne gardent pas une décroissance linéaire à cause des défauts de la divergence le long des arêtes du bord. Mais ceci n'est pas en contradiction avec les résultats théoriques.

4.5 Parallélisation

Les approximations des équations de Stokes ou de Navier-Stokes décrivant un fluide incompressible résolues avec l'algorithme de projection que nous avons exposé dans ce chapitre reposent sur la résolution de deux équations elliptiques. La première est pour la prédiction de la vitesse et la second seconde pour la solution de la pression. Ceci revient à résoudre à chaque étape des systèmes d'équations linéaires de type :

$$Ax = b \tag{4.35}$$

avec A une matrice carrée donnée définie positive non singulière et b un vecteur donné. L'inconnue x peut représenter soit la vitesse soit la pression.

Nous utilisons, pour la résolution de ce système, le schéma itératif Bi-CGStab (Bi-Gradient Conjugué Stabilisé) [89, 94]. Pour réduire le temps de calcul, nous avons eu recours à la parallélisation des solveurs en utilisant ce schéma à l'aide la bibliothèque OpenMP [1].

4.5.1 Le schéma

L'algorithme séquentiel du schéma classique Bi-CGStab, où x_k est l'approximation de x à l'itération k, peut s'écrire sous la forme suivante :

$r_0 = b - Ax_0$
$\alpha_0 = \beta_0 = w_0 = 1$
$v_0 = q_0 = 0$
for $k = 1 \ldots n$ **do**
  $\alpha_k = r_0^T r_{k-1}$
  $\gamma = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \frac{\beta_k}{w_{k-1}}$
  $q_k = r_{k-1} + \gamma(q_{k-1} - w_{k-1} w_k)$
  $v_k = Aq_k$
  $\beta_k = \frac{\alpha_k}{r_0^T v_k}$
  $s_k = r_{k-1} - \beta_k v_k$
  $t_k = As_k$
  $w_k = \frac{r_k^T s_k}{t_k^T t_k}$
  $x_k = x_{k-1} + \beta_k q_k + w_k s_k$
  if $\|r_k\| \geq \epsilon$ **then**
    exit
  end
  $r_k = s_k - w_k t_k$
end

1. Open Multi-Processing : http://openmp.org/wp/openmp-specifications.

Dans cet algorithme, les matrices traitées sont creuses et elles ont une indexation qui facilite les calculs. Afin d'améliorer la convergence, nous allons conditionner la matrice A par une matrice P inversible. Pour cela on résout à la place du système (4.35) le système suivant :

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b \tag{4.36}$$

Par souci de simplicité, nous choisissons le préconditionneur de Jacobi. La matrice P est choisie comme étant la diagonale de la matrice A du système : $P = \text{diag}(A)$.

4.5.2 Mise en œuvre avec OpenMP

La bibliothèque OpenMP est une interface de programmation contenant un ensemble de directives pour paralléliser un code sur une architecture à mémoire partagée. Ces directives permettent de faire les calculs plus rapidement en utilisant plusieurs processeurs. En effet, chaque processeur exécute un bout de programme avec un unique jeu de variables et les directives OpenMP définissent les zones parallèles et les attribuent à des différents threads. Chaque threads exécute des tâches en parallèle sur un processeur ou cœur (*core*) indépendant.

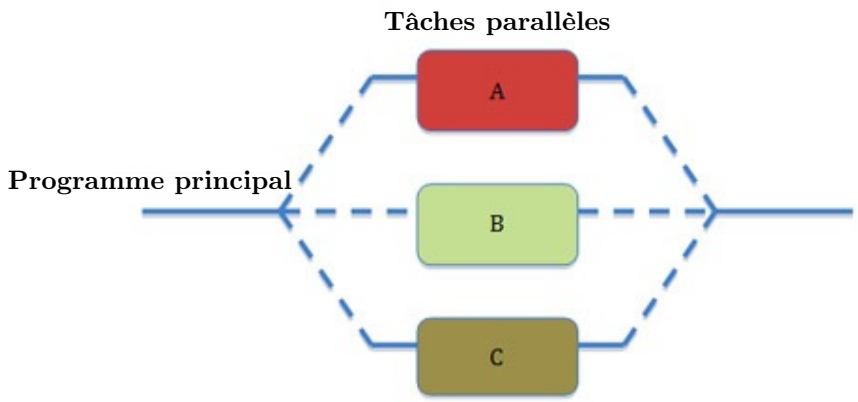


FIGURE 4.9: Programme principal et tâches parallèles.

Dans les régions parallélisées, le programme principal via un *master thread* lance des threads (dont le nombre a été précisé auparavant par l'utilisateur) pour répartir la charge de calcul. Chaque thread exécute un ensemble d'instructions puis se met en attente jusqu'à la fin de toutes les tâches. Après synchronisation, le *master thread* reprend la main (*cf.* figure 4.9). Les variables partagées sont utilisées par tous les threads sur la même zone mémoire tandis que chaque copie des variables privées utilise une zone mémoire accessible uniquement par le thread concerné. Cette forme de parallélisation permet de développer rapidement en restant proche du code séquentiel sans avoir à tout reconstruire.

Dans le cas qui nous intéresse, on peut par exemple répartir une boucle *for* $i = 1 : n$ sur plusieurs threads avec une boucle de taille n_ℓ, définie pour chaque thread tel que $\sum n_\ell = n$. Ceci nous permet donc de diminuer le temps d'exécution de la boucle en question en le divisant au mieux par le nombre de processeurs. Sur la figure suivante, nous présentons un exemple d'exécution de la boucle avec m processeurs partageant deux mémoires comme sur notre cluster [2].

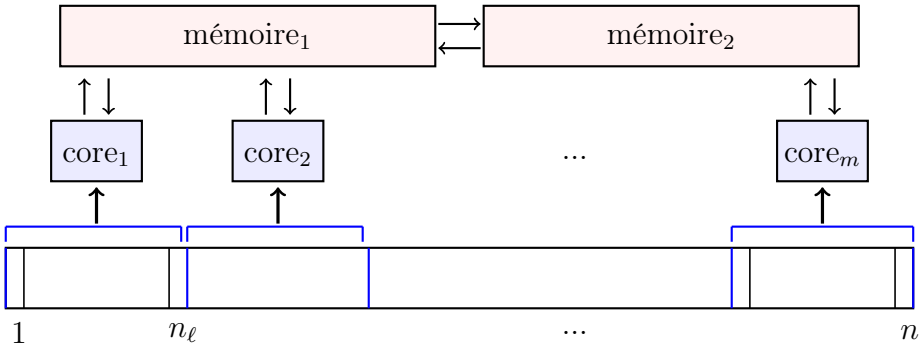


FIGURE 4.10: Exemple d'exécution parallèle sur m processeurs.

Pour ne pas avoir des conflits par rapport à la mémoire partagée, il est nécessaire d'initialiser les variables utilisées dans la zones parallélisées. Dans notre code, les variables qui sont utiles seulement à l'itération sont déclarées privées. Les indices des boucles (internes à la zone parallèle), les indices dans les tableaux et toutes leurs correspondances locales ou globales sont aussi privés puisqu'ils sont propres aux itérations de la boucle parallélisée.

4.5.3 Tests de performance

La parallélisation doit permette de réduire le temps de calcul lors des appels du solveur algébrique. Ainsi, pour mesurer les performances de l'algorithme parallélisé, on considère sur le domaine $\Omega = [0, 1]^3$ le problème de Poisson suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.37}$$

On prend pour le second membre la fonction $f = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)$ et on utilise la discréditation DDFV en appliquant l'opérateur $\Delta^{\mathcal{T}}$ (*cf.* la section 3.5.3 du chapitre précédent). On résout ce problème sur deux maillages différentes qui correspondent à :

- Cas 1 : taille de grille de 80^3, soit 1.081.841 inconnues.
- Cas 2 : taille de grille de 50^3, soit 272.651 inconnues.

2. Cluster UTLN : http://mejean.univ-tln.fr.

Dans les deux cas, on lance plusieurs tests en exécutant le programme sur la même machine CPU du cluster. On commence par un premier test sans parallélisation, ce qui nous donne un temps d'exécution T_0. Puis on lance une série de tests en utilisant la parallélisation avec $2, 4, 6, \ldots$ jusqu'à 20 cœurs et à chaque fois on calcule le temps d'exécution T_p. Ceci nous permet de calculer pour chaque test l'accélération du programme, le speedup : T_0/T_p. Il s'agit donc du ratio du temps de calcul en séquentiel (sur 1 cœur) sur le temps de calcul en parallèle sur p cœurs. Plus ce ratio se rapproche du nombre des cœurs utilisés pour le calcul parallèle, plus l'efficacité parallèle du code est bonne.

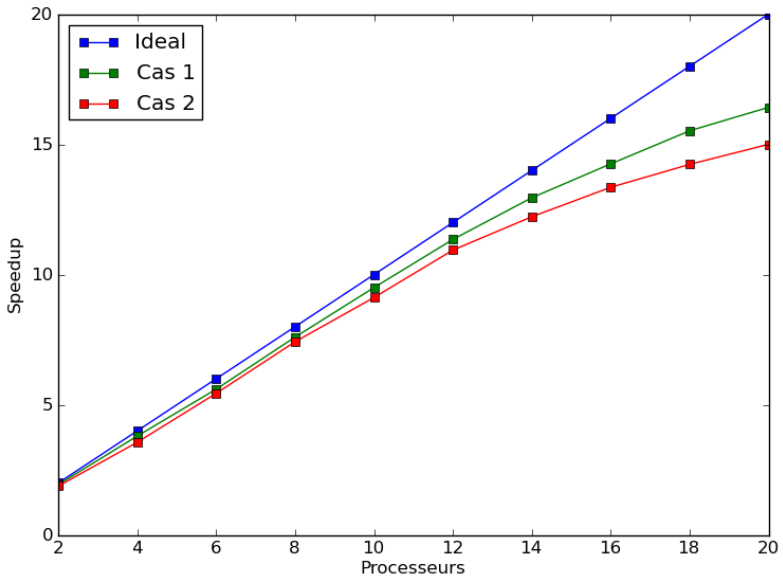


FIGURE 4.11: Calcul de la scalabilité du solveur Bi-CGStab utilisant OpenMP.

Sur la figure ci-dessus on donne des courbes affichant le speedup en fonction du nombre de cœurs sur lequel est lancé le calcul dans les deux cas présentés précédemment. On peut voir, par exemple, que pour 10 cœurs, quelque soit la taille du problème, le speed up est très bon puisqu'il est très proche de 10. On remarque aussi que la scalabilité dans les deux cas reste assez bonne et demeure croissante mais elle s'affaiblit et elle dépend de la taille du problème. Tout cela justifie le recours à la parallélisation en OpenMP.

Enfin, pour avoir une bonne optimisation (surtout en terme de mémoire), on pourrait utiliser une autre bibliothèque telle que MPI[3]. Mais son implémentation reste très technique et nécessite une refonte d'une grande partie du code. Pour nos besoins, la parallélisation en OpenMP est suffisante.

3. Message Passing Interface : http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpi

4.6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre un algorithme de résolution de l'équation de Navier-Stokes décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible. Cet algorithme s'appuie sur une méthode de projection qui permet d'approcher les solutions de l'équation en plusieurs étapes. Chaque étape consiste en une procédure de prédiction-correction entre les champs de vitesse et de pression qui conduit à un découplage vitesse-pression. Cette procédure sert à imposer la divergence nulle de la vitesse et à faire apparaître explicitement la pression. Les discrétisations spatiales sont basées sur les schémas DDFV étudiés dans le $3^{\text{ème}}$ chapitre. Comme présenté précédemment, les schémas DDFV peuvent traiter des maillages généraux et non conformes et fournissent un formalisme adéquat qui conserve la convergence de l'algorithme et qui permet son implémentation.

De nombreux tests de validation ont été effectués dans le cas des équations de Stokes et des équations de Navier-Stokes et ceci en dimension 2, puis en dimension 3. D'autres tests ont été réalisés afin d'étudier le coût itératif de l'algorithme et de quantifier, dans certains cas, le nombre d'itérations maximales à partir duquel on peut observer la convergence de la méthode. Pour la résolution des systèmes linéaires, nous avons utilisé un solveur itératif de type bi-gradient conjugué stabilisé Bi-CGStab. Pour réduire les coûts de calcul nous avons eu recours à des techniques de parallélisation basée sur l'API OpenMP.

5 Applications à l'érosion

Les méthodes numériques implémentées tout au long de cette thèse sont assemblées pour simuler l'érosion interfaciale d'un sol sous l'effet d'un écoulement fluide incompressible. La modélisation décrite précédemment sera appliquée à l'érosion d'un sol cohésif par des écoulements à faible nombre de Reynolds ou modéré. Rappelons que dans le modèle numérique que nous avons présenté dans le premier chapitre, les calculs se déroulent en deux étapes :

1. L'étape de l'écoulement dans laquelle une méthode de pénalisation est utilisée pour calculer les équations de Navier-Stokes autour d'un obstacle avec une méthode aux domaines fictifs pour s'affranchir d'un maillage dépendant de la géométrie.
2. L'étape de l'érosion, où l'interface eau/sol est décrite par une fonction Level Set couplée à une loi d'érosion empirique à seuil. Cette loi est une relation linéaire entre la vitesse d'érosion et la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur le solide.

L'objectif ici est de simuler le déplacement de l'interface fluide/solide durant l'érosion. L'évolution de cette interface est pilotée par la vitesse d'érosion qui dépend de la contrainte de cisaillement tangentiel du fluide. Étant donné que l'on s'attend à une discontinuité du gradient de la vitesse de l'écoulement à travers l'interface, des problèmes se poseront pour le calcul de la contrainte de cisaillement. La difficulté est de calculer d'une manière consistante la contrainte de ce problème. Nous mettrons en évidence cette difficulté et nous proposerons par la suite des solutions pour déterminer la contrainte qui doit être estimée correctement au niveau de l'interface. Cette difficulté est rencontrée pour les problèmes à frontière libre résolus sur grille fixe comme les problèmes de Stefan [25,45] et de Hele-Shaw [7,22]. Enfin, la validation du modèle numérique et la pertinence des solutions proposées seront confirmées par plusieurs résultats de simulation.

5.1 Équations du modèle

Pour commencer, nous réécrivons d'abord les différentes équations qui décrivent les deux étapes énoncées dans le modèle, à savoir : l'écoulement incompressible et l'érosion interfaciale. Les milieux en jeux sont le fluide et le solide, qui occupent respectivement deux domaines notés Ω_f et Ω_s et séparés par une interface $\Gamma = \Omega_f \cap \Omega_f$, isocontour 0 d'une Level Set ϕ.

En choisissant une approche Eulérienne sur maillage fixe avec des domaines fictifs, toutes les équations sont discrétisées dans le domaine global $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_f$. Ainsi, le déroulement des calculs peut être effectué selon le schéma suivant :

Le calcul de l'écoulement :

Le système d'équations de Navier-Stokes décrivant l'écoulement incompressible que nous utilisons est le suivant (*cf.* chapitre 4) :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \rho\left(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \wedge \mathrm{rot}\mathbf{u}\right) - \mu\Delta\mathbf{u} + \frac{\mu}{K_s} H(\phi)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) & = & -\nabla p + \mathbf{f} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \mathrm{div}(\mathbf{u}) & = & 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ (+\text{C.L.}) & & & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \end{array} \right. \tag{5.1}$$

où $\mathbf{u}$ est le champ de vitesse défini sur Ω, tout comme la pression p, la densité ρ et la viscosité dynamique μ. Les conditions aux limites (C.L.) permettent de fermer le système et elles seront définies plus tard selon le cas étudié. La fonction Level Set est définie sur Ω telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \phi & < & 0 & \text{dans le fluide } \Omega_f, \\ \phi & = & 0 & \text{sur l'interface } \Gamma, \\ \phi & > & 0 & \text{dans le solide } \Omega_s. \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Le paramètre de pénalisation K_s représentant une perméabilité est choisi tel que $K_s \ll 1$. Ceci permet d'imposer la vitesse $\mathbf{u}_s$ dans le sol Ω_s, caractérisé par $\phi > 0$, en utilisant la fonction Heaviside :

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Le calcul de la contrainte :

Le calcul de l'érosion commence par l'estimation de la composante tangentielle du vecteur contrainte du fluide à l'interface Γ :

$$\overrightarrow{\tau} = 2\mu[\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \overrightarrow{n} - (\overrightarrow{n} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}], \tag{5.4}$$

où le tenseur $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ représente le gradient symétrique de la vitesse d'écoulement :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}), \tag{5.5}$$

et $\overrightarrow{n}$ la normale orientée dans le sens "fluide" vers "solide" et naturellement donnée par :

$$\overrightarrow{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}. \tag{5.6}$$

Le calcul de la vitesse d'érosion :

L'érosion est pilotée par la célérité normale de l'interface v_Γ. La loi d'érosion reliant cette vitesse à la composante tangentielle à l'interface Γ est la suivante :

$$v_\Gamma = \begin{cases} K_d(\tau - \tau_c) & \text{si } \tau > \tau_c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.7}$$

Où le coefficient K_d est un paramètre décrivant la cinétique de l'érosion et le seuil τ_c est la contrainte critique.

La vitesse représentant l'érosion doit être étendu dans tout le domaine Ω pour faire évoluer toutes les lignes de niveau de la Level Set ϕ de la même manière. Pour cela, on utilise la technique d'extension des vitesses étudiée et validée dans le chapitre 2. Ainsi, la vitesse étendue v_Γ^{ext} est la solution de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v_\Gamma^{ext} + \text{sgn}(\phi)\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \cdot \nabla v_\Gamma^{ext} & = 0, \\ v_\Gamma^{ext}(t=0,x) & = v_\Gamma. \end{cases} \tag{5.8}$$

Enfin, l'évolution de l'interface Γ est décrite par l'équation de transport de la Level Set ϕ :

$$\begin{cases} \partial_t \phi + v_\Gamma^{ext}\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \cdot \nabla\phi & = 0, \\ \phi(t=0,x) & = \phi_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Le calcul de l'écoulement incompressible, l'extension de la vitesse et le transport de la Level Set ont été étudiés et testés séparément. Le processus complet de l'érosion nécessite l'assemblage de ces calculs. L'estimation de la contrainte représente le chainon important reliant le calcul de l'écoulement et de l'érosion. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de ce chapitre, avoir une bonne estimation pour la contrainte pose une grande difficulté étant donné que nous utilisons une approche eulérienne sur maillage fixe avec pénalisation. Puis nous mettrons en évidence ce problème, dans le cas HET, avant de proposer des solutions.

5.2 Gestion du problème à frontière libre

Le problème qui nous concerne est classiquement rencontré dans les problèmes à frontières libres, comme par exemple ceux posés par les écoulements dans des géométries élastiques qui obligent à résoudre des équations elliptiques sur des domaines en mouvement. Faire intervenir des maillages *body-fitted* [93] qui collent à la géométrie oblige à remailler les domaines au cours des itérations d'évolution en temps. Une solution très coûteuse en remaillage. En utilisant des maillages fixes, comme dans notre cas, les équations elliptiques peuvent être résolues sur un domaine approché. L'erreur de la solution est alors inconsistante pour les gradients au

voisinage de l'interface sur le bord du domaine approché. On retrouve par exemple ce type d'inconsistance dans le problème de Hele-Shaw [7, 22] et dans le problème de Stefan [25, 45] décrivant la fonte des glaces par le transfert de chaleur dans un milieu homogène qui subit un changement de phase. Ces problèmes ont été résolus par exemple à l'aide des méthodes IIM (Immersed Interface Method) proposées par R.J. LeVeque et A.L. Li [62]. Dans ce cas, la continuité des propriétés à l'interface de discontinuité est assurée grâce à des prolongements de Taylor de la solution de chaque coté de l'interface. Mais pour garder la méthode de pénalisation sur un maillage fixe, des traitements spécifiques doivent être apportés.

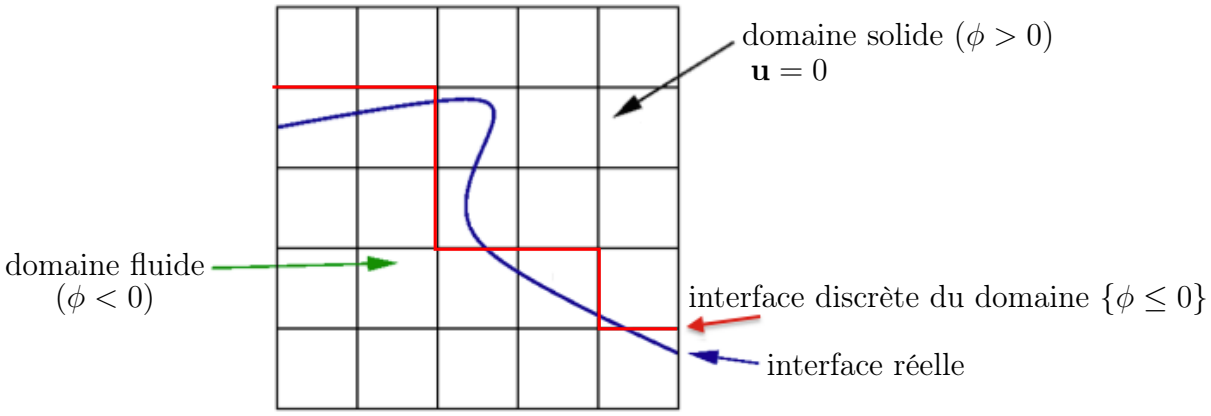


FIGURE 5.1: Représentation d'une interface avec des grilles non body-fitted.

La figure ci-dessus illustre l'origine du problème de l'inconsistance dans notre cas où l'interface approchée entre les deux domaines ne "colle" pas aux grilles du maillage fixe.

5.3 Calcul de la contrainte

5.3.1 Discrétisation DDFV

Par le schéma DDFV, le tenseur symétrique $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ est discrétisé sous la forme suivante :

$$\mathbf{D}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{2}(\nabla^{\mathcal{D}}\,\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{D}\mathrm{T}}\,\mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

Comme dans la section 3.5, nous avons bien vérifié que cet opérateur est d'ordre 2 en normes $L^2(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$. Avec la même discrétisation, le vecteur normal peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{n}^{\mathcal{T}} = \frac{\nabla^{\mathcal{T}}\,\phi^{\mathcal{D}}}{\|\nabla^{\mathcal{T}}\,\phi^{\mathcal{D}}\|}.$$

Il en résulte que la contrainte de cisaillement est discrétisée sur le maillage $\mathcal{T}$.

5.3.2 Calcul du cisaillement brut

Pour un premier calcul de la contrainte, on prend l'exemple d'un écoulement de poiseuille cylindrique. C'est un cas simulant l'essai HET où le cylindre représente un tube totalement érodable. Ci-dessous, on illustre ce cas test à l'état initial. Le long du tube, on résout un écoulement de Stokes de vitesse $\mathbf{u}$. L'extérieur du cylindre représente le milieu contenant le sol à éroder. Par la pénalisation, on impose dans cette zone une vitesse nulle $\mathbf{u} = 0$.

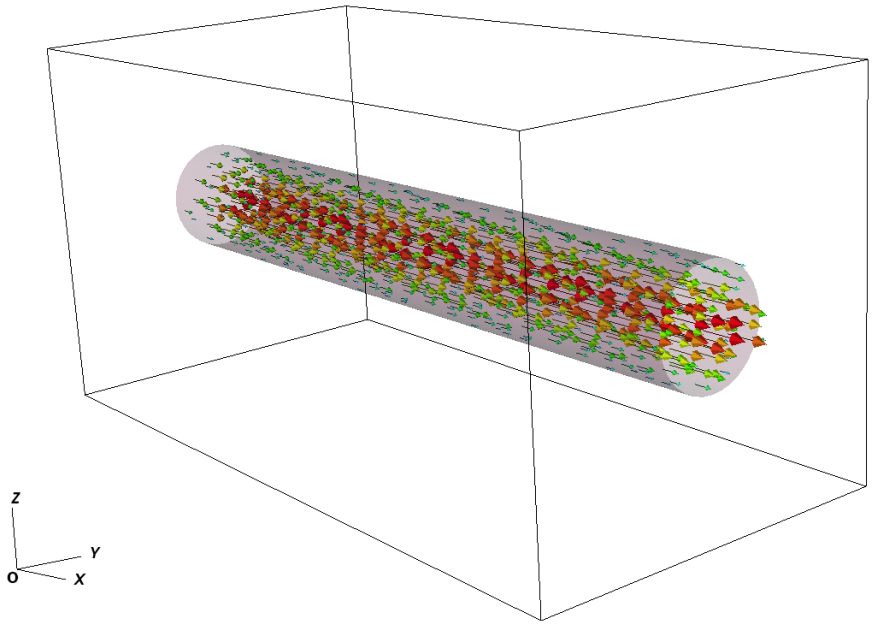


FIGURE 5.2: État initial de la simulation de l'écoulement de conduit avec érosion.

Le domaine du calcul est le parallélépipède rectangle $\Omega = [0, 2] \times [0.1]^2$, $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est la base orthonormée associée. Le rayon initial du cylindre est $r_0 = 0.2$. Initialement, l'interface Γ est représentée par l'isocontour 0 de la fonction Level Set suivante :

$$\phi_0 = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - r_0,$$

où $y_0 = z_0 = 0.5$. L'écoulement obtenu est cisaillé dans la direction (O, x) et sa vitesse est sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = u(r)\overrightarrow{e_x}, \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

La solution analytique $u(r)$ et la norme τ de la contrainte tangentielle du cisaillement associé sont :

$$\begin{aligned} u(r) &= -(r^2 - r_0^2)/4\mu, \\ \tau &= \tfrac{r}{2}. \end{aligned}$$

Dans la figure suivante, on affiche le résultat numérique du calcul de la contrainte de cisaillement représentée sur une coupe du cylindre selon l'axe de l'écoulement. À l'intérieur, on constate que la solution est parfaitement radiale et qu'il s'agit bien d'une suite de cercles de rayon $\frac{r}{2}$ correspondant à la solution exacte. Mais, au voisinage de l'interface $\phi_0 = 0$, la solution est fausse et on remarque l'existence d'une couche limite d'inconsistance.

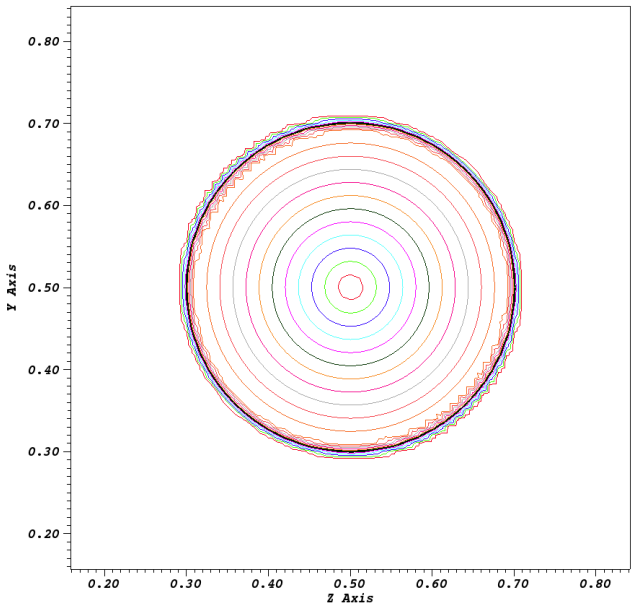


FIGURE 5.3: Représentation du cisaillement dans le cas du poiseuille cylindrique.

Un zoom sur une partie de la région en question donne le résultat suivant :

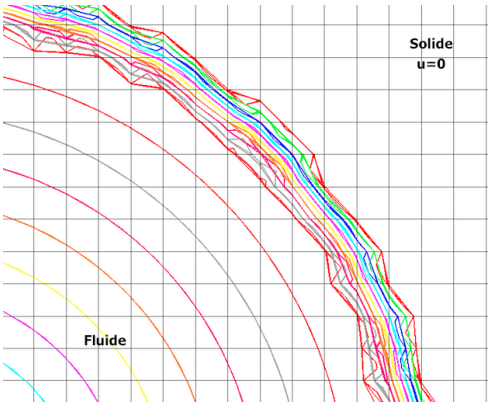


FIGURE 5.4: Zoom autour de la couche limite d'inconsistance.

Ce résultat est attendu car notre géométrie, comme nous l'avons évoqué précédemment, ne se raccorde pas aux grilles du maillage. Dans la partie solide, la vitesse **u** s'annule le long d'une ligne brisée qui n'approche pas le cercle. Le calcul du gradient de vitesse à l'interface est totalement erroné.

Pour avoir une idée plus précise sur le comportement de la norme de la composante tangentielle,τ dans la couche limite d'inconsistance (la zone autour de $\phi = 0$), on trace τ en fonction du rayon r en superposant toutes les solutions prises dans la direction radiale. Dans la figure ci-dessous, on donne un tracé contenant les superpositions de la contrainte en projection dans la même direction.

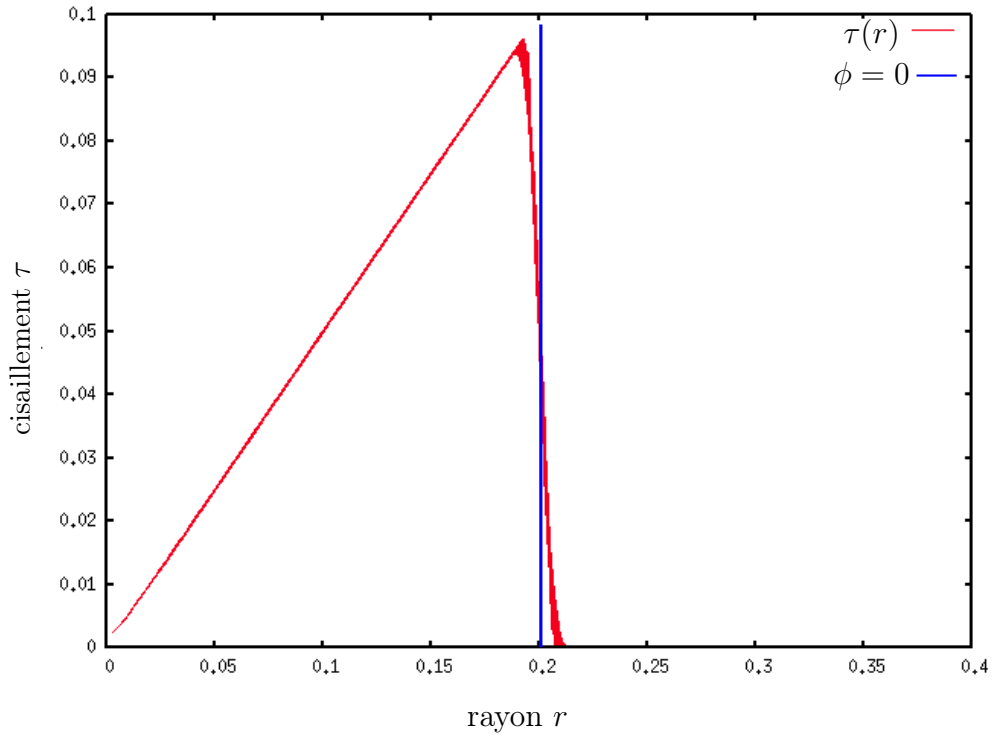


FIGURE 5.5: Tracé de la contrainte de cisaillement en fonction du rayon.

On constate que la solution est parfaitement linéaire à l'intérieur du domaine fluide, ce qui correspond à la solution exacte $\tau = \frac{r}{2}$. À quelques mailles de l'interface, la solution devient erronée. On trouve que cette inconsistance est limitée à environ 4 mailles de l'interface. En notant h le pas du maillage, il est donc pertinent de calculer la contrainte de cisaillement quand $\phi = -3h$.

5.3.3 Correction de la contrainte

À partir des résultats précédents, où nous avons constaté qu'il suffit de se placer dans la zone qui correspond à $\phi \leq -3h$ pour trouver des valeurs consistantes de la contrainte, nous proposons une première solution pour corriger la contrainte au niveau de l'interface. Pour cela, on reconstitue la valeur de la contrainte sur l'interface $\phi = 0$ par une extrapolation directe à partir de la valeur obtenue au niveau $\phi = -3h$.

En notant τ^* la valeur calculée par extrapolation linéaire, à partir du cisaillement initial τ et évaluée en tout point pour le représenter à l'interface. On peut écrire :

$$\tau^* = \tau - \phi \nabla \tau \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}. \tag{5.10}$$

Pour déterminer la vitesse d'érosion à partir de la nouvelle estimation du cisaillement, on calcule la vitesse de l'interface Γ en utilisant la contrainte corrigée τ^* (évaluant τ à l'interface). Par la loi d'érosion (cf. chapitre 1) on peut écrire :

$$v_\Gamma^* = \begin{cases} K_d(\tau^* - \tau_c) & \text{si } \tau > \tau_c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.11}$$

La vitesse étendue v_Γ^* est alors la solution de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v_\Gamma^{ext} + \operatorname{sgn}(\phi + 3h) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \cdot \nabla v_\Gamma^{ext} & = 0, \\ v_\Gamma^{ext}(t = 0, x) & = v_\Gamma^*. \end{cases} \tag{5.12}$$

L'extension se fait donc à partir de l'interface $\phi = -3h$, là où τ^* sera le plus pertinent.

Finalement, l'évolution de l'interface Γ est décrite par le transport de la Level Set ϕ :

$$\begin{cases} \partial_t \phi + v_\Gamma^{ext} \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \cdot \nabla \phi & = 0, \\ \phi(t = 0, x) & = \phi_0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Ce transport est effectué sur une seule maille en respectant la condition CFL (*cf.* chapitre 2). Après avoir obtenu une nouvelle interface donnée par la position de la fonction ϕ transportée, on itère alors les calculs de l'écoulement et ceux de l'érosion.

5.3.4 Validation de la correction

Pour les validations qui suivent, on utilise les paramètres $K_d = 10^{-7}$ cm³/N.s et $\tau_c = 0$ Pa.

5.3.4.1 Simulation HET

Afin de valider la correction que nous venons de proposer, on reprend le test précédent d'érosion du tube avec l'écoulement de poiseuille cylindrique. On utilise donc le cisaillement τ^* donné par l'équation (5.10) et la vitesse de l'interface v_Γ^* calculée par la loi d'érosion (5.11). L'extension de la vitesse d'érosion est faite depuis l'isocontour $\phi = -3h$ par l'équation (5.12).

On procède à un processus d'érosion qui fait élargir le cylindre du rayon initial $r_0 = 0.2$ au rayon final $r_1 = 0.4$. On représente dans la figure ci-après deux étapes d'érosion, la première correspond à une situation intermédiaire et la seconde à la situation finale. Le cylindre interne représente l'état initial (voir la figure 5.2) et l'externe représente le cylindre après érosion.

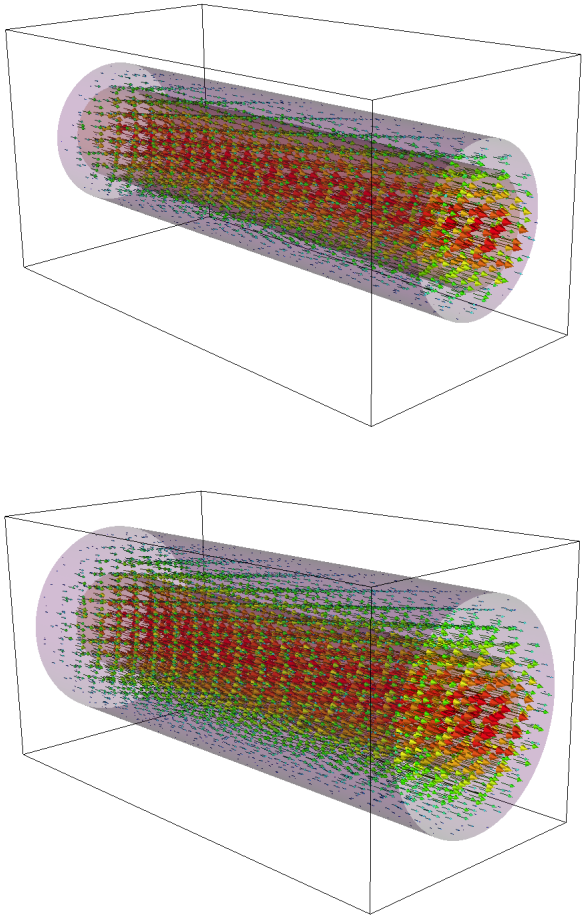


FIGURE 5.6: Résultats d'érosion d'un tube sous un écoulement de poiseuille cylindrique.

On observe une érosion symétrique et régulière le long du tube. Puis, on répète cette simulation en variant la taille du maillage pour calculer le rayon moyen du cylindre à la fin du test et pour estimer la radialité en mesurant, dans le voisinage de l'isocontour $\phi = 0$, la variation de rayon le long d'une section du tube. On calcule aussi la différence entre le rayon exact r_{exc} et le rayon approché r_{num}. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Pas du maillage	$\| r_{num} - r_{exc} \|_\infty$	La radialité
1/20	$8.42\ 10^{-3}$	$2.42\ 10^{-3}$
1/40	$4.06\ 10^{-3}$	$6.51\ 10^{-4}$
1/80	$2.01\ 10^{-3}$	$1.58\ 10^{-4}$
1/160	$9.94\ 10^{-4}$	$3.92\ 10^{-5}$

TABLE 5.1: Variation du rayon et radialité et pour différents maillages.

On obtient une radialité d'ordre 2, ce qui confirme l'érosion uniforme obtenue dans ce test. On obtient aussi une convergence d'ordre 1 pour le rayon du tube et nous avons donc

une validation dans le cas radial de l'approche de la correction du cisaillement qui consiste à calculer une extrapolation de la contrainte depuis l'intérieur du domaine fluide (à environ 3 mailles de l'interface), en s'affranchissant de la couche limite d'inconsistance. Il reste à vérifier sa validité dans d'autres cas.

5.3.4.2 Simulation RCT

On procède à un test utilisant un écoulement réalisé dans l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux, un écoulement de Couette. Le cylindre interne est animé d'une vitesse de rotation rigide et supposé constitué par un échantillon de sol érodable. Le cylindre externe est fixe. Cet essai est une variante du Rotating Cylinder Test (RCT) [70]. L'écoulement généré entre les deux surfaces cylindriques provoquera l'érosion du cylindre interne.

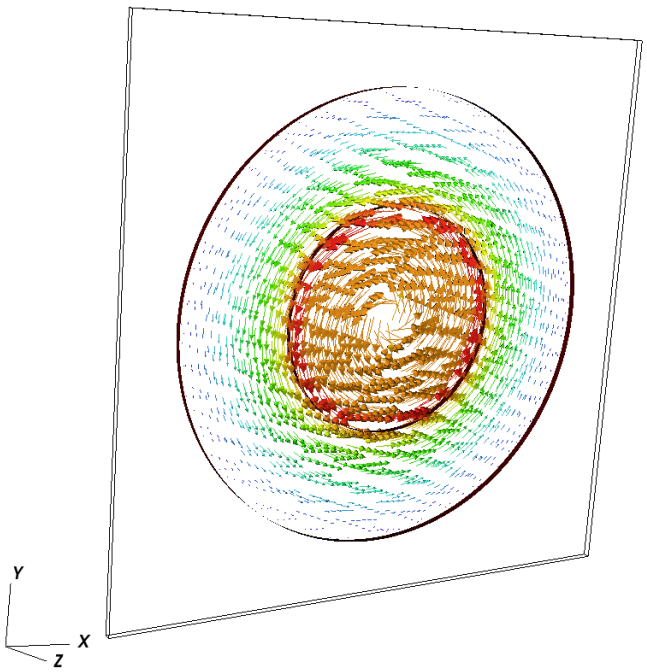


FIGURE 5.7: État initial de la simulation de l'écoulement de Couette.

Le domaine de calcul est $\Omega = [0.1]^2$ (dans la pratique on utilise un domaine faux-2D). Le cylindre interne a un rayon initial $r_i = 0.2$ et il est entrainé par une vitesse angulaire ω. Le cylindre externe a un rayon $r_e = 0.4$. Initialement, l'interface Γ entre le cylindre interne (sol) et le fluide est représentée par l'isocontour 0 de la fonction Level Set suivante (avec $x_0 = y_0 = 0.5$) :

$$\phi_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - r_i.$$

En considérant la base polaire orthonormée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ associée à Ω, la solution de cet écoulement a une vitesse orthoradiale $\mathbf{u} = u_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$ telle que :

$$u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r},$$

où :

$$A = -\frac{\omega r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\omega r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}.$$

La composante tangentielle de la contrainte de cisaillement (dans la direction de $\overrightarrow{e_\theta}$) a comme norme :

$$\tau = 2\mu\frac{B}{r^2},$$

et la vitesse pénalisée dans le cylindre en rotation (le solide) est la suivante : $\mathbf{u}_s = \omega r\overrightarrow{e_\theta}$.

La simulation numérique de ce test (*cf.* la figure 5.7 pour illustration), donne, comme prévu, une couche limite d'inconsistance pour le calcul de la contrainte de cisaillement τ à l'interface fluide/solide. Dans la figure suivante, on représente en fonction du rayon r, les valeurs exactes (en bleu) et les valeurs numériques (en rouge) de τ, en superposant toutes les solutions prises dans la direction radiale. Ceci montre bien l'inconsistance de la solution approchée au niveau de l'isocontour $\phi_0 = 0$ (donné en vert).

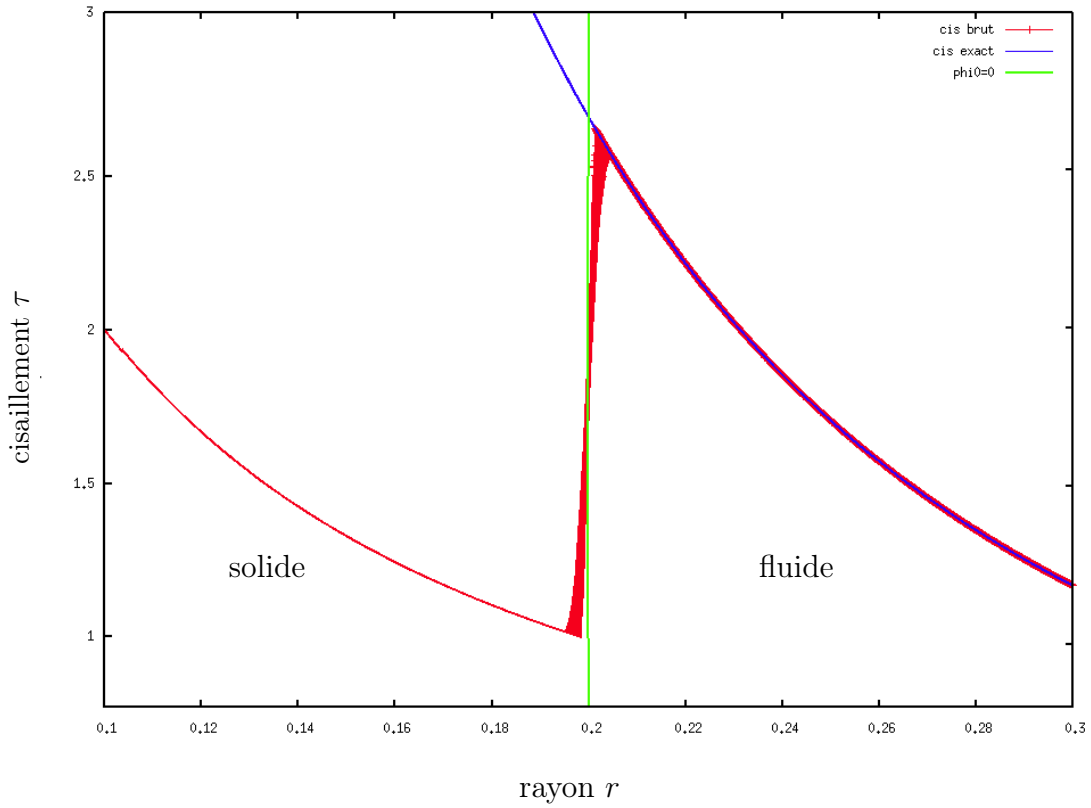


FIGURE 5.8: Contrainte exacte et approchée en fonction du rayon.

On procède à la correction de la contrainte cisaillement comme nous l'avons proposé dans le paragraphe 5.3.3, en utilisant les équations (5.10) à (5.13), pour s'affranchir de la couche limite d'inconsistance. Puis, on effectue une nouvelle simulation. Dans la figure suivante, on donne les résultats de la correction de la contrainte en comparaison avec le le résultat exact. Dans la loi d'érosion nous utilisons donc la vitesse v_Γ^* e s'appuyant la contrainte τ^*.

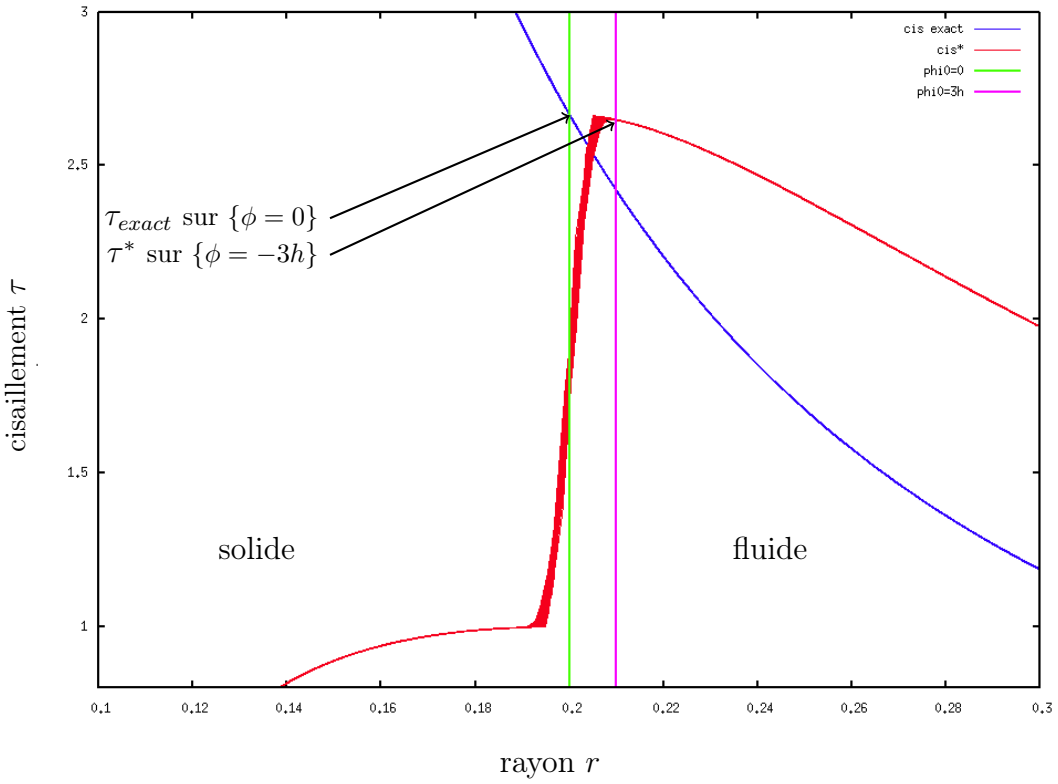


FIGURE 5.9: Tracés de la contrainte exacte τ_{exact} et corrigée τ^* en fonction du rayon r.

Après correction, on effectue des tests d'érosion complets pour différentes tailles de maillage. À la fin de chaque simulation, faisant passer le rayon r_i de 0.2 à 0.1, on calcule la radialité dans le voisinage de l'isocontour $\phi = 0$ ainsi que la différence entre le rayon exacte r_{exc} et le rayon approché r_{num}. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous et montrent qu'on obtient l'ordre 2 pour la radialité et l'ordre 1 pour le rayon comme dans le cas précédent.

Pas du maillage	$\| r_{num} - r_{exc} \|_\infty$	La radialité
1/40	$1.88\ 10^{-2}$	$4.79\ 10^{-3}$
1/80	$9.03\ 10^{-3}$	$1.30\ 10^{-3}$
1/160	$4.47\ 10^{-3}$	$3.22\ 10^{-4}$
1/320	$2.21\ 10^{-3}$	$8.04\ 10^{-5}$

TABLE 5.2: Variation du rayon et radialité et pour différents maillages.

On représente ci-dessous trois étapes d'érosion où l'on observe l'évolution du cylindre interne sous l'effet de l'écoulement de Couette. L'état initial est représenté dans la figure 5.7.

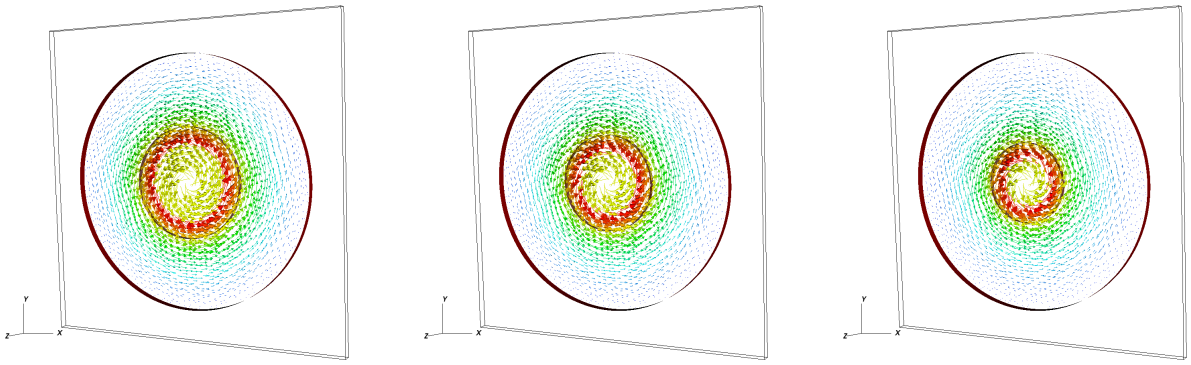


FIGURE 5.10: Résultats d'érosion du cylindre interne sous un écoulement de Couette.

Nous avons validé des processus complets d'érosion dans les deux cas tests simulant les essais HET et RCT. La couche limite d'inconsistance observée lors du calcul de la contrainte de cisaillement à l'interface solide/fluide a été corrigée par un nouveau calcul depuis l'isocontour $\phi = -3h$. Cette correction s'appuie sur une extrapolation de la valeur de la contrainte évaluée en tout point. Il reste à voir si ces corrections peuvent être validées dans autres cas.

5.3.5 Limites de la correction

Nous effectuons une simulation dans laquelle une bille de sol est placée au milieu d'un canal rectangulaire. Le système d'équations de Navier-Stokes (nombre de Reynolds $Re = 20$) est utilisé pour le calcul de l'écoulement.

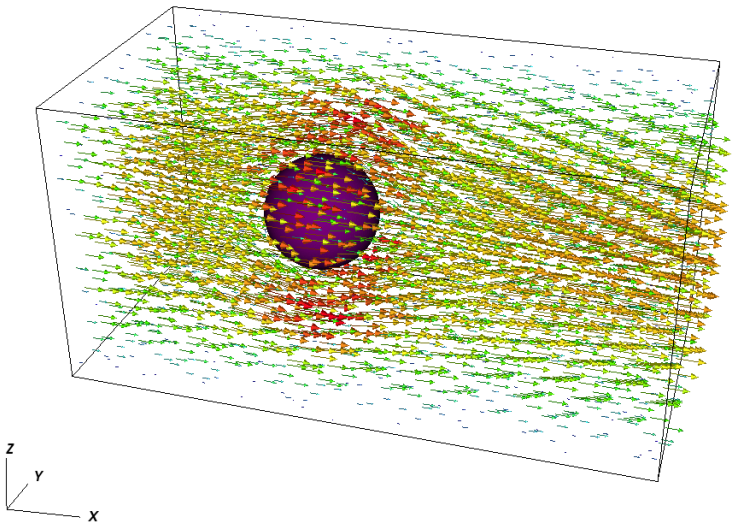


FIGURE 5.11: Cas test d'une bille sous un écoulement au milieu d'un canal.

Le domaine de calcul est $\Omega = [0,2] \times [0.1]^2$. La bille de sol est une sphère de rayon $r_0 = 0.1$ et de centre $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$. L'interface Γ est représentée initialement par l'isocontour 0 de la fonction Level Set suivante :

$$\phi_0 = r_0 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Le but du test est d'observer les variations du cisaillement au voisinage de l'interface $\phi = 0$. Au voisinage de la zone où il y a une grande pression sur la bille, à savoir la paroi face à l'écoulement, un fort gradient est exercé sur l'interface par le fluide qui est forcé d'emprunter un autre chemin en contournant l'obstacle et ainsi le cisaillement varie rapidement spécialement dans cette zone. Un zoom sur une partie de la zone en question est illustré dans la figure suivante où on affiche les variations de la contrainte du cisaillement.

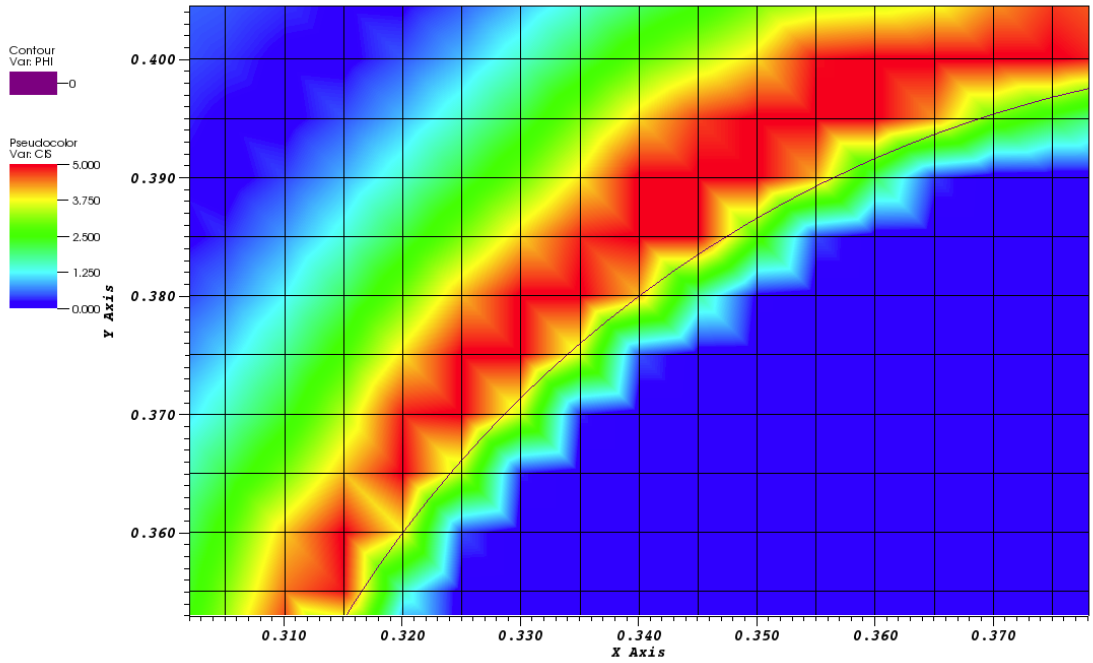


FIGURE 5.12: Zoom sur variations du cisaillement au voisinage de l'interface de la bille.

On remarque dans ce cas, quand on s'éloigne de l'interface $\phi = 0$ de trois mailles on rencontre une variation d'environ 50% sur la valeur du cisaillement Ceci montre bien les limites de la première approche. En voulant s'affranchir de la couche limite d'inconsistance, on perd beaucoup d'informations. Donc, il est préférable d'éliminer cette couche plutôt que de s'en extraire.

5.4 Nouvelle correction

Il s'avère donc qu'il est nécessaire d'estimer les valeurs du cisaillement à l'interface pour obtenir une bonne érosion quelque soient les variations de l'écoulement. En gardant un maillage non body-fitted, il est impossible que les points de grille soient situés exactement à la frontière de l'obstacle constitué par le sol. Dans ce cas, la pénalisation classique ne peut faire mieux que de proposer une approximation inconsistante du gradient de la vitesse à l'interface. Pour éviter cet inconvénient, il convient de rechercher un moyen de forcer une condition qui donne une discrétisation consistante de ce gradient à la frontière de l'obstacle.

J. Hovnanian [55] et M. Bergmann *et al.* [10] ont proposé, dans le cas d'un problème d'interaction fluide/structure, une méthode IPC (Image Point Correction) en s'appuyant sur l'approche *Ghost-Cell* [35, 36] pour corriger les valeurs de pénalisation de la vitesse dans l'obstacle. Par cette méthode, seuls les "Ghost nodes" subissent une correction, en imposant à la vitesse de ces nœuds la valeur obtenue par un prolongement affine depuis valeurs de la vitesse calculées autour des points symétriques des nœuds en question par rapport à la frontière ; à tous les autres points une pénalisation classique est appliquée.

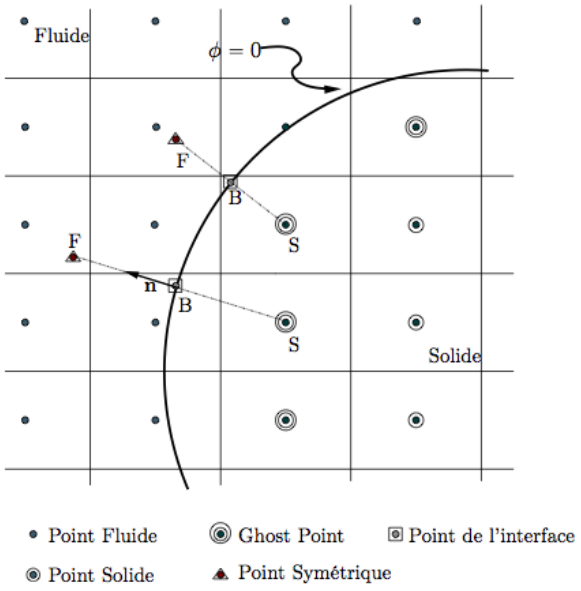


FIGURE 5.13: Schéma décrivant les éléments utilisés par J. Hovnanian [55] pour la correction.

Dans l'objectif d'apporter une correction de même type, mais sans avoir recours à des extrapolations dans une direction de grille, C. Galusinski [44] a proposé de modifier plutôt la condition aux limites sur les bords du domaine approché. Cette condition modifiée s'appuie sur l'information de la distance au bord du domaine exact. Mais sa mise en œuvre n'est pas compatible avec une approche par pénalisation de domaine.

Dans le cadre d'optimisation et de contrôle d'écoulement, F. Chantalat *et al.* [20,21] avaient proposé une méthode similaire pour trouver une extension pertinente de la vitesse dans un obstacle. La solution est donc prolongée itérativement dans l'obstacle à l'aide de fonctions Level Set et d'équations de transport et imposée par pénalisation dans l'obstacle. Dans un esprit analogue, nous proposons dans la suite une méthode itérative qui modifie le champ de vitesse sur les points de grille à l'intérieur des obstacles et voisins de l'interface qui se révèle être un prolongement C^1 dans le le sol. Il s'agit donc d'une alternative aux Immersed Boundary Methods (IMB) [77].

5.4.1 Principe de la méthode

Notre objectif dans cette méthode est d'imposer une vitesse non nulle dans le sol pour obtenir un prolongement C^1 de la vitesse de la vitesse du fluide dans le solide. Dans les travaux de F. Chantalat, le prolongement est construit d'une façon affine. Ici, le prolongement sera construit par un procédé de symétrisation moins coûteux à mettre en œuvre. En prenant un point M dans le sol, on cherche d'abord son symétrique M_{sym} dans le fluide par rapport à l'interface Γ. Et à partir de la vitesse $\mathbf{u}_{sym}$, on construit la vitesse $\mathbf{u}_s$ dans le point M.

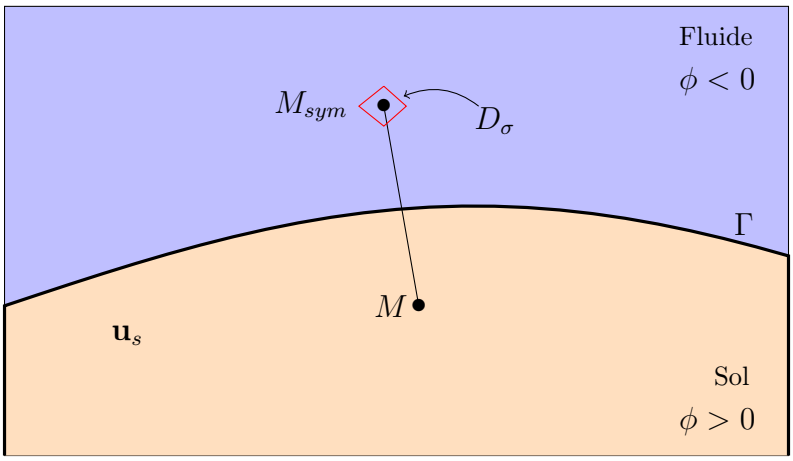


FIGURE 5.14: Schéma donnant la représentation du point dans le solide et son symétrique.

La détermination de la position des points symétriques est facilité par la Level Set ϕ. Ainsi, en considérant le point de O, origine de la base associée au domaine, on a :

$$\overrightarrow{OM}_{sym} = \overrightarrow{OM} - 2\phi\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}. \tag{5.14}$$

Naturellement, le point symétrique ne coïncide pas avec un nœud de la grille. Il est à l'intérieur d'un diamant D_σ obtenu en cherchant le numéro de la face σ dont le centre F est

donné par le calcul de :

$$\max_{F\in\mathcal{K}} \left(\frac{\overrightarrow{FM}_{sym}}{\|\overrightarrow{FM}_{sym}\|} \cdot \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right), \tag{5.15}$$

où $\mathcal{K}$ est la cellule où se trouve le point M_{sym}. Dans le cas conforme cette cellules a six faces.

Nous devons donc interpoler sa vitesse $\mathbf{u}$ à partir de six points de ce diamant. Dans le cas particulier où ce diamant est traversé par l'interface Γ, on utilisera donc le deuxième diamant le plus proche dans la direction de $-\nabla\phi$; ceci permet d'avoir un diamant complètement immergé dans le fluide.

On construit par la suite la vitesse symétrique à imposer dans le solide, de telle sorte que le gradient de vitesse à l'interface reste identique lorsqu'il est évalué de chaque côté de l'interface (voir la figure 5.16). Elle est donné par le prolongement suivant :

$$\mathbf{u}_{sym} = \mathbf{u} + \nabla\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{MM}_{sym}. \tag{5.16}$$

En notant $\mathbf{u}_\Gamma$ la vitesse à l'interface (qui peut être non nulle comme dans le cas du Rotating Cylinder), la valeur de la nouvelle vitesse de pénalisation est :

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{u}_{sym} + 2\mathbf{u}_\Gamma. \tag{5.17}$$

Ce prolongement de la vitesse à travers l'interface n'a pas de sens physique en soit. Il s'agit d'un outil numérique permettant d'avoir un prolongement continu du gradient de la vitesse à l'interface. En pratique, on utilise juste une bande de nœuds au voisinage de l'interface Γ.

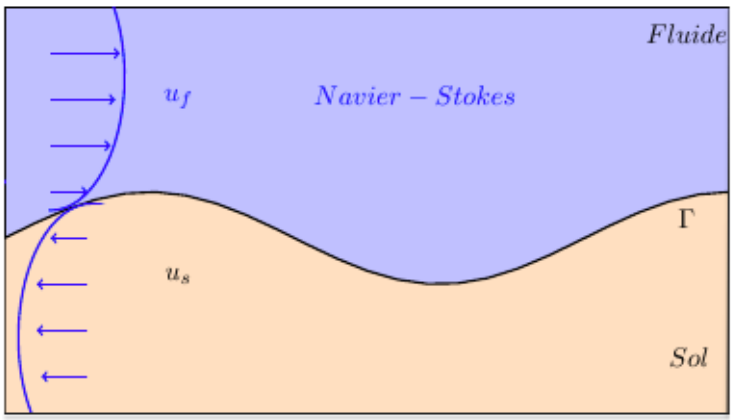


FIGURE 5.15: Schéma représentant la nouvelle vitesse symétrique à imposer dans le sol.

Nous considérons un procédé itératif où à la première étape, on pénalise avec la vitesse nulle ou la vitesse rigide du solide en mouvement. Puis, dans les étapes qui suivent, nous utilisons la vitesse prolongée pour imposer la nouvelle vitesse dans le sol. On itère le processus

qui se révèle convergent. En comparant à chaque fois la vitesse $\mathbf{u}^k$ construite à l'étape k avec la vitesse à l'étape qui la précède, et en utilisant la condition d'arrêt $\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\| = \mathcal{O}(h^2)$, où h est le pas du maillage, 3 itérations suffisent. Ce procédé converge rapidement vers la solution du problème souhaitée avec de plus un prolongement C^1 de la solution dans l'obstacle.

Remarque 15

Le système d'équation de Navier-Stokes à résoudre en utilisant cette correction est :

$$\begin{cases} \rho\left(\partial_t \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^k \wedge rot\mathbf{u}^k\right) - \mu\Delta\mathbf{u}^k + \frac{\mu}{K_s}H(\phi)(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}_s^k) = -\nabla p + \mathbf{f} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^k) = \operatorname{div}(\mathbf{u}_s^k) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ (+C.L.) & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases}$$

5.4.2 Validation

Cette correction doit permettre d'éliminer la couche limite d'inconsistance. Nous devons donc obtenir une estimation correcte de la contrainte de cisaillement à l'interface. Pour valider la pertinence de cette nouvelle approche, nous reprenons le Rotating Cylinder Test (*cf.* paragraphe 5.3.4.2) et nous calculons la contrainte en utilisant le procédé itératif qu'on vient d'exposer. Le cylindre interne de rayon r_i a une vitesse rigide $\mathbf{u}_\Gamma = \omega r_i \overrightarrow{e_\theta}$. La pénalisation du sol (cylindre interne) par la vitesse donnée dans (5.16), puis stabilisée par le processus itératif, donne l'écoulement représenté dans la figure suivante :

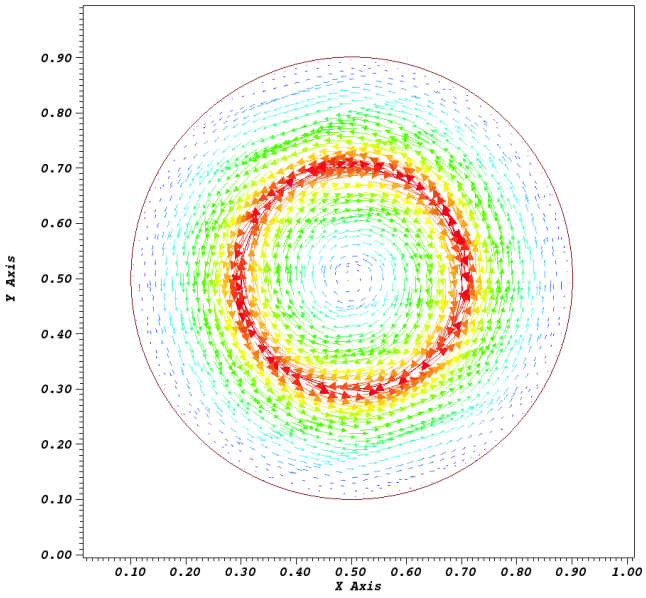


FIGURE 5.16: Écoulement entre deux cylindres avec une vitesse symétrique imposée au sol.

Dans la figure ci-dessous, nous représentons en fonction du rayon r les valeurs exactes (en bleu) et les valeurs numériques obtenues par la nouvelle approche (en rouge) de la contrainte τ en superposant toutes les solutions prises dans la direction radiale. On observe qu'au niveau de l'isocontour $\phi_0 = 0$ (donné en vert), la couche limite d'inconsistance est éliminée. Nous pouvons estimer avec precision la vitesse d'érosion et l'étendre à partir de l'interface pour faire des calculs d'érosion comme nous l'avons décrit dans les équations du modèle au début de ce chapitre.

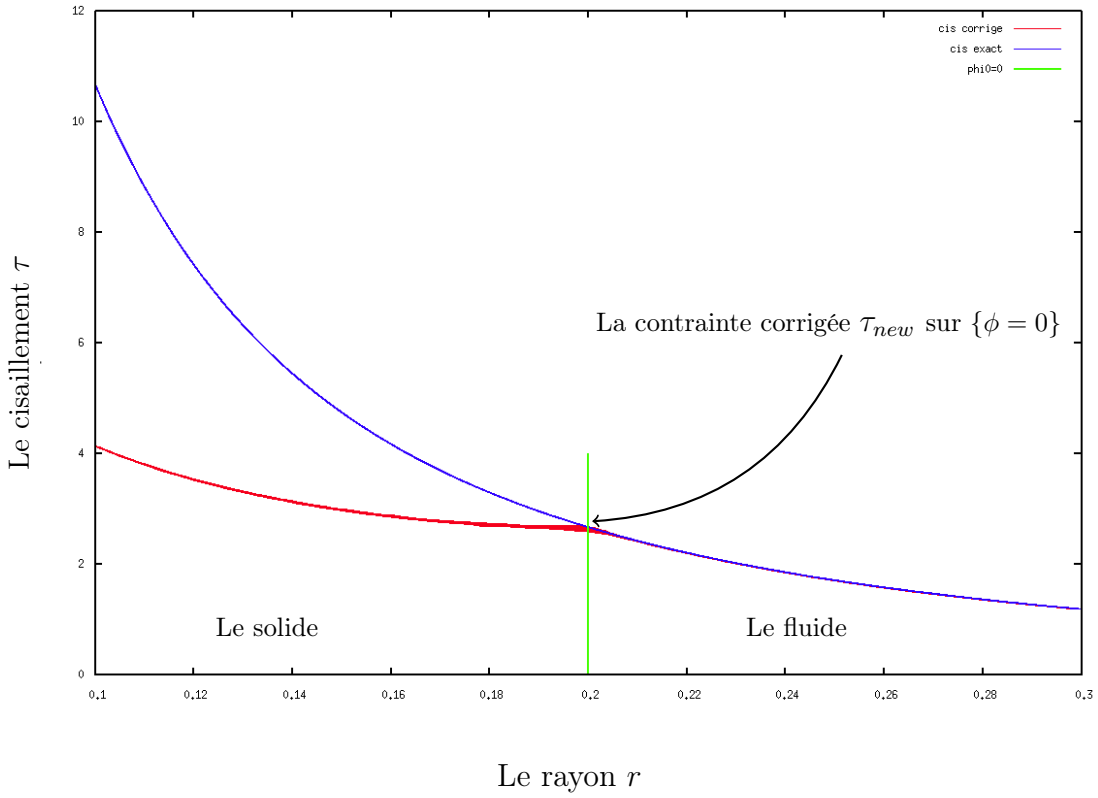


FIGURE 5.17: Contrainte exacte τ_{exact} et corrigée τ_{new} en fonction du rayon r.

On effectue plusieurs simulations en faisant varier la taille du maillage et à chaque fois on calcule les erreurs ErrL_2 et ErrL_∞ commises dans l'estimation de la nouvelle contrainte τ_{new} par rapport à la contrainte exacte τ_{exact} calculées à l'interface. Ces erreurs sont obtenues en calculant :

$$\mathrm{ErrL}_2 = \frac{\|\tau_{exact} - \tau_{new}\|_2}{\|\tau_{exact}\|_2} \quad \text{et} \quad \mathrm{ErrL}_\infty = \frac{\|\tau_{exact} - \tau_{new}\|_\infty}{\|\tau_{exact}\|_\infty},$$

où $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont prise sur un voisinage de Γ. Dans la figure ci-après, nous représentons deux courbes qui donnent les tracés de ces erreurs cette en fonction du pas du maillage h.

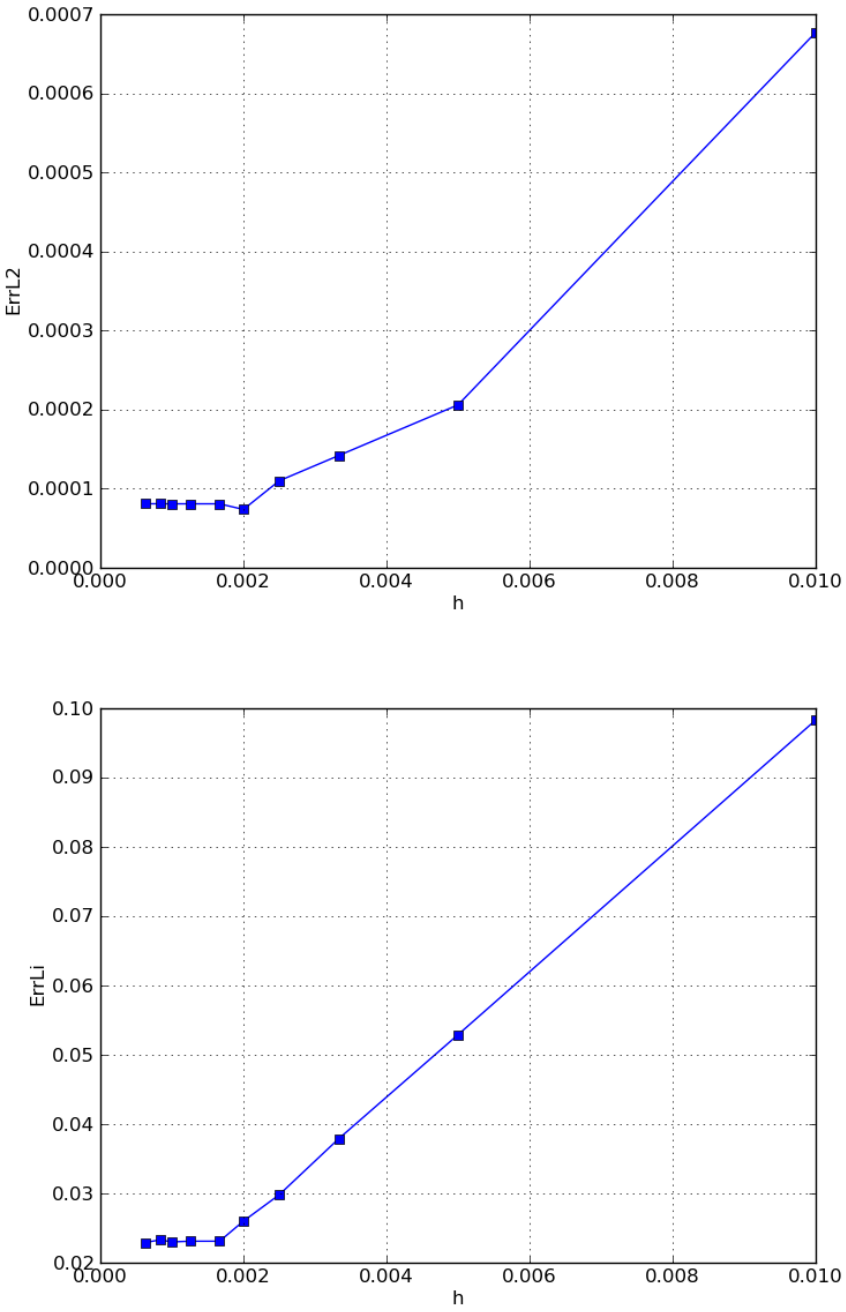


FIGURE 5.18: Courbes des erreurs sur τ_{new} en normes L_2 et L_∞ en fonction du pas du maillage h.

Nous remarquons donc qu'on peut atteindre 3% d'erreur sur le calcul de la contrainte du cisaillement à l'interface Γ en utilisant un maillage de pas $h = 1/500$ (qui correspond à 300 points de grille dans la zone d'intérêt). Au delà de ce nombre, il est inutile de de prendre plus de mailles et de raffiner car l'erreur n'évolue plus. Mais ceci est largement suffisant pour nos applications. L'erreur est d'ordre 1 sur des grilles fines, mais par une raison non identifiée cet ordre est perdu sur des grilles extrêmement fines.

5.5 Applications

Dans cette section, des simulations numériques d'érosion complète, dont le calcul est basé sur les algorithmes développés précédemment, sont présentées. Nous nous intéressons à deux cas applicatifs : l'érosion d'un cylindre et l'érosion d'une bille. Les deux obstacles sont placés dans un canal rectangulaire et soumis à des écoulements incompressibles. L'érosion de la bille a été déjà évoquée dans le paragraphe 5.3.5 pour montrer les limites de la première approche pour la correction de la contrainte. Ici, nous utiliserons ce test pour valider la seconde approche et pour illustrer un cas 3D. Pour le cas de l'érosion du cylindre, il sera traité en 2D. Ce cas test nous permet d'explorer les résultats l'érosion en fonction du nombre de Reynolds, de la nature de l'écoulement (confiné ou pas) et des paramètres de l'érosion (le coefficient K_d et le seuil τ_c).

5.5.1 Érosion d'un cylindre

5.5.1.1 Expérimentation au laboratoire

Nous présentons d'abord une expérience de laboratoire (figure ci-dessous) menée par M. Moore *et al.* [80, 81], dans lequel un corps d'argile sous forme cylindrique est maintenu fixe et soumis à un écoulement d'eau à grande vitesse.

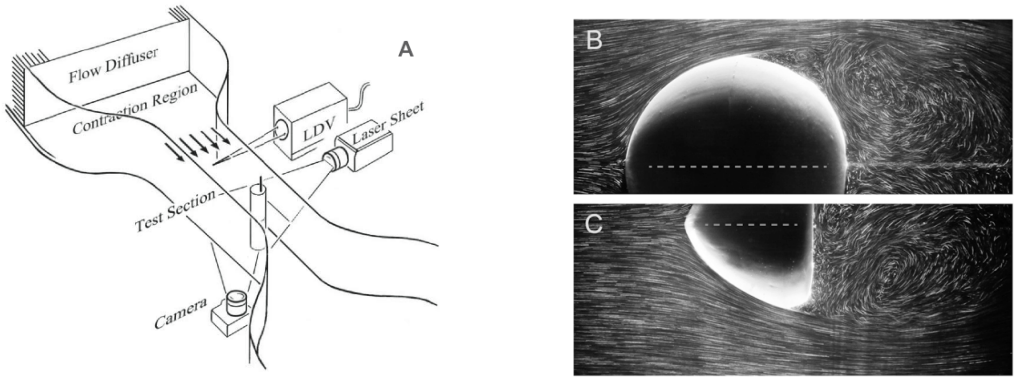


FIGURE 5.19: (A) : Le schéma du dispositif expérimental utilisé pour l'érosion d'un cylindre en argile. (B) et (C) : visualisation de l'écoulement autour d'un corps cylindrique à des différents instants dans le processus d'érosion (extraits de M. Moore *et al.* [81]).

Cet essai expérimental nous permet d'avoir à la fois la visualisation de l'écoulement, ainsi que le profil du cylindre qui change de forme au cours de l'érosion. Dans [81], les auteurs ont aussi élaboré un modèle numérique utilisant la loi d'érosion interfaciale couplée à un modèle asymptotique de couche mince. En ayant recours aux équations de Prandtl [85], ce modèle simplifie le système d'équations de Navier-Stokes en un système d'équations différentielles ordinaires.

5.5.1.2 Simulations numériques

Nous avons réalisé une série de tests pour observer l'érosion d'un cylindre sous l'écoulement incompressible à Reynolds faibles à modérés. Ce choix est légitime étant donné l'échelle d'érosion à concernée dans notre étude. Nous mettons en évidence l'influence du nombre de Reynolds sur le profil de l'objet érodé et nous confronterons nos résultats aux résultats expérimentaux et numériques obtenus par M. Moore *et al.* [81]. Nous testerons également la sensibilité au type d'écoulement et aux paramètres de la loi d'érosion.

Description du cas

On considère un domaine rectangulaire Ω, où on place un cylindre de rayon initial r_0 et de centre (x_0, y_0). L'écoulement incompressible est résolu par les équations de Stokes, puis par les équation de Navier Stokes avec les conditions aux bords suivantes :

- Sur le bord Γ_ℓ on impose une vitesse d'entrée $\mathbf{u}_0$ par une condition de Dirichlet .
- Sur le bord Γ_r on impose des conditions de "Neumann" pour avoir une sortie libre.
- Sur les deux autres bords, Γ_t et Γ_b, on impose les conditions de Dirichlet ou de "Neumann" pour avoir respectivement des écoulements confinés ou non confinés.

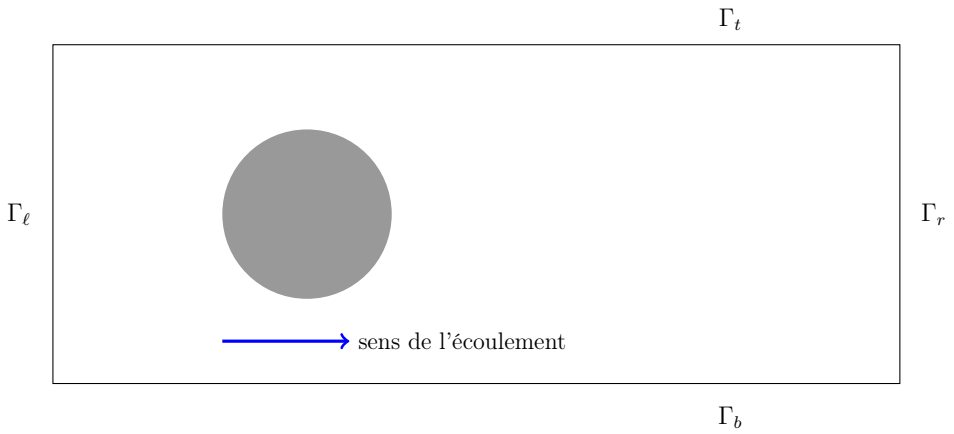


FIGURE 5.20: Cas test du cylindre en sol érodable placé au milieu d'un écoulement.

Pour le calcul de la contrainte de cisaillement, nous utilisons la deuxième approche, qui consiste à éliminer la couche limite d'inconsistance et nous suivons le processus global alternant les étapes *écoulement* et *érosion* (voir les équations du modèle dans la section 5.1). Les points suivants résument les différents cas tests des simulations numériques effectuées :

- On traite deux types d'écoulement, confiné par des parois et non confiné ;
- On fait varier le nombre de Reynolds ($0 \leq Re \leq 100$) ;
- On fait varier le seuil τ_c et le coefficient d'érosion K_d.

Maillage utilisé

Nous utilisons un maillage DDFV non conforme comme illustré dans la figure 5.21 avec trois niveaux de raffinement. Le maillage est initialisé en tenant compte de la géométrie comme critère de raffinement AMR (Adaptive Mesh Refinement) [48]. Puis, les informations des différents volumes de contrôle nécessaires aux schémas DDFV sont calculées. L'obstacle est contenu dans la zone la plus raffinée pour assurer une bonne estimation de la contrainte.

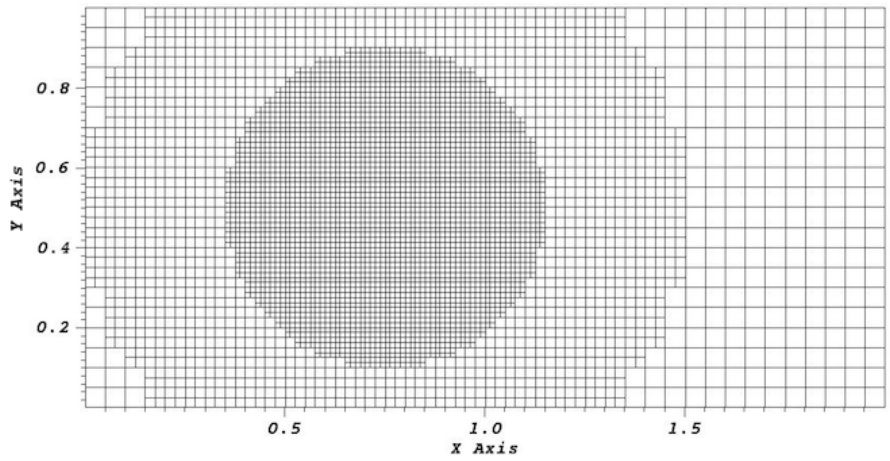


FIGURE 5.21: Visualisation du type de maillage utilisé pour la simulation numérique.

État initial

Dans la figure qui suit, on donne l'état initial des cylindres à éroder sous des écoulements confinés. À gauche, il s'agit d'un écoulement de Stokes et à droite d'un écoulement de Navier-Stokes ($Re = 40$).

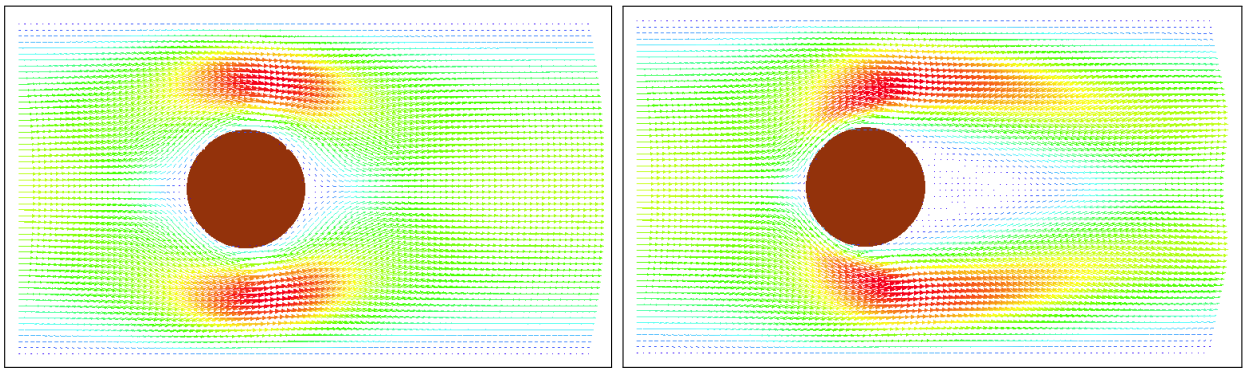
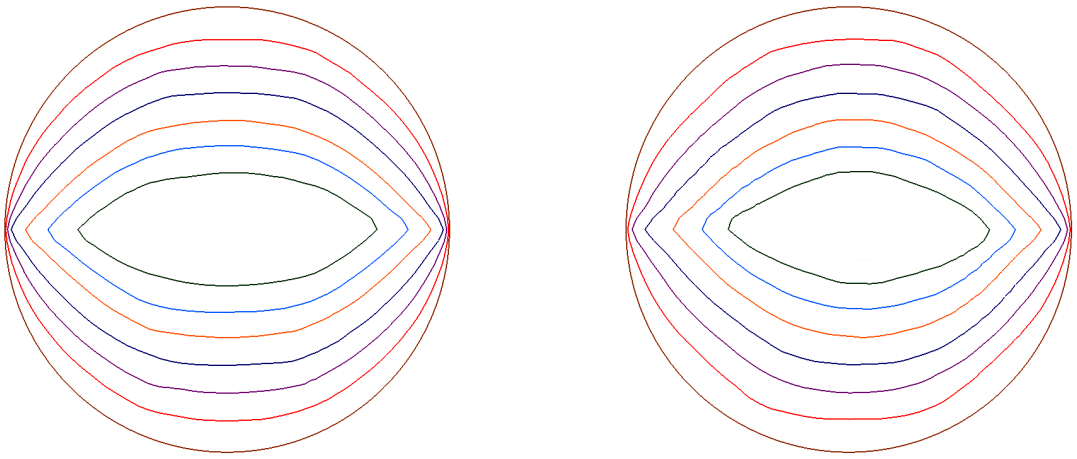


FIGURE 5.22: Cylindres à l'état initial sous des écoulements confinés (Stokes à gauche, Navier-Stokes à droite).

Résultats d'érosion

Dans les figures suivantes, on affiche les profils de l'interface du cylindre à différentes étapes d'érosion pour des simulations correspondants aux cas tests annoncés précédemment. Pour ces simulations, on utilise les paramètres de l'érosion : $K_d = 10^{-7}$ cm³/N.s et $\tau_c = 0$ Pa.

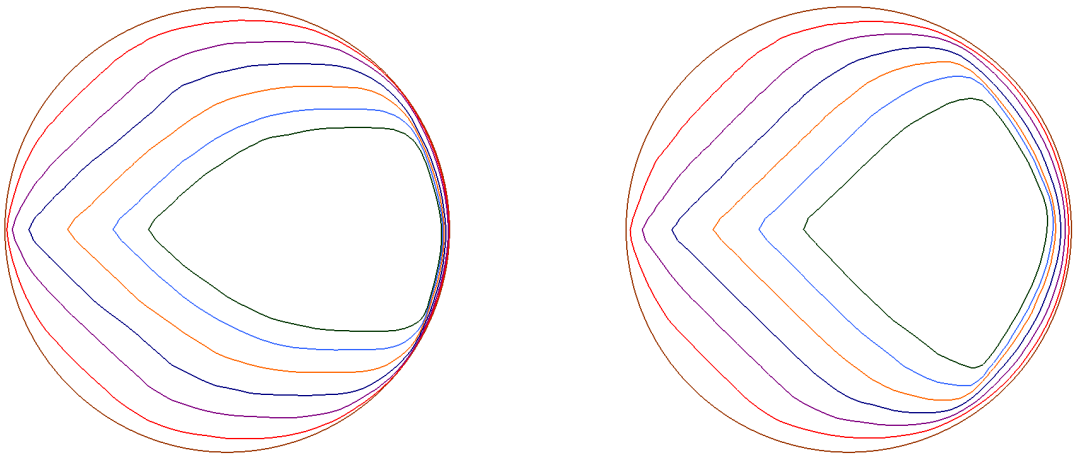
- **Écoulements de Stokes :**



(a) Cylindre sous écoulement confiné (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.23: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Stokes.

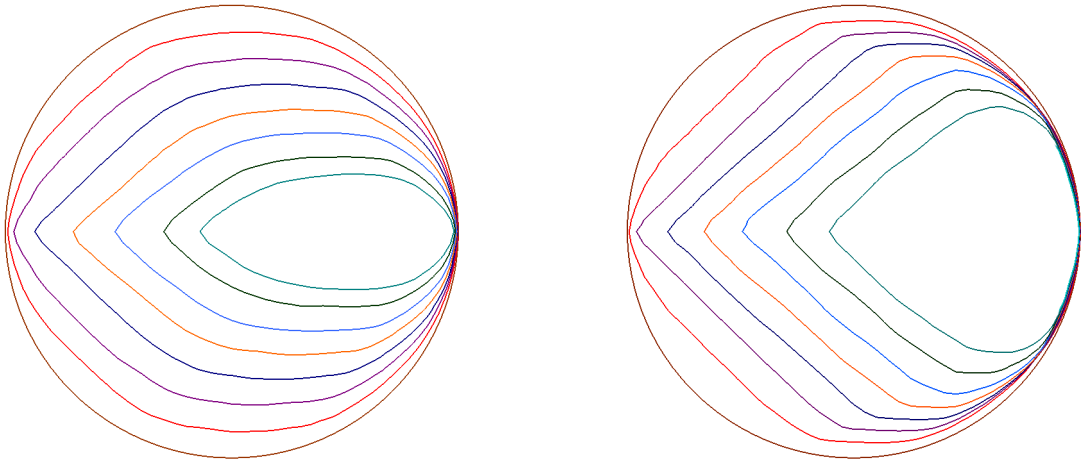
- **Écoulements de Navier-Stokes avec** $Re = 20$ **:**



(a) Cylindre sous écoulement confiné. (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.24: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Navier-Stokes.

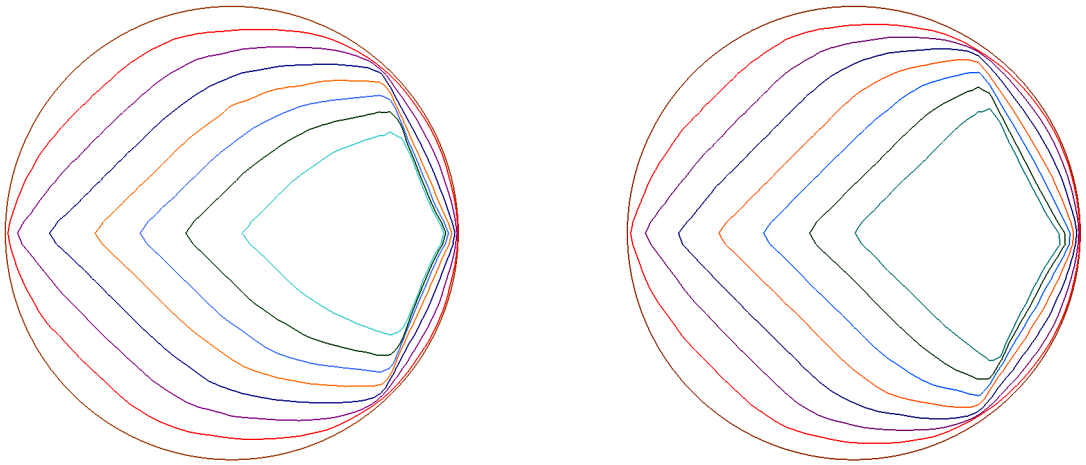
- **Écoulements de Navier-Stokes avec** $Re = 40$ **:**



(a) Cylindre sous écoulement confiné. (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.25: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Navier-Stokes.

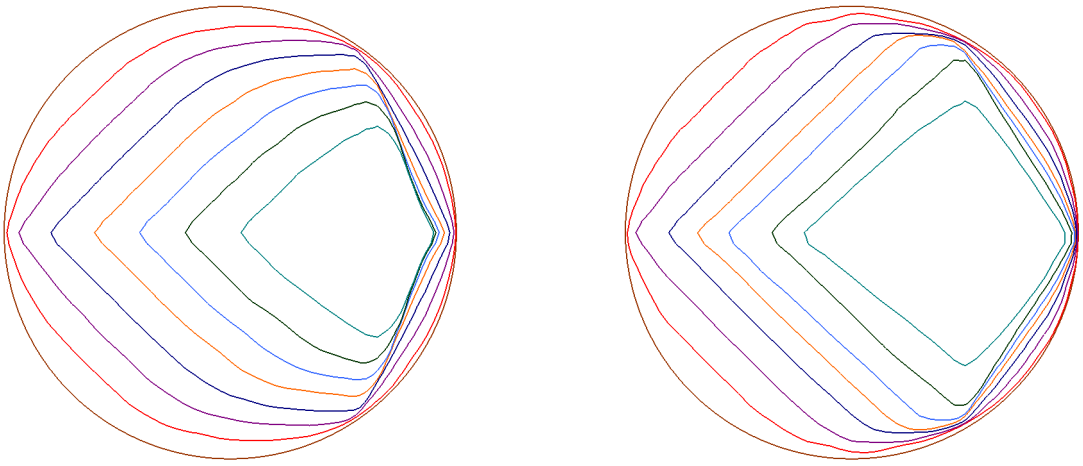
- **Écoulements de Navier-Stokes avec** $Re = 50$ **:**



(a) Cylindre sous écoulement confiné. (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.26: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Navier-Stokes.

• **Écoulement de Navier-Stokes avec** $Re = 80$ **:**



(a) Cylindre sous écoulement confiné. (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.27: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulement de Navier-Stokes.

Les résultats que nous venons de présenter montrent plusieurs aspects sur l'évolution de la section du cylindre sous l'effet de l'érosion. Ainsi, nous pouvons faire une première analyse sur la forme de l'objet érodé selon le type d'écoulement :

- Sous l'écoulement de Stokes, le cylindre érodé a une forme ovale présentant une parfaite symétrie et garde le même centre de gravité que le cylindre initial (figure 5.23). Cette forme se voit d'avantage érodée par l'écoulement confiné près des parois. On retrouve ici les résultats obtenus par D. Lachouette [60], avec plus de précision.
- Sous l'écoulement de Navier-Stokes, le cylindre érodé ne présente plus de symétrie amont/aval et en s'érodant, il prend en amont une forme plus ou moins triangulaire, qui présente un point d'arrêt pointant vers l'arrivée du flux. On retrouve ici les résultats observés dans les expériences de M. Moore *et al.* [80,81]. Par contre, en observant l'objet érodé en aval, on constate qu'avec des écoulements à faibles Reynolds (< 50), il garde une forme circulaire (figures 5.24 et 5.25) ; et avec des Reynolds plus élevés (> 50), cet objet prend une forme triangulaire mais avec un angle différent de celui observé en amont (figures 5.24 et 5.25). Les simulations numériques de M. Moore *et al.* n'ont pas relevé cet aspect, parce qu'ils ont considéré un modèle sur couche mince. Le confinement a ici, aussi, un effet d'érosion de l'objet, accentuée près des parois.

Nos simulations ont permis de capter des informations sur la physique de l'objet érodé. Dans ce qui suit, nous mettons en exergue plus de détails pour l'analyse de l'érosion que nous avons obtenu en fonction du nombre Reynolds.

Dans la figure suivante on affiche les profils du cylindre érodé, après une durée d'érosion égale, sous écoulements de Stokes et de Navier-Stokes avec différents nombre de Reynolds :

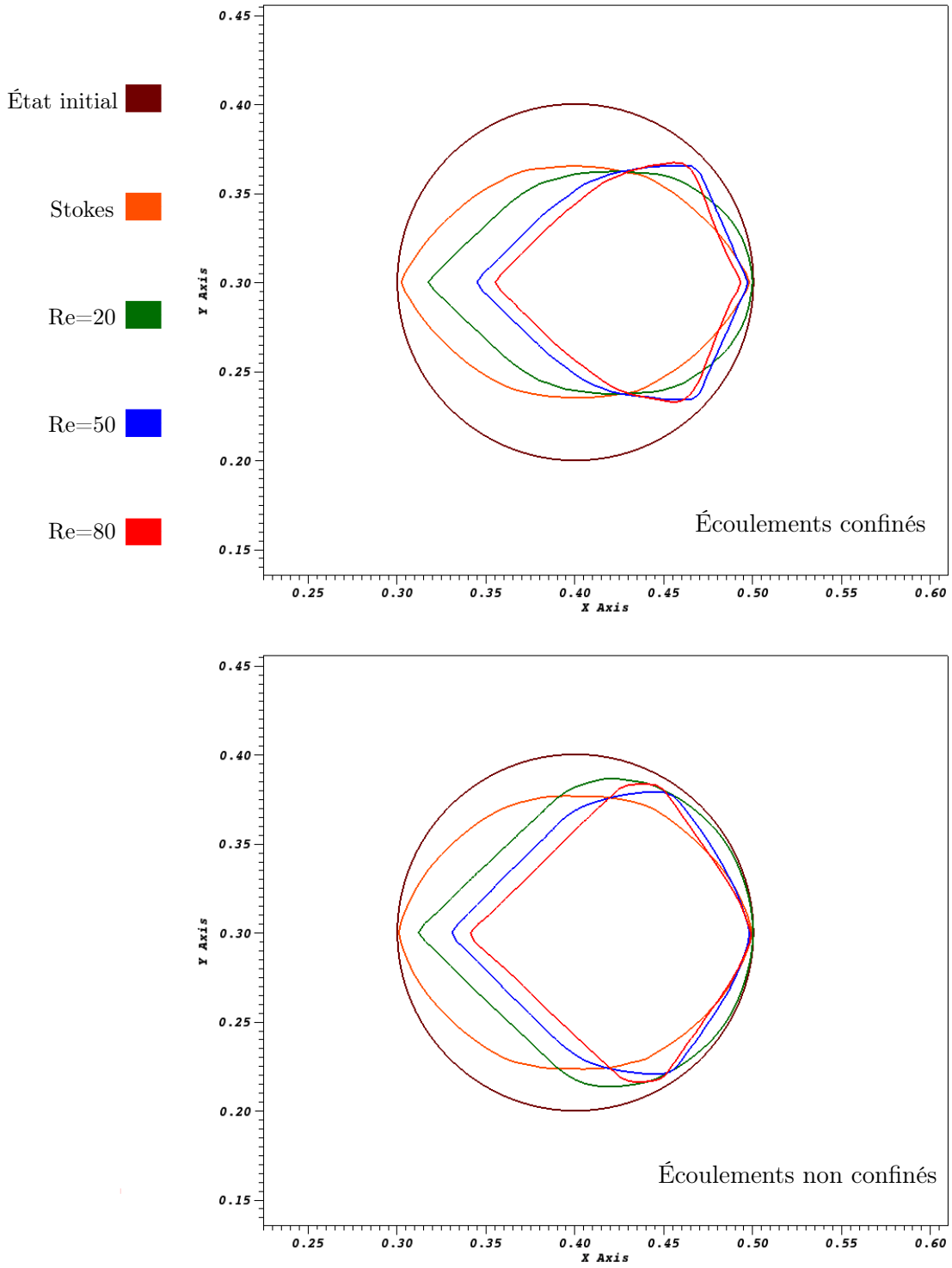


FIGURE 5.28: Profils des interfaces érodées prises au même instant en fonction du Reynolds.

On constate, comme prévu, qu'en augmentant le nombre de Reynolds l'érosion devient plus rapide. Le confinement de l'écoulement la rend encore plus rapide. La forme en amont, que nous avons évoquée avant, présente une pointe avec un angle asymptotique atteint pour des Reynolds de l'ordre de quelques dizaines. Cet angle est le même pour les nombres de Reynolds que nous avons étudié et il est proche de 90°. M. Moore *et al.* [81] ont trouvé numériquement le même angle avec un modèle asymptotique d'écoulement valable à haut Reynolds. Mais, expérimentalement le temps d'érosion n'était pas suffisant pour atteindre un tel angle.

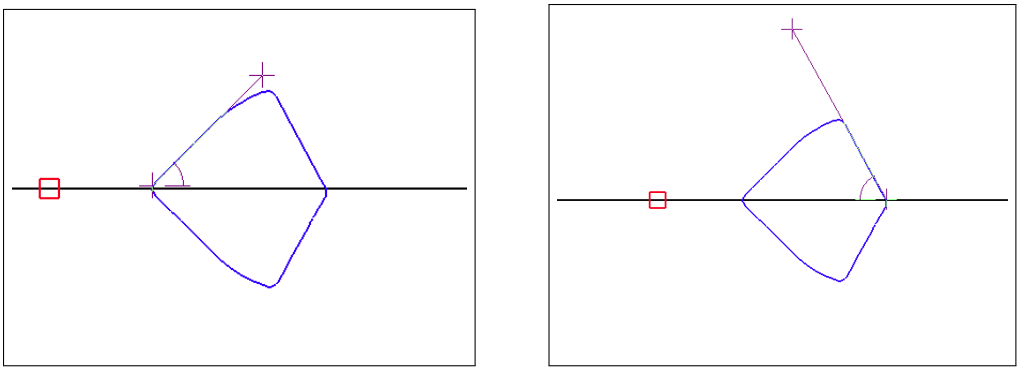


FIGURE 5.29: Exemples d'angles asymptotiques avals et amont (Re=50).

Les formes triangulaires observées en aval, pour des érosions sous des écoulements à Reynolds élevés, sont dues aux tourbillons dernière l'obstacle (voir figure 5.30). Ces recirculations sont plus importantes dans le cas d'écoulements confinés, donc l'érosion est plus forte à cet endroit. Enfin, notons que l'angle asymptotique atteint dans ce cas est 120°.

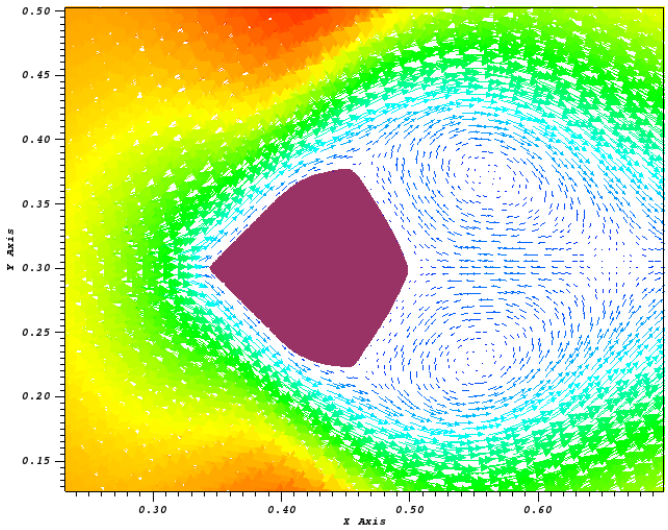


FIGURE 5.30: Érosion en aval de l'obstacle sous l'effet des tourbillons ($Re = 50$).

• **Érosion avec $\tau_c \neq 0$:**

Nous avons effectué ce cas test pour mettre en évidence l'effet seuil de la loi d'érosion. Pour cela on considère un écoulement non confiné avec $Re = 50$. On fixe le coefficient d'érosion $K_d = 10^{-7}$ cm³/N.s. Numériquement, nous avons constaté que la contrainte de cisaillement dans cette configuration est de l'ordre de 2.5 Pa, on choisit donc pour ce cas test la contrainte critique $\tau_c = 1$ Pa. Dans la figure suivante on donne les résultats de la simulation, où on constate qu'à cause de ce nouveau seuil, la partie aval du cylindre ne s'érode plus car le cisaillement très faible à cet endroit.

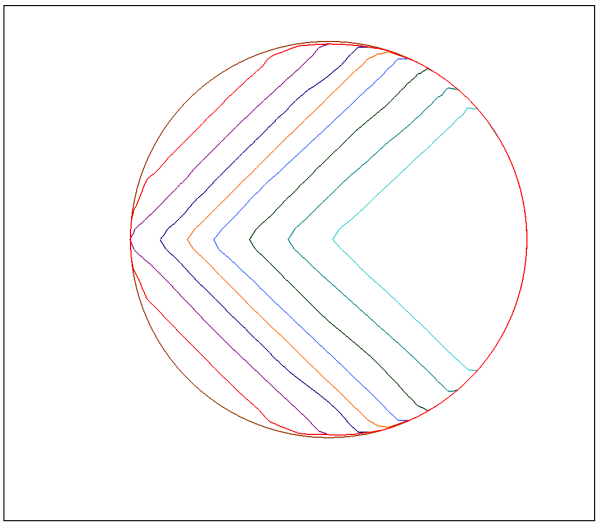


FIGURE 5.31: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion ($\tau_c = 1$ Pa).

La partie amont s'érode comme dans le cas sans seuil, sauf au début où l'érosion n'opère pas au "nez" de l'obstacle (voir la figure ci-dessous), car dans ce cas, le cisaillement est sous le seuil critique.

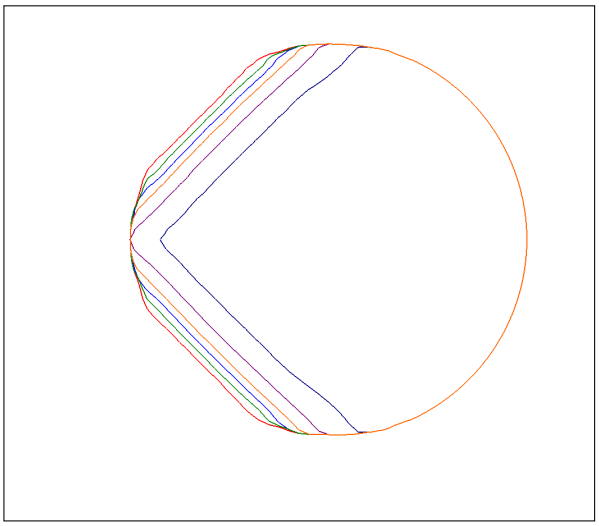


FIGURE 5.32: Zoom sur les profils de l'interface au début de l'érosion ($\tau_c = 1$ Pa).

• **Érosion avec $K_d = 1$ cm³/N.s :**

Ce dernier test ne correspond pas aux hypothèses du modèle, puisqu'en prenant $K_d = 1$ cm³/N.s les vitesses de l'érosion et de l'écoulement auront la même échelle. Mais, ce test nous permet d'observer l'influence d'une érosion rapide par rapport à l'écoulement. Pour cela on considère un écoulement non confiné, avec $Re = 50$ et on fixe la contrainte critique τ_c à 0. Dans la figure 5.33, on représente les profils de l'interface lors de l'érosion avec $K_d = 1$ cm³/N.s. Pour comparaison, on affiche les profils des interfaces érodées sous le même écoulement avec $K_d = 0$ cm³/N.s. Les interfaces érodées gardent globalement les mêmes profils, mais avec des érosions plus accentuées pour le cas $K_d = 1$ cm³/N.s. Sur la moitié droite de l'objet, en aval de l'écoulement, ces profils perdent la particularité rectiligne, ceci ressemble aux profils constatés sous un écoulement à bas Reynolds. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'écoulement trouve un régime asymptotique plus tard près du "nez" de l'obstacle.

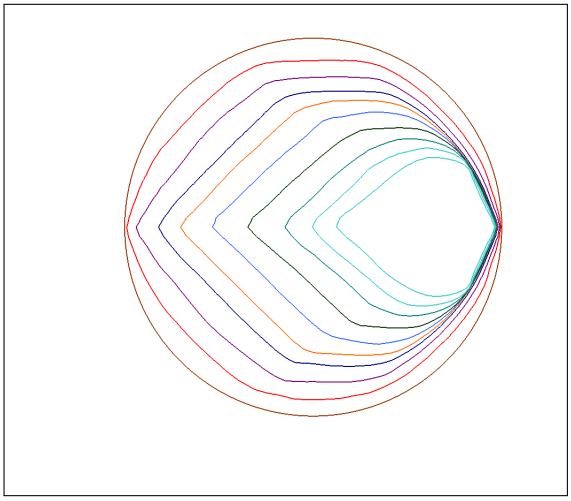


FIGURE 5.33: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion avec $K_d = 1$ cm³/N.s.

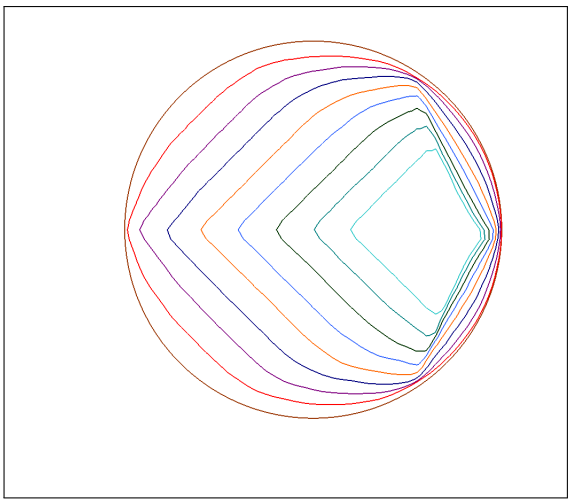


FIGURE 5.34: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion avec $K_d = 10^{-7}$ cm³/N.s.

5.5.2 Érosion d'une bille

Pour illustrer un cas 3D, on reprend la simulation de la bille de sol placée au milieu d'un canal rectangulaire $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]^2$ que nous avons présentée précédemment. On utilise deux écoulements confinés, l'un est décrit par les équations de Stokes et l'autre est décrit par les équations de Navier-Stokes avec $Re = 20$.

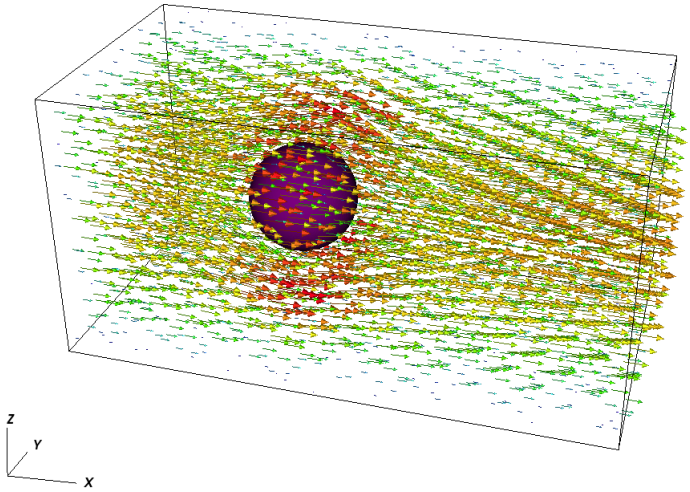


FIGURE 5.35: Cas test d'une bille sous un écoulement au milieu d'un canal.

Le maillage utilisé est représenté dans la figure 5.36. C'est un maillage DDFV non conforme, initialisé, comme dans le cas précédent, en tenant compte de la géométrie comme critère de raffinement AMR. Les informations nécessaires aux schémas DDFV sont calculées ensuite. L'objet à éroder est contenu dans la zone la plus raffinée.

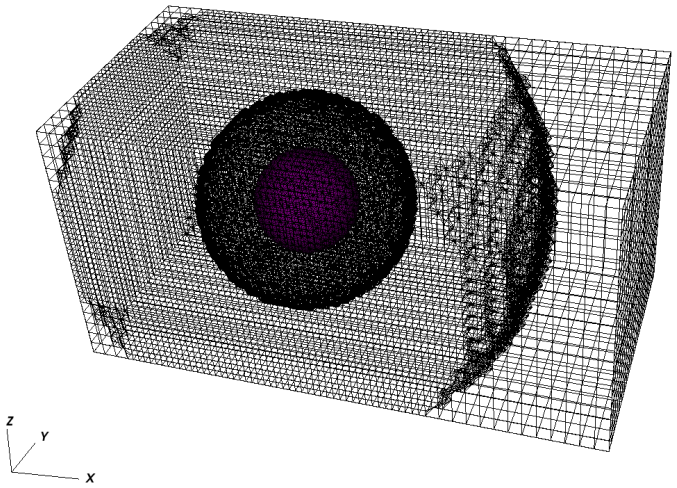


FIGURE 5.36: Visualisation du maillage utilisé et de la bille à éroder.

Dans les deux figures ci-dessous on représente la norme de la contrainte du cisaillement exercée par le fluide sur la bille. Cette contrainte est parfaitement symétrique dans le cas d'un écoulement de Stokes comme le montre la figure 5.37. Dans le cas de Navier-Stokes, la symétrie est perdue ; l'inertie du fluide impose un fort cisaillement sur la partie de la bille se trouvant en amont du flux. En observant les profils de ces contraintes, on constate qu'ils présentent autour de la bille des valeurs très importantes sur les cotés qui sont faces aux parois et moins importantes dans les parties face aux angles du canal qui est une région moins confinée. Dans les parties amont et aval, les valeurs du cisaillement sont quasi nulles.

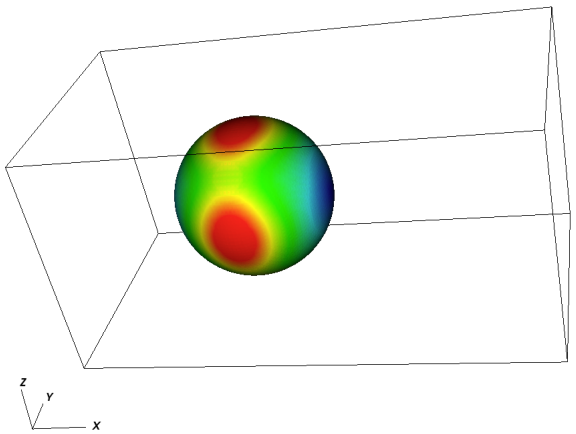


FIGURE 5.37: Contrainte de cisaillement d'une bille soumise à un écoulement de Stokes confiné.

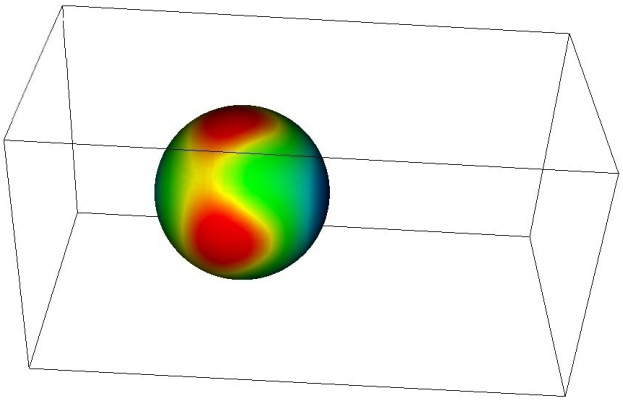


FIGURE 5.38: Contrainte de cisaillement d'une bille soumise à un écoulement de Navier-Stokes confiné.

Nous donnons, sur les figures qui suivent, quelques résultats de la simulation numérique de l'érosion de la bille sous un écoulement de Navier-Stokes ($Re = 20$). Pour les paramètres de l'érosion on prend : $K_d = 10^{-7}$ cm³/N.s et $\tau_c = 0$ Pa.

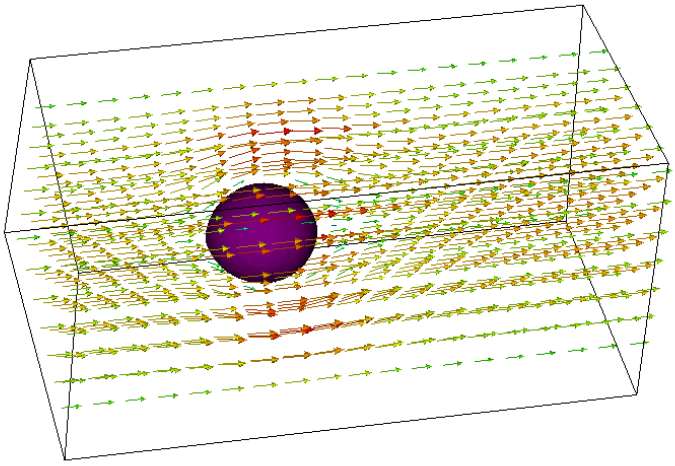


FIGURE 5.39: La bille au début de l'érosion.

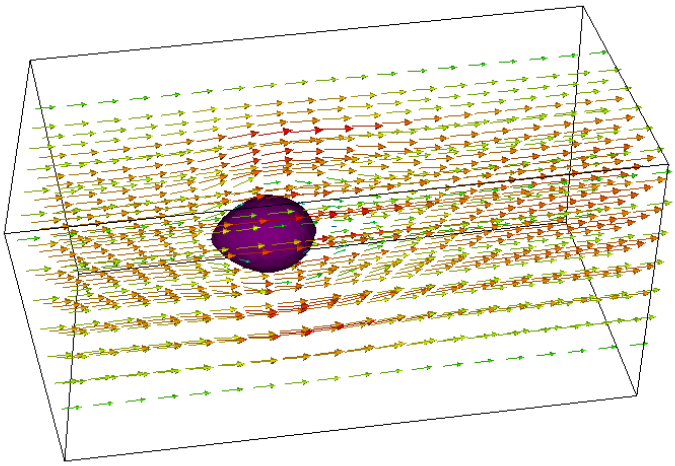


FIGURE 5.40: La bille en érosion à un temps intermédiaire.

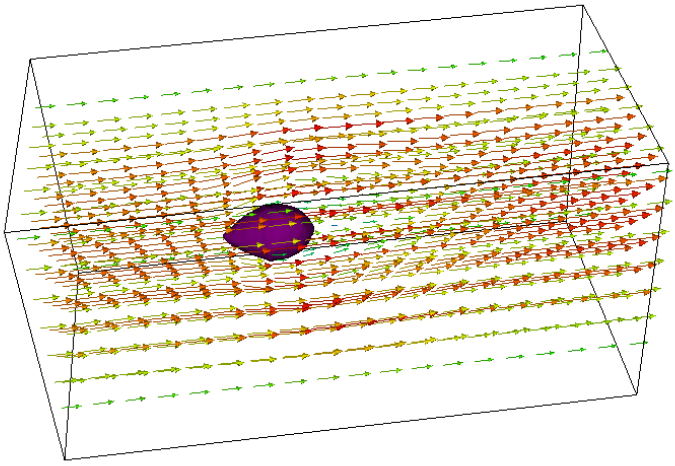


FIGURE 5.41: La bille en érosion à un autre temps intermédiaire.

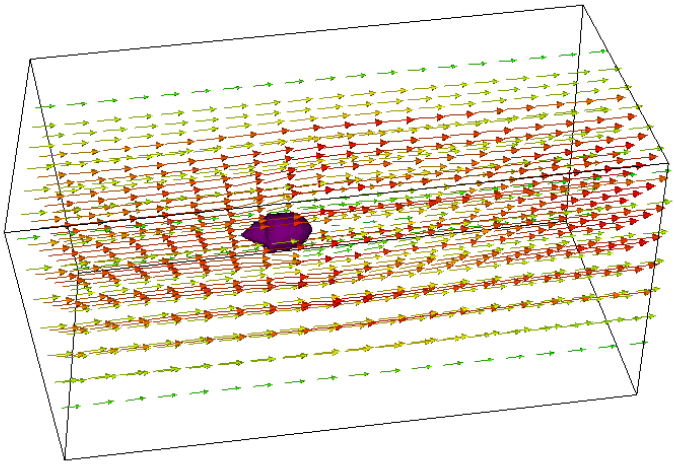


FIGURE 5.42: La bille à la fin de l'érosion.

5.6 Conclusion

À travers ce chapitre, nous avons présenté deux approches pour donner un calcul pertinent de la contrainte de cisaillement à l'interface solide/fluide. La première approche consiste à s'extraire de la couche limite d'inconsistance. Une approche qui fonctionne bien dans le cas radial mais qui montre ses limites quand l'écoulement présente des grandes variations de cisaillement au voisinage de l'obstacle. La deuxième approche permet d'éliminer la couche limite d'inconsistance et de donner un calcul consistant de la contrainte à l'interface. C'est ainsi que les limites de la première sont corrigées .

Par la suite, nous avons assemblé les outils numériques développés tout au long de la thèse pour présenter des applications décrivant des processus complets d'érosion. Des validations ont été présentées dans les cas simulant l'érosion d'un trou (HET) et l'érosion d'un cylindre tournant (RCT). Les simulations numériques du cas de l'érosion du cylindre, tel que décrit dans l'expérience de M. Moor *et al.* [80, 81], permettent d'explorer en détails plusieurs aspects physiques. Nous avons mené ces simulations en variant les paramètres d'écoulement (le nombre de Reylonds et le confinement ou pas de l'écoulement) et les paramètres de la loi d'érosion (le seuil τ_c et le coefficient K_d). Les résultats ont été confrontés aux expérimentations réelles et ont montré que notre modèle donne une description riche du phénomène. Le cas de l'érosion de la bille, bien qu'il reste purement académique, montre bien la capacité du code à fournir de simulations totalement 3D.

Conclusion générale

L'érosion hydraulique des sols, qu'elle soit interne ou de surface, implique des phénomènes complexes et variés qui dépendent de nombreux paramètres, tels que la nature et l'état du sol, ainsi que le type d'écoulement subit par le sol. Plusieurs travaux de recherche ont été menés pour reproduire ces phénomènes en laboratoire, puis les modéliser numériquement. L'étude que nous avons présentée dans ce manuscrit apporte une contribution à la simulation numérique de l'érosion interfaciale de sol cohésif.

Nous avons commencé par présenter un état de l'art qui aborde le contexte général de l'érosion dans les ouvrages hydrauliques et qui dresse un bref bilan des études expérimentales de ce phénomène. Par la suite, nous avons décrit l'érosion depuis un modèle d'écoulement incompressible et d'une loi d'érosion interfaciale. Notre intérêt s'est porté sur la phase d'initialisation du phénomène où, à cette échelle, les écoulements considérés sont laminaires. La modélisation s'appuie sur les hypothèses d'un sol cohésif et imperméable soumis à un écoulement dilué. De ce point de vue, la dynamique de l'érosion est décrite par l'évolution de l'interface sol/fluide supposée fine. Ainsi, l'érosion est pilotée par une loi empirique ; une relation à seuil basée sur la contrainte de cisaillement à l'interface. La modélisation numérique que nous avons choisie est basée sur une approche eulérienne, qui consiste à définir les milieux eau et sol dans un domaine discrétisé par un maillage fixe, puis, à résoudre les équations de l'écoulement sur le domaine eau/sol unifié par la technique des domaines fictifs et à déterminer enfin l'évolution de l'interface par *Level Set*. Cette approche a été analysée et validée par D. Lachouette [60] par la même modélisation que nous considérons. Elle s'est révélée moins couteuse que l'approche lagrangienne, utilisée par F. Mercier [67] pour la modélisation de l'érosion par un écoulement turbulent, qui consiste à ne modéliser que la partie fluide en remaillant à chaque déplacement de l'interface.

Les premières modélisations ont mis en exergue l'importance du calcul de la contrainte et de la discrétisation au niveau de l'interface eau/sol [60]. La bonne prédiction de la vitesse d'érosion repose sur ce point essentiel. La nécessité d'effectuer des adaptations locales de maillage a été mise en évidence, afin de gagner en précision, tout en autorisant des simulations tridimensionnelles réalistes. Or, le schéma de discrétisation cartésien sur grille

décalée n'autorisait pas une telle amélioration. C'est pourquoi, pour résoudre les équations de Navier-Stokes, nous proposons une nouvelle formulation par schéma DDFV (Discrete Duality Finite Volume), avec laquelle nous pouvons réaliser des raffinements locaux sur maillages non-conformes et non-structurés. De plus, nous avons établi la stabilité inconditionnelle de ce schéma associé à une discrétisation temporelle adaptée et s'appuyant sur les méthodes de projection. D'autre part, l'approche par pénalisation a mis en évidence une couche limite d'inconsistance à l'interface fluide/solide lors du calcul de la contrainte de cisaillement induisant ainsi à un problème à frontière libre. Nous avons donc proposé deux solutions pour déterminer cette contrainte d'une façon consistante. Dans la première, il suffit de s'extraire de la couche limite d'inconsistance pour trouver une estimation correcte de la contrainte. Dans la seconde, on élimine cette couche limite par un procédé de prolongement C^1 du champ de la vitesse (pénalisée) dans le sol. Ainsi, le calcul de la contrainte à l'interface devient consistant ; il s'agit donc d'une alternative aux méthodes de frontières immergées.

Au final, après les premières validations par des tests simulant l'érosion d'un trou (HET) et l'érosion d'un cylindre tournant (RCT), deux applications ont été menées. La première, concerne l'érosion d'un cylindre dont les résultats ont été comparés aux tests expérimentaux [80, 81], ce qui a permis de confirmer la validité de notre modèle. Cette application a mis en lumière plusieurs paramètres montrant la pertinence de l'approche. L'analyse de l'influence du nombre de Reynolds conduit a une meilleure évaluation et compréhension des phénomènes d'érosion. Par ce modèle, nous pouvons balayer une large palette d'écoulement, allant du régime de Stokes au régime transitoire. Le test avec un coefficient d'érosion suffisamment grand montre que le modèle peut donner des résultats qualitativement fiables même dans le cas d'écoulement en régime asymptotique. Quant au test portant sur la contrainte critique, il a permis de mettre en évidence l'influence du seuil sur les profils d'érosion. La seconde application, qui concerne l'érosion d'une bille, a montré la capacité du code à fournir des simulations 3D.

Perspectives

Plusieurs axes peuvent être approfondis et explorés à l'issue de ce travail. Il sera intéressant d'améliorer et d'optimiser l'outil numérique et de donner des pistes afin d'élargir le champ d'application du modèle. Dans la suite, nous allons préciser successivement ces points.

– ***Maillage avec raffinement dynamique***
L'initialisation du maillage est faite en tenant compte de la géométrie comme critère de raffinement AMR. Une configuration qui reste fixe durant le processus de l'érosion. Un maillage dynamique pourrait être réalisé en raffinant selon un critère qui prend en compte la position de l'interface par la valeur de la fonction *Level Set*. Ce procédé allégera la taille du système mais générera un coût supplémentaire lors des calculs des informations nécessaires, à chaque itération, aux schémas DDFV tels que la numérotation, les volumes de contrôle et l'assemblage du système.

– ***Modification de la loi d'érosion***
La loi d'érosion, que nous avons utilisée, est une loi basée sur le calcul du cisaillement. Les expérimentations en laboratoire l'ont validée dans les cas d'essais HET. Cela permet de prendre en compte le fait que les particules se détachent du sol dans la direction normale. Cela est valable dans le cas des écoulements tangentiels à interface planes, mais est-ce le cas en général ? Des études expérimentales pourraient être menées pour prendre en compte l'influence d'autres termes que la contrainte de cisaillement.

– ***Écoulements à haut Reynolds***
Le cadre de notre étude couvre le traitement de l'érosion dans les régimes de Stokes, laminaire et stationnaire. À une autre échelle, l'érosion pourrait se déclencher à cause des variations locales de pression dans un écoulements turbulent [67]. La loi utilisée ne couvre pas ce cas de figure. Mais l'observation des effets d'un écoulements à haut Reynolds sur l'érosion, en restant dans le même cadre, pourra être envisagé en résolvant les équation de Navier-Stokes par un schéma explicite.

– ***Solveur avec parallélisation MPI***
La parallélisation du solveur du système linéaire basé sur les directives OpenMP donne une scalabilité correcte, mais la gestion de la mémoire partagée reste une limite pour une parallélisation massive. L'utilisation d'un solveur avec la librairie MPI permettra de palier à cette limitation.

– ***Couplage avec déferlement de vagues***
Le modèle que nous avons présenté tient en compte deux milieux sol/fluide. Un couplage avec le modèle eulérien des milieux air/sol ouvrira la voie à une simulation de l'érosion dans les zones de surf.

Bibliographie

[1] B. Andreianov, M. Bendahmane, F. Hubert et S. Krell : On 3D DDFV discretization of gradient and divergence operators. I. Meshing, operators and discrete duality. *IMA J. Numer. Anal.*, 32(4):1574–1603, 2012.

[2] B. Andreianov, M. Bendahmane, K.H. Karlsen et C. Pierre : Convergence of discrete duality finite volume schemes for the cardiac bidomain model. *Netw. Heterog. Media*, 6(2):195–240, 2011.

[3] Ph. Angot : A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions. *Comptes Rendus Mathematique*, 341(11):683–688, 2005.

[4] Ph. Angot, C-H. Bruneau et P. Fabrie : A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4):497–520, 1999.

[5] Ph. Angot, J.P. Caltagirone et P. Fabrie : A fast vector penalty-projection method for incompressible non-homogeneous or multiphase Navier-Stokes problems. *Applied Mathematics Letters*, 25(11):1681 – 1688, 2012.

[6] Ph. Angot et R. Cheaytou : Vector penalty-projection method for incompressible fluid flows with open boundary conditions. *In* Slovak University of Technology in Bratislava, éditeur : *Algoritmy 2012, 19th Conference on Scientific Computing*, ISBN 978-80-227-3742-5, pages 219–229, Vysoké Tatry, Podbanské (Slovakia), Slovakia, septembre 2012. Publishing House of STU (Bratislava).

[7] B. V. Bazaliy et A. Friedman : The Hele-Shaw problem with surface tension in a half-plane : a model problem. *J. Differential Equations*, 216(2):387–438, 2005.

[8] R. Beguin : *Étude multi-échelle de l'érosion de contact au sein des ouvrages hydrauliques en terre.* Thèse de doctorat, Laboratoire d'étude des Transferts en Hydrologie et Environnement, Université de Grenoble, 2011.

[9] N. Benahmed et S. Bonelli : Investigating concentrated leak erosion behaviour of cohesive soils by performing hole erosion tests. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 16(1):43–58, 2012.

[10] M. Bergmann, J. Hovnanian et A. Iollo : An accurate Cartesian method for incompressible flows with moving boundaries. *Commun. Comput. Phys.*, 15(5):1266–1290, 2014.

[11] S. Bonelli : *Géomécanique et Érosion : Application aux digues et aux barrages.* Habilitation à diriger des recherches, Université de la Méditerranée, 2008.

[12] S. Bonelli, N. Benahmed, P. Philippe, A. Bernard, Y. Gremeaux et G. Nunes : Évaluer le temps de rupture d'une digue en remblai érodée par conduit traversant. *Sciences Eaux & Territoires - La revue de transfert d'Irstea*, pages 1424–1447, 2008.

[13] S. Bonelli et O. Brivois : The scaling law of the hole erosion test with constant pressure drops. *International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics*, 2007.

[14] S. Bonelli, O. Brivois, R. Borghi et N. Benahmed : On the modelling of piping erosion. *Comptes Rendus de Mécanique*, 334(8-9):1424–1447, 2006.

[15] S. Bonelli, F. Golay, D. Lachouette et F. Mercier : *Érosion des géomatériaux : Chapitre 6 - Erosion interne et de surface.* Hermès, 2012.

[16] F. Boyer et P. Fabrie : *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 de *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications].* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[17] F. Boyer et F. Hubert : Finite volume method for 2D linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(6):3032–3070, 2008.

[18] J. L. Briaud : Case histories in soil and rock erosion : Woodrow wilson bridge, brazos river meander, normandy cliffs, and new orleans levees. *J. Geotech. Geoenviron. Eng*, 134(10):1424–1447, 2008.

[19] T. Buffard et S. Clain : Monoslope and multislope MUSCL methods for unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 229(10):3745–3776, 2010.

[20] F. Chantalat : *Méthodes level-set et de pénalisation pour l'optimisation et le contrôle d'écoulements.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 2009.

[21] F. Chantalat, C.-H. Bruneau, C. Galusinski et A. Iollo : Level-set, penalization and Cartesian meshes : a paradigm for inverse problems and optimal design. *J. Comput. Phys.*, 228(17):6291–6315, 2009.

[22] X. Chen : The Hele-Shaw problem and area-preserving curve-shortening motions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 123(2):117–151, 1993.

[23] D.L. Chopp : Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *J. Comput. Phys.*, 106(1):77–91, 1993.

[24] A.J. Chorin : Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 22:745–762, 1968.

[25] J. F. Ciavaldini : Analyse numérique d'un problème de Stefan à deux phases par une méthode d'éléments finis. *SIAM J. Numer. Anal.*, 12:464–487, 1975.

[26] G.H. Cottet et E. Maitre : A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid-structure interaction problems. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(7):581–586, 2004.

[27] G.H Cottet et E. Maitre : A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(3):415–438, 2006.

[28] F. Couderc : *Développement d'un code de calcul pour la simulation d'éecoulements de fluides non miscibles. Application à la désintégration assistée d'un jet liquide par un courant gazeux*. Thèse de doctorat, ENSAE - Toulouse, 2007.

[29] Y. Coudière, C. Pierre, O. Rousseau et R. Turpault : A 2D/3D discrete duality finite volume scheme. Application to ECG simulation. *Int. J. Finite Vol.*, 6(1):24, 2009.

[30] Y. Coudière et F. Hubert : A 3D discrete duality finite volume method for nonlinear elliptic equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 33(4):1739–1764, 2011.

[31] R. Courant, E. Isaacson et M. Rees : On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5(3):243–255, 1952.

[32] S. Delcourte, K. Domelevo et P. Omnès : *Discrete-duality finite volume method for second order elliptic problems*. ISTE, London, 2005.

[33] S. Delcourte et P. Omnès : A discrete duality finite volume discretization of the vorticity-velocity-pressure Stokes problem on almost arbitrary two-dimensional grids. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 31(1):1–30, 2015.

[34] K. Domelevo et P. Omnes : A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(6), 2005.

[35] R.P. Fedkiw : Coupling an eulerian fluid calculation to a lagrangian solid calculation with the ghost fluid method. *J. Comput. Phys.*, 175:200–224, 2002.

[36] R.P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman et S. Osher : A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J. Comput. Phys.*, 152(2):457–492, 1999.

[37] R Fell et J.-J. Fry : Internal erosion of dams and their foundations. *In Selected papers from the Workshop on internal erosion and piping of dams and their foundations. Aussois - France*. Taylor & Francis, London, April 2005.

[38] M. Fortin et R. Glowinski : Méthode de lagrangien augmenté - application à la résolution numérique de problèmes aux limites. *Méthode Mathématiques de l'Informatique*, 1982.

[39] M. Foster, R. Fell et M. Spannagle : The statistics of embankment dam failures and accidents. *Canadian Geotechnical Journal*, 37(5):1000–1024, 2000.

[40] R. Frell et J.-J. Fry : *Internal Erosion of Dams and Their Foundations*. Taylor & Francis, London, 2007.

[41] J.-J. Fry : *Érosion des géomatériaux. Chapitre 1 - Introduction à l'érosion interne dans les barrages et les digues*. Hermès, 2012.

[42] J.-J. Fry, P. Brun et P. Royet : Internal erosion problems in some old embankment dams in france. *In Reservoir Safety end the Environment, Proceedings of 8th Conference of British Dam Society, Exeter*, pages 23–34. Thomas Telford, London, 1994.

[43] J.-J. Fry, A. Vogel, P. Royet et J.R Courivaud : Dam failures by erosion : lessons from erinoh data bases. *In Proceedings of the 6th International on Scour and Erosion. Paris, France*, volume 290, 2012.

[44] C. Galusinski : Géométries complexes 3D décrites par fonctions level-set : construction depuis une image et prise en compte des conditions limites. *In Colloque "Level-Set, Champs de phases : Théorie et Applications"*. Groupe de Recherche CNRS 2900, Grenoble - Novembre 2011.

[45] F. Gibou et R. Fedkiw : A fourth order accurate discretization for the Laplace and heat equations on arbitrary domains, with applications to the Stefan problem. *J. Comput. Phys.*, 202(2):577–601, 2005.

[46] E. Godlewski et P.A. Raviart : *Hyperbolic systems of conservation laws*, volume 3/4 de *Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]*. Ellipses, Paris, 1991.

[47] E. Godlewski et P.A. Raviart : *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[48] F. Golay, M. Ersoy, L. Yushchenko et D. Sous : Block-based adaptive mesh refinement scheme using numerical density of entropy production for three-dimensional two-fluid flows. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 29(1):67–81, 2015.

[49] J.L. Guermond, P. Minev et J. Shen : An overview of projection methods for incompressible flows. *Elsevier B.V.*, 195(44-47):6011 – 6045, 2006.

[50] J.L. Guermond et J. Shen : On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods. *Math. Comp.*, 73:1719–1737, 2004.

[51] G.J. Hanson : Development of a jet index to characterize erosion resistance of soils in earthen spillways. *Transactions of the ASABE*, 34(5):2015–2020, 1991.

[52] P. Helluy et F. Golay : Numerical schemes for low Mach wave breaking. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 21(2):69–86, 2007.

[53] F. Hermeline : A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes. *J. Comput. Phys.*, 160:481–499, 2000.

[54] J.O. Hinze : *Turbulence*. McGraw-Hill, 1975.

[55] J. Hovnanian : *Méthode de Frontières Immergées pour la Mécanique des Fluides. Application à la Simulation de la Nages*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I - INRIA Bordeaux Sud Ouest, 2012.

[56] G.S. Jiang et S.W. Shu : Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, 126(1):202–228, 1996.

[57] L. Kleiser et U. Schumann : *Proceedings of the Third GAMM - Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, volume 2 de *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg Teubner Verlag - Hirschel, 1980.

[58] S. Krell : *Schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes*. Thèse de doctorat, Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2010.

[59] S. Krell et G. Manzini : The discrete duality finite volume method for Stokes equations on three-dimensional polyhedral meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(2):808–837, 2012.

[60] D. Lachouette : *Modélisation d'une interface fluide/solide avec érosion, application à l'érosion interne*. Thèse de doctorat, Cemagref, Université de Toulon, 2009.

[61] G. Lefebvre, R. Karol et S. Douville : Erosivity of naturel intact structured clay : Evaluation. *Canadian Geotechnical Journal*, 22:508–517, 1985.

[62] R. J. LeVeque et Z. L. Li : The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(4):1019–1044, 1994.

[63] J.-L. Lions et E. Magenes : *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18. Dunod, Paris, 1968.

[64] X.D. Liu, S. Osher et T. Chan : Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 115(1):200–212, 1994.

[65] A. Løvoll et K. Vaskin : Data report no. 5, large scale field test 2003. Rapport technique, IMPACT (Investigation of Extreme Flood Process and Uncertainty). *FP5 - European Project*, 2003.

[66] B. Martin : *Élaboration de solveurs VolumesFinis 2D/3D pour résoudre le problème de l'élasticité linéaire*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieur de Cachan, 2012.

[67] F. Mercier : *Modélisation numérique de l'érosion d'un sol cohésif par un écoulement turbulent*. Thèse de doctorat, Irstea, Aix Marseille Université, 2013.

[68] F. Mercier, S. Bonelli, F. Golay, F. Anselmet, P. Philippe et R. Borghi : Numerical modelling of concentrated leak erosion during hole erosion tests. *Acta Geotechnica*, 10(3):319–332, 2015.

[69] F. Mercier, F. Golay, S. Bonelli, F. Anselmet, R. Borghi et P. Philippe : 2d axisymmetrical numerical modelling of the erosion of a cohesive soil by a submerged turbulent impinging jet. *European Journal of Mechanics - BFluids*, 45:36 – 50, 2014.

[70] W.L. Moore et F.D. Masch : Experiments on the scour resistance of cohesive sediments. *J. Geophysical Research*, 67(4):1437–1446, 1962.

[71] P. Mériaux, P. Royet et C. Folton : *Surveillance, entretien et diagnostic des digues de protection contre les inondations : guide pratique à l'usage des propriétaires et des gestionnaires*. Cemagref Editions, 2004.

[72] J. Nečas : Equations aux dérivees partielles. *Presse de l'Universit é de Montréal*, 1966.

[73] S. Osher et R. Fedkiw : *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[74] S. Osher et J.A. Sethian : Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1):12–49, 1988.

[75] S. V. Patankar : *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor & Francis, 1980.

[76] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao et M. Kang : A PDE-based fast local level set method. *J. Comput. Phys.*, 155(2):410–438, 1999.

[77] C.S. Peskin : *Flow patterns around heart valves : a digital computer method for solving the equations of motion*. Thèse de doctorat, Albert Einstein Coll. Med., Univ. Microfilms., 1972.

[78] C. Pierre : *Modélisation et simulation de l'activité électrique du coeur dans le thorax, analyse numérique et méthodes de volumes finis*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2005.

[79] A. Quarteroni et A. Valli : *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[80] L. Ristroph, Matthew N. J. Moore, S. Childress, Michael J. Shelley et J. Zhang : Sculpting of an erodible body by flowing water. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(48):19606–19609, 2012.

[81] L. Ristroph, Matthew N. J. Moore, S. Childress, Michael J. Shelley et J. Zhang : Self-similar evolution of a body eroding in a fluid flow. *Physics of Fluids*, 25(11), 2013.

[82] C. Romé : *Une méthode de raccordement de maillages non-conformes pour la résolution des équations de Navier-Stokes*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2006.

[83] E. Rouy et A. Tourin : A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(3):867–884, 1992.

[84] G. Russo et P. Smereka : A remark on computing distance functions. *J. Comput. Phys.*, 163(1):51–67, 2000.

[85] H. Schlichting : *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 1960.

[86] J. A. Sethian : *Level set methods and fast marching methods*, volume 3 de *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 1999. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.

[87] C.W. Shu et S. Osher : Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77(2):439–471, 1988.

[88] C.W. Shu et S. Osher : Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes. II. *J. Comput. Phys.*, 83(1):32–78, 1989.

[89] G.G.L. Sleijpen et D. R. Fokkema : BiCGstab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 1(Sept.):11–32 (electronic only), 1993.

[90] M. Sussman, P. Smereka et Osher S. : A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114(1):146–159, 1994.

[91] R. Témam : Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires. II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33:377–385, 1969.

[92] R. Témam : *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.

[93] J. F. Thompson, Z. Warsi et C. W. Mastin : *Numerical grid generation : foundations and applications*, volume 45. North-holland Amsterdam, 1985.

[94] H. A. van der Vorst : Bi-CGSTAB : a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13(2):631–644, 1992.

[95] B. Van Leer : Towards the ultimate conservative difference scheme. a second order sequel to the godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 32:101–136, 1979.

[96] I. Vardoulakis, M. Stavropoulou et P. Papanastasiou : Hydro-mechanical aspects of the sand production problem. *Transport in Porous Media*, 22(2):225–244, 1996.

[97] P. Vigneaux : *Level Set methods for free-boundary problems in Microfluidics / Méthodes Level Set pour des problèmes d'interface en microfluidique*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2007.

[98] A. Vogel : Data collection and analysis of dam failures according to the icold definition. *In Proceedings of the 5th International Conference on Reliability, Maintainability & Safety. Dalian, China*, volume 1, pages 414–419, 2001.

[99] A. Vogel : Detail researches for risk evaluation of dam failures caused by overtopping. *In Proceedings of the 3rd International Conference on Dam Safety Evaluation. Panaji(Goa), India*, pages 22–32, 2001.

[100] C.F. Wan et R. Fell : Investigation on internal erosion and piping of soils in embankment by slot erosion test and the hole erosion test. *UNICIV report No. R-412*, 2002.

[101] C.F. Wan et R. Fell : Investigation of rate of erosion of soils in embankment dams. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 30:373–380, 2004.

[102] C.F. Wan et R. Fell : Laboratory tests on the rate of piping erosion of soils in embankment dams. *Geotechnical Testing Journal*, 27(3):01–09, 2004.

[103] S-K. Youn, X.K. Zhang et K-C. Kwon : The least-squares meshfree method for the steady incompressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 206(1):182 – 207, 2005.

[104] S.T. Zalesak : Fully multidimensional flux-corrected transport. *J. Comput. Phys.*, 31:335–362, 1979.

Jalal LAKHLILI

IMATH, Université de Toulon

Modélisation et simulation numériques de l'érosion par DDFV

L'objectif de cette étude est de simuler l'érosion d'un sol cohésif sous l'effet d'un écoulement incompressible. Le modèle élaboré décrit une vitesse d'érosion interfaciale qui dépend de la contrainte de cisaillement de l'écoulement. La modélisation numérique proposée est une approche eulérienne, où une méthode de pénalisation de domaines est utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes autour d'un obstacle. L'interface eau/sol est décrite par une fonction Level Set couplée à une loi d'érosion à seuil.

L'approximation numérique est basée sur un schéma DDFV (Discrete Duality Finite Volume) autorisant des raffinements locaux sur maillages non-conformes et non-structurés. L'approche par pénalisation a mis en évidence une couche limite d'inconsistance à l'interface fluide/solide lors du calcul de la contrainte de cisaillement. Deux approches sont proposées pour estimer précisément la contrainte de ce à frontière libre. La pertinence du modèle à prédire l'érosion interfaciale du sol est confirmée par la présentation de plusieurs résultats de simulation, qui offrent une meilleure évaluation et compréhension des phénomènes d'érosion.

Mot clés : érosion interfaciale, écoulement incompressible, Navier-Stokes, domaines ficifs, Level Set, Discrete Duality Finite Volume, Adaptative Mesh Refinement, algorithme de projection, problème à frontière libre.

Modelling and numerical simulations of erosion by DDFV scheme

This study focuses on the numerical modelling of the interfacial erosion occurring at a cohesive soil undergoing an incompressible flow process. The model assumes that the erosion velocity is driven by a fluid shear stress at the water/soil interface. The numerical modelling is based on the eulerian approach: a penalization procedure is used to compute Navier-Stokes equations around soil obstacle, with a fictitious domain method, in order to avoid body-fitted unstructured meshes. The water/soil interface's evolution is described by a Level Set function coupled to a threshold erosion law.

Because we use adaptive mesh refinement, we develop a Discrete Duality Finite Volume scheme (DDFV), which allows non-conforming and non-structured meshes. The penalization method, used to take into account a free velocity in the soil with non-body-fitted mesh, introduces an inaccurate shear stress at the interface. We propose two approaches to compute accurately the erosion velocity of this free boundary problem. The ability of the model to predict the interfacial erosion of soils is confirmed by presenting several simulations that provide better evaluation and comprehension of erosion phenomena.

Keywords: interfacial erosion, incompressible flow, Navier-Stokes, fictitious domains, Discrete Duality Finite Volume, Adaptative Mesh Refinement, Level Set, projection algorithm, free boundary problem.