



**HAL**  
open science

# Un modèle d'interaction fluide-structure en régime compressible faible Mach

Thomas Altazin

► **To cite this version:**

Thomas Altazin. Un modèle d'interaction fluide-structure en régime compressible faible Mach. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Toulon, 2017. Français. NNT : 2017TOUL0021 . tel-02025511

**HAL Id: tel-02025511**

**<https://theses.hal.science/tel-02025511>**

Submitted on 19 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE Mer et Sciences (ED548)**  
**Institut de Mathématiques de Toulon**

**THÈSE** présentée par :

**Thomas ALTAZIN**

soutenue le : **07 septembre 2017**

pour obtenir le grade de Docteur en Mécanique  
Spécialité : Calcul scientifique

# **Un modèle d'interaction fluide-structure en régime compressible faible Mach**

**THÈSE dirigée par :**

**M. GOLAY Frédéric**  
**M. FRAUNIE Philippe**

Maître de conférences HDR, Université de Toulon  
Professeur, Université de Toulon

**JURY :**

**M. BRANGER Hubert**  
**M. FRAUNIE Philippe**  
**M. GALUSINSKI Cédric**  
**M. GOLAY Frédéric**  
**M. GRILLI Stéphan**  
**M. HELLUY Philippe**

Chercheur CNRS, IRPHE  
Professeur, Université de Toulon  
Professeur, Université de Toulon  
Maître de conférences HDR, Université de Toulon  
Professeur, Université de Rhode Island (USA)  
Professeur, Université de Strasbourg



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Simulation d écoulements air-eau</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.2 Modèle bi-fluide compressible	13
1.2.1 Hypothèses	13
1.2.2 Présentation du modèle	14
1.3 Approximation numérique	18
1.3.1 Maillage et raffinement dynamique	18
1.3.2 Formulation volumes finis	24
1.3.3 Résolution du problème de Riemann	25
1.3.4 Montée en ordre	36
1.3.5 Compression d'interface	38
1.3.6 Parallélisation	42
1.4 Exemples	44
1.4.1 Tube à choc	44
1.4.2 Dambreak	45
1.5 Conclusion	51
<b>2 Un modèle uni é d interaction uide-structure</b>	<b>53</b>
2.1 Introduction	53
2.2 État de l'art des méthodes d'IFS	56
2.2.1 Méthodes de frontières immergées	56
2.2.2 Méthodes de domaines fictifs	63
2.3 Vers un modèle unifié	65
2.3.1 Formulation de l'hypothèse de solide rigide	65
2.3.2 Modèle partitionné	67
2.3.3 Modèle unifié	68
2.4 Extension de la formulation fluide	69
2.4.1 Formulation variationnelle pour Navier-Stokes incompressible	69
2.4.2 Formulation variationnelle IFS	71
2.4.3 Formulation variationnelle IFS pour Euler compressible	76

2.5	Identification du terme anti-rigide . . . . .	79
2.6	Approximation du modèle unifié . . . . .	81
2.6.1	Méthode de projection de type Chorin-Temam . . . . .	81
2.6.2	Erreur de splitting . . . . .	83
2.6.3	Lien avec les méthodes de pénalisation . . . . .	84
2.7	Projection des champs de vitesses rigides . . . . .	85
2.8	Équivalence des modélisations fluides et solides . . . . .	87
2.9	Conclusion . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Méthode numérique pour le modèle uni é pénalisé</b>	<b>89</b>
3.1	Introduction . . . . .	89
3.2	Calcul de la fonction indicatrice . . . . .	89
3.2.1	Algorithme de Feito-Torres (2D) . . . . .	91
3.2.2	Algorithme de Möller-Trumbore (3D) . . . . .	96
3.2.3	Transport de la fonction indicatrice . . . . .	98
3.3	Traitement numérique de l'interface . . . . .	100
3.4	L'interaction fluide-structure dans un code parallèle . . . . .	105
3.5	Confrontations numériques . . . . .	106
3.5.1	Impact du vent sur un immeuble . . . . .	106
3.5.2	Déplacement d'un ressort . . . . .	112
3.5.3	Pionnement d'une structure cylindrique . . . . .	114
3.5.4	Dépendance de la poussée d'Archimède à la vitesse du son . . . . .	117
3.6	Conclusion . . . . .	119
	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>

*La science ne sert guère qu'à nous donner une idée de l'étendue de notre ignorance.*

Félicité de Lamennais



# Introduction

Depuis le début du XXI<sup>e</sup> siècle, une révolution numérique est en marche, accompagnée par un boom des technologies informatiques. La miniaturisation des composants atteint une échelle inégalée permettant au simple utilisateur occasionnel de disposer d'une machine de bureau déployant une importante puissance de calcul dans un espace et un temps réduits. Les ordinateurs grand public ont aujourd'hui la performance d'un superordinateur des années 90 et l'avènement des smartphones depuis les années 2010 permet de disposer dans la paume de la main d'une capacité de calcul révolutionnaire. Ces avancées technologiques ont également largement profité à la communauté scientifique avec le développement des superordinateurs et des clusters de calcul. Le désormais célèbre TOP500 indexant les supercalculateurs les plus performants au monde est sans cesse remodelé à la guise des nouvelles architectures des ordinateurs, repoussant toujours plus loin les frontières du calcul numérique et les limites des pétaFlops disponibles.

Profitant de cette révolution technologique, la science voit émerger de nouvelles disciplines. Si la CFD (*Computational Fluid Dynamic*) voit sa genèse dans les années 70, elle est remise au goût du jour par la capacité calculatoire désormais disponible. Les maillages peuvent être plus conséquents, les méthodes numériques plus avancées, les solveurs plus rigoureux et robustes tandis que le temps de calcul diminue. Les bibliothèques de parallélisation permettent de profiter de la totalité de la puissance des processeurs. Les simulations envisagées prennent des proportions sans précédent, on peut désormais calculer la dynamique des océans à l'échelle planétaire, obtenir une résolution spatiale inégalée pour des problèmes de microfluidique. L'univers semble offrir quelques uns de ses mystères en astrophysique à travers des expériences numériques reproduisant des collisions de galaxies. Bref, les possibilités offertes sont nombreuses. Parmi celles-ci, à la frontière entre numérique, physique et ingénierie, les problématiques de l'interaction entre un fluide et une structure représentent une interrogation de tout premier plan car elles sont au carrefour entre le développement des activités humaines et l'interaction de l'Homme avec son environnement. Impact de vague sur une structure, érosion des sols, système de récupération de l'énergie de houle, interaction des fluides avec les turbines ou cavitation des hélices, les cas réels représentant des problèmes d'interaction fluide-structure sont légion. En particulier, les problématiques de flottaison de structures flottantes suscitent l'attention de la région Provence Alpes Côte d'Azur qui, dans le contexte



du projet CHEF (Comportement Hydrodynamique des Eoliennes Flottantes), finance ce projet de recherche.

Mais que signifie vraiment ce que l'on désigne par *interaction wide-structure*? Derrière ce terme se cache l'idée que le fluide et la structure agissent rétroactivement l'un sur l'autre. Le mouvement du fluide impacte le mouvement du solide, celui-ci qui, à son tour, modifie la structure et la dynamique du fluide l'environnant. Le couplage entre ces deux milieux témoigne de cette synergie qui reste difficile à appréhender. Les méthodes numériques qui approximent ce phénomène se concentrent sur le découplage de l'interaction fluide-solide et cela représente en soi un challenge conséquent dont une résolution est proposée dans ce travail.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux de Sambé [118] portant sur le développement et l'amélioration d'un modèle bi-fluide pour les équations d'Euler, fondés sur les travaux de Golay et Helluy [50]. La modélisation de phénomènes d'interaction fluide-structure et le développement des méthodes numériques associées sont envisagés et constituent la majorité de ce travail. La particularité, qui s'avère être également la principale difficulté, de cette étude est l'approche compressible utilisée pour caractériser les écoulements fluides. Avec une telle hypothèse, la construction d'un modèle d'interaction fluide-structure nécessite des précautions particulières. Ce travail propose une modélisation axée sur la volonté d'articuler le raisonnement autour d'analogies avec les méthodes existantes en incompressible. Ces comparaisons permettent de mettre en exergue la rigueur nécessaire au traitement des conditions à l'interface fluide-solide. Le modèle mathématique qui en découle reste finalement assez simple pour une approche compressible, ce qui fait son originalité, celle-ci étant accentuée par une méthode numérique tout aussi peu complexe autorisant des applications tri-dimensionnelles.

Ce manuscrit se divise en trois chapitres dont le premier rappellera les principales problématiques liées à la modélisation et la simulation d'écoulements bi-fluide air/eau. Ce sera l'occasion de rappeler les principales hypothèses du modèle bi-fluide développé dans [50], de développer les méthodes numériques choisies et de montrer quelques exemples de simulations. Dans un second temps, différentes approches de l'interaction fluide-structure seront introduites avant de se focaliser en particulier sur les méthodes de pénalisation. Fondée sur une approche en domaine fictif, une modélisation de l'interaction fluide-structure à travers l'ajout d'un nouveau terme dans les équations de quantité de mouvement fluide est proposée. La particularité de cette méthode est de pouvoir considérer un modèle unifié de l'interaction fluide-structure à travers un seul jeu d'équations traduisant simultanément le mouvement du fluide et du solide. Enfin, la dernière partie s'attardera à détailler la méthode numérique pour traiter une telle approche monolithique tout en gardant en tête l'esprit de développement du modèle bi-fluide. Des confrontations numériques et des validations expérimentales clôturent l'étude.

# 1 Simulation d'écoulements air-eau

## 1.1 Introduction

La dynamique des fluides numériques (CFD) intervient dans de nouveaux domaines de la physique et de l'ingénierie. Comprendre, modéliser et simuler le comportement d'un fluide constitue la plupart des problématiques rencontrées en océanographie, génie côtier et portuaire, hydrodynamique et ingénierie des structures. La CFD est largement utilisée pour étudier par exemple le comportement des vagues, du déferlement, de l'interaction fluide-structure, de l'aérodynamisme, de l'érosion et dans une plus large catégorie, de tous les phénomènes qui peuvent être modélisés par les équations dérivées de la mécanique des fluides, comme la physique des plasmas (magnétohydrodynamique) ou les processus de changement de phase dans les générateurs de vapeur. Dans la plupart des cas, il est suffisant de s'intéresser à la dynamique d'un seul fluide (souvent de l'air ou de l'eau) pour lequel les équations et les méthodes pour les résoudre sont bien établies.

Lorsque plus d'un fluide est considéré (on se restreindra ici à deux fluides de masse volumique très différente), une difficulté supplémentaire apparaît. Si les deux fluides peuvent effectivement être modélisés par les mêmes équations, ils identifient deux milieux aux propriétés physiques (densité, viscosité...) différentes. La frontière entre ces deux milieux est appelée interface. La définition et le suivi de cette interface au cours du temps constitue une réelle difficulté aussi bien physique que numérique. Si les deux fluides peuvent se mélanger, il peut devenir nécessaire de construire une physique d'interface faisant intervenir des processus thermodynamiques, des changements de phase, des transferts de masse ou des phénomènes de diffusion moléculaire. L'interface correspond alors à une zone de mélange dont l'épaisseur dépend de la vitesse de mélange (on parle ici d'écoulement diphasique). Si les deux fluides sont considérés immiscibles, il faut veiller à ce que l'interface reste bien définie en tout lieu et à tout instant (et on parle ici plutôt d'écoulement bi-fluide). En effet, selon la dynamique du fluide (fort cisaillement, fort gradient, déferlement...), l'interface peut présenter des propriétés géométriques particulières, complexes et délicates. La question de pouvoir gérer des changements topologiques (séparation/isolement d'une partie de l'interface, reconnexion de l'interface...) se pose alors.

Il est important de préciser que dans le cadre de ce travail, il n'est pas envisagé d'établir des modèles de mélange. Par conséquent, théoriquement, la zone de diffusion de l'interface ne correspond en rien à une zone de mélange physique où il est possible d'appliquer des lois de pression thermodynamique mais à une zone de diffusion numérique dans laquelle les variables primitives n'ont a priori aucun sens. En cela, on fera bien la distinction entre les modèles **diphasiques** pour lesquels deux fluides se mélangent (avec éventuellement des changements de phases et des transferts de masse) et les modèles **bi-fluide** où l'immiscibilité des deux fluides est supposée.

Une partie abondante de la littérature traite des méthodes de description d'interface entre deux fluides de masse volumique différente car c'est bien ce qui distingue un écoulement mono-fluide d'un écoulement multi-fluide en plus de l'éventuelle physique propre à chaque milieu. On se restreindra ici à une description bi-fluide air-eau qui correspond à la majorité des cas d'intérêt pour ce travail. Plusieurs familles de méthodes se distinguent selon le type de formalisme retenu (lagrangien ou eulérien) tandis que d'autres s'appuient sur des considérations géométriques. Il en résulte une certaine précision sur la description de l'interface qui permet de séparer les méthodes dite à interface ponctuelle (*sharp-interface method*) des méthodes à interface diffuse (*diffuse-interface method*).

Les méthodes de *front-tracking* vont littéralement "traquer" l'interface. Elles correspondent à un suivi explicite de l'interface, c'est à dire à l'utilisation de marqueurs advectés par le champ de vitesse dont la position indique à chaque instant la localisation de l'interface. La méthode historique est la méthode MAC (*Marker And Cells*) dans [63] qui consiste à faire du suivi de volume (*tracking volume*). On associe à un fluide un certain nombre de marqueurs sans masse qui sont déplacés dans un formalisme lagrangien.

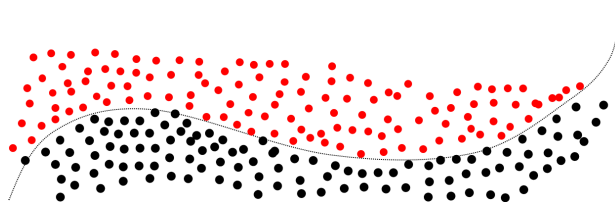


FIGURE 1.1 – *Front-tracking* : les marqueurs sont distribués dans chacun des fluides

La position de l'interface est uniquement déterminée par la présence ou non d'un marqueur d'une cellule à l'autre. La simplicité de cette méthode lagrangienne est séduisante mais présente un inconvénient majeur. En effet, selon le champ de vitesse en question, les marqueurs peuvent être distribués de façon très inégale dans le domaine d'étude avec des accumulations ou des manques de marqueurs dans certaines zones. Pour garder une précision élevée, il faut uniformiser la répartition des marqueurs par des algorithmes de redistribution à exécuter assez fréquemment au cours de la simulation ce qui impacte très négativement le temps de

calcul. Par ailleurs, les propriétés géométriques de l'interface (courbure, normale) ne sont pas triviales à obtenir.

Une variante a été proposée par Daly [26] qui consiste à faire du suivi de surface (*surface tracking*). Cette fois-ci, les marqueurs ne sont plus distribués dans les deux fluides mais directement sur l'interface, interpolés puis reliés par des courbes (2D) ou des surfaces (3D) dont le degré est au choix du numéricien, proposant de ce fait une description très précise de l'interface. Malheureusement, cette variante souffre du même défaut que la méthode par suivi de volume, à savoir une hétérogénéité dans la distribution des marqueurs pour un champ de vitesse très variable en espace. Une extension au cas tridimensionnel n'est pas évident mais a été proposée par Tryggvason et Unverdi [138].

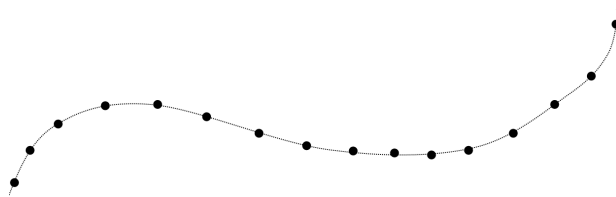


FIGURE 1.2 – *Surface-tracking* : les marqueurs sont distribués sur l'interface

A l'inverse, les méthodes de *front-capturing* sont davantage liées à un formalisme eulérien sur grille fixe. Elle correspondent à un suivi implicite de l'interface, c'est à dire que la position de l'interface n'est pas directement obtenue par la présence d'un marqueur mais dérivée d'un champ scalaire transporté par le champ de vitesse. Les travaux pionniers de Hirt et Nichols [66] ont permis d'établir la méthode *Volume Of Fluid* (VOF), largement reprise, étudiée et améliorée depuis par l'ensemble de la communauté scientifique. L'idée est d'introduire une fonction "couleur"  $\phi$  qui agit comme un indicateur du milieu dans lequel on se situe. Mathématiquement, il s'agit d'une fonction caractéristique qui vaut 1 dans un fluide et 0 dans l'autre et toute valeur intermédiaire entre 0 et 1 indique que l'on se situe à proximité de l'interface. Pour ce travail, nous utiliserons une fonction couleur telle que  $\phi = 0$  indique que la cellule est remplie d'eau et  $\phi = 1$  indique que la cellule est remplie d'air. Transportée par le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ ,  $\phi$  résout l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (1.1)$$

Les cellules possédant une valeur de  $\phi$  comprise entre 0 et 1 sont donc traversées par l'interface. L'équation ci-dessus génère de la diffusion numérique qui se traduit par l'existence d'une épaisseur de l'interface qui peut atteindre plusieurs dizaines de mailles. Il devient alors impossible de distinguer nettement la position de l'interface. Pour résoudre ce problème, on peut résoudre l'équation (1.1) en utilisant des schémas antidiffusifs ou en utilisant des méthodes de compression d'interface. Une alternative consiste à reconstruire géométriquement l'interface. Les différentes variantes des méthodes VOF s'attachent à reconstruire l'interface

à partir des valeurs de fraction volumique transportées, comme la reconstruction constante par morceaux SLIC [97], la reconstruction par polynômes de degré 1 (PLIC) ou encore les méthodes ELVIRA [110].

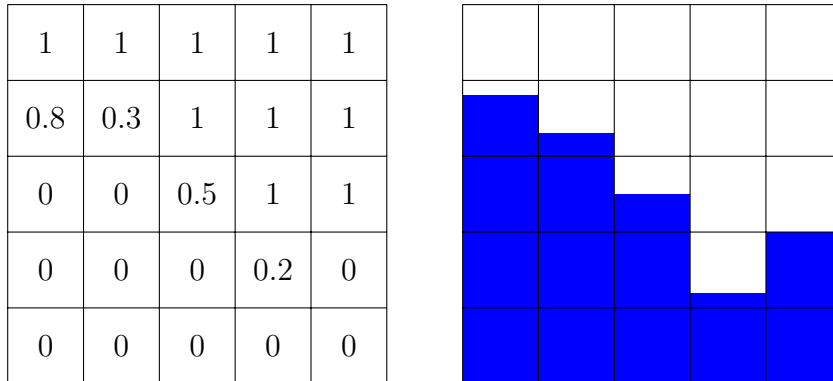


FIGURE 1.3 – Méthode PLIC : reconstruction de l’interface avec des fonctions par morceaux

Les méthodes VOF conservent par définition le volume des phases et assurent donc convenablement la conservation de la masse. Le principal désavantage de ces méthodes est leur incapacité à traiter des déformations complexes de l’interface. Par ailleurs, la reconstruction n’assure pas la continuité de l’interface d’une maille à l’autre et le coût en temps de calcul de la reconstruction en 3D s’avère vite prohibitif. En effet, de nombreuses configurations sont à prendre en compte dans le cas tridimensionnel. On pourra se référer aux travaux de Biausser [12] pour l’implémentation en 3D des méthodes VOF de reconstruction d’interface. Les méthodes de *front-capturing* ainsi que les méthodes VOF reposant sur des méthodes de reconstruction d’interface s’associent aux méthodes à interface ponctuelle dans la mesure où l’interface est spatialement parfaitement définie.

Les méthodes à interface diffuse utilisent également le formalisme de la fonction couleur introduite par les méthode VOF en utilisant le fait que cette fonction se déplace à la vitesse de l’écoulement et résolvent donc numériquement l’équation de transport (1.1). Sans schéma numérique adéquat, la résolution de cette équation entraîne une diffusion numérique importante qui se traduit par une augmentation de l’épaisseur de l’interface. Cette dernière est donc une fonction à minimiser car elle ne correspond pas à une zone de mélange physique. La fraction massique  $\phi$  (dans un domaine fermé, la masse d’eau et d’air est constante) est une quantité qui se conserve et vérifie donc :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = 0$$

Dans le cas incompressible, cette équation se résume à une équation de transport et alors il y a équivalence entre considérer  $\phi$  comme la fraction massique ou la fraction volumique. La conservation de la fraction volumique est très importante car une petite erreur sur cette quantité implique une grosse erreur sur les propriétés physiques, notamment entre deux

fluides à fort ratio de densité. Une méthode a été proposée dans [145] et consiste à ajouter à l'équation de conservation un terme de compressibilité artificielle tel que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot [\mathbf{u}_\Gamma \phi (1 - \phi)] = 0$$

où  $\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  est la vitesse relative entre les deux fluides et  $\bar{\mathbf{u}}$  est la moyenne pondérée des vitesses des deux fluides  $\bar{\mathbf{u}} = \phi \mathbf{u}_1 + (1 - \phi) \mathbf{u}_2$

Conscients de la faiblesse des schémas Upwind (même d'ordre 2) à transporter des champs scalaires, d'autres auteurs ont développé des schémas d'ordres élevés spécialisés dans la discrétisation de l'équation de transport de la fraction volumique. *Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes* (CICSAM [133]) et *High Resolution Interface Capturing scheme* (HRIC [96]) sont des schémas d'ordres élevés utilisés pour minimiser l'influence de la diffusion numérique et garder une interface nette et peu épaisse. Ces schémas se fondent sur la formulation NVD (*Normalised Variable Diagram*) [82] et proposent un calcul du flux à partir d'une valeur à l'interface selon des critères stricts de préservation d'une valeur bornée (critère CBC : *Convective Boundedness Criterion*). Au même titre que les limiteurs de flux, l'idée est de faire en sorte de ne pas introduire de nouveaux extremas et de s'assurer qu'une cellule ne peut recevoir plus que ce que sa voisine lui donne. Une comparaison de ces deux schémas a été effectuée sur un cas de déferlement dans [143]

Une autre grande classe de méthodes largement répandue propose une autre conceptualisation de l'interface. Ce sont les méthodes *level-set* [100]. L'idée est de considérer l'interface séparant les deux fluides comme une courbe de niveau d'une fonction régulière  $\phi$ . La valeur de la *level-set*  $\phi$  correspond à la distance signée à l'interface et change donc de signe suivant le milieu considéré.  $\phi$  résout également l'équation de transport (1.1). Mathématiquement, l'interface  $\Gamma$  séparant deux milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  se traduit comme le zéro d'une fonction régulière  $\phi$ , celle-ci changeant de signe d'un milieu à l'autre. Soit  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  :

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 - \phi_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \phi = \phi_1 - \phi_2 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad \phi(\mathbf{x}) = 0$$

L'interface est donc repérée par l'iso-valeur 0 de la courbe de niveau  $\phi$  dite fonction *level-set*. Les *level-set*, en tant que courbes de niveau, possèdent des propriétés géométriques très intéressantes. Le calcul du gradient de  $\phi$  permet de déterminer des éléments de topologie comme la normale et la courbure :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \\ \kappa &= \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} = \nabla \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

L'énorme avantage de la formulation *level-set* est d'une part sa simplicité, notamment pour son implémentation en 3D qui ne pose aucun problème, d'autre part la facilité qu'elle procure

à obtenir les paramètres géométriques de l'interface. Le désavantage de la méthode est inhérente à sa propriété de distance signée. En effet, lorsque le champ de vitesse est cisailé, perd sa propriété de distance signée car les lignes de niveau ne sont pas advectées à la même vitesse. Un algorithme de redistanciation est donc nécessaire à chaque pas de temps afin que le gradient ne devienne pas singulier. La convection d'une fonction *level-set* est également connue pour entraîner une mauvaise conservation du volume contenu au sein de l'interface. Pour contrer cette mauvaise conservation de la masse, des schémas d'ordres élevés ont été développés. Ce sont les schémas de type ENO [64] et WENO [83]. Enfin, une dernière propriété intéressante des fonctions *level-set* est qu'elles sont davantage sensibles à la précision de la discrétisation en espace que de la discrétisation en temps [99].

Afin de bénéficier des avantages des méthodes VOF et *level-set* sans les inconvénients de chacune d'elles, certains auteurs ont proposé des formulations hybrides combinant les bonnes propriétés de conservation de la masse de VOF avec la capacité de la *level-set* à déterminer correctement la localisation de l'interface et ses paramètres géométriques. On peut citer les méthodes CLSVOF [127] qui résolvent une équation de redistanciation à partir de VOF ou VOSET [126] où la *level-set* est déduite de VOF.

Il existe donc une variété de méthodes numériques permettant d'appréhender au mieux la détection et le suivi de l'interface air-eau. Pour la description mathématique du fluide, plusieurs modèles peuvent être choisis en fonction de leur complexité pour proposer une physique plus ou moins riche. La seconde problématique abordée dans ce chapitre concerne le choix du modèle pour la simulation d'écoulements à surface libre parmi :

- les modèles de Saint-Venant (*shallow-water*) : ce sont des modèles fondés sur l'approximation "eau peu profonde". Des modélisations de solitons sous l'hypothèse *shallow-water* sur fond variable et les méthodes numériques associées ont été proposées par [41], [103] ou [42]. Le modèle 1D s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{gh^2}{2})}{\partial x} = -gha'(x)$$

où  $h$  est la hauteur d'eau,  $u$  est la vitesse horizontale et  $a'(x)$  est la pente du fond. Ce modèle est une simplification des équations de Navier-Stokes en version bidimensionnelle. L'eau est considérée incompressible et la pression hydrostatique et on suppose que l'écoulement est stratifié ce qui permet de moyennner la vitesse suivant la verticale. La faible complexité de ces équations ne leur permet pas de résoudre des phénomènes hydrodynamiques complexes comme le déferlement car alors l'hypothèse de stratification de l'écoulement ne tient plus. Ces méthodes sont en revanche très rapides, ce qui en fait leur principal intérêt.

- les modèles à théorie potentielle : ce sont des modèles fondés sur une représentation incompressible irrotationnelle et non-visqueuse de l'écoulement. Les travaux de Grilli ([56], [53], [57], [54], [55]) montrent une très bonne application de ce type de modèle pour des écoulements potentiels non-linéaires. Par exemple, de très bon accords avec l'expérience ont été obtenus pour des propagations de solitons sur des plans inclinés, y compris pour des simulations 3D. L'approche numérique est fondée sur une méthode d'éléments aux frontières (BEM). L'écoulement irrotationnel non-visqueux est représenté par le potentiel  $\phi(\mathbf{x}, t)$  résolvant l'équation de Laplace :

$$\phi = 0$$

En utilisant la fonction de Green,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = -\frac{1}{2} \log(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|)$ , cette équation se transforme en une équation intégrale aux frontières :

$$(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}_l) = \int \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)}{\partial \mathbf{n}} \, d(\mathbf{x})$$

où  $\mathbf{x} = (x, z)$  et  $\mathbf{x}_l = (x_l, z_l)$  sont des vecteurs positions des points sur la frontière. Sur la surface libre, les conditions cinématiques et dynamiques s'appliquent :

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \nabla\phi$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -gz + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{p_a}{p}$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position sur la surface libre, ainsi qu'une condition de non-pénétration au fond :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

Ces modèles sont performants pour la propagation et la phase de *shoaling* mais trouvent leurs limites dans la phase de déferlement. Comme les modèles de Saint-Venant, ils ne constituent pas des modèles bi-fluide dans la mesure où ils ne considèrent la dynamique que d'un seul fluide (l'eau). Il n'est donc pas étonnant que ces méthodes ne parviennent pas à simuler des phénomènes de déferlement où des changements topologiques sévères, le piégeage de bulles d'air ou la séparation des phases ne sont modélisés par aucun terme dans les équations. C'est pourquoi la juxtaposition d'une méthode BEM avec un modèle de type VOF pour la description du déferlement a été proposé dans [11], [13], [59], [58].

- les modèles du type Navier-Stokes : la façon la plus physique d'appréhender la dynamique d'un écoulement air-eau est de considérer la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible pour chaque fluide. Une fonction indicatrice  $C$  caractérise l'un ou l'autre des deux fluides, par exemple 1 pour l'air et 0 pour l'eau. L'interface entre les deux fluides correspond à une discontinuité de la fonction indicatrice et il est



admis que l'iso-valeur  $C = 0.5$  correspond à la position de l'interface. Les équations résolues par ce type de modèle [85] sont :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot [(\mu + \mu_t)(\nabla \mathbf{u} + \nabla^\top \mathbf{u})] + \mathbf{n} \\ \text{div}(\mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= 0 \end{aligned}$$

avec  $\mu = \mu_1, \rho = \rho_1$  si  $C > 0.5$  et  $\mu = \mu_2, \rho = \rho_2$  si  $C < 0.5$  où  $\mu_1, \rho_1$  et  $\mu_2, \rho_2$  correspondent respectivement à la viscosité cinématique et la masse volumique de chaque fluide.  $\mathbf{n}$  est la normale à l'interface et  $\delta$  une distribution de Dirac sur l'interface,  $\kappa$  la courbure.  $\sigma$  est la tension de surface et  $\mu_t$  la viscosité turbulente. Le détail est explicité dans [85]. Ce modèle full-Navier-Stokes turbulent avec tension de surface est très complet et permet de capturer avec précision de nombreux détails de l'écoulement à l'échelle de maille. Une méthode utilisant un schéma explicite de Lax-Wendroff est utilisée pour résoudre l'équation d'advection de la fonction indicatrice. Celle-ci permet ensuite de déterminer la tension de surface par la méthode CSF proposée par Brackbill [16]. Numériquement, la résolution est assurée par une approche volumes finis sur grille cartésienne uniforme et le découplage vitesse-pression est résolu par une méthode de Lagrangien augmenté. Les termes de l'équation sont discrétisés par des méthodes d'ordre 2 en temps et en espace et le système linéaire résultant de cette discrétisation est résolu par un processus itératif du gradient bi-conjugué stabilisé (algorithme du BiCGSTAB) préconditionné. Tout ceci montre bien que l'on peut modéliser une physique complexe d'un écoulement bi-fluide, moyennant des outils numériques conséquents mais hélas souvent fastidieux à mettre en place et coûteux en temps de calcul.

- les méthodes SPH : référencées comme des méthodes *meshless* (maillage sans topologie), elles sont fondées sur une approximation particulière permettant de définir une fonction et ses dérivées à partir d'un nuage de points. On ne détaillera pas cette approche assez différente des méthodes de type volumes finis classiques, on pourra se référer aux travaux pionniers de Monaghan [94],[93] où ce dernier présente une version de la méthode pour la simulation numérique d'écoulements à surface libre.

Enfin, la dernière problématique concerne la compressibilité de l'écoulement. La majorité des publications concernant des écoulements à surface libre impliquent des modèles incompressibles. Dans la plupart des cas, le fluide intervenant est de l'eau dont une des caractéristiques physiques est d'être incompressible (ou plutôt faiblement compressible), il tombe donc sous le sens d'utiliser des modèles incompressibles dont une des équations caractéristiques est  $\text{div} \mathbf{u} = 0$ . Cette dernière égalité constitue une équation de couplage entre la vitesse et la pression. A l'inverse, dans les modèles compressibles, la loi de pression constitue une loi de

fermeture plus ou moins complexe et est explicitement donnée. Ces modèles servent à traduire la physique de phénomènes fortement compressibles tels que les détonations sous-marines [8], les changements de phase dans les générateurs à vapeur [116] ou la cavitation [6]. A la frontière entre les formulations compressibles et incompressibles, une approche différente est proposée par les modèles compressibles dit *à faible Mach*. Ce sont des modèles faiblement compressible qui ne résolvent pas de découplage vitesse-pression, ce qui constitue leur principal intérêt, mais qui autorisent une (faible) variation de masse volumique et introduisent des effets compressibles.

## 1.2 Modèle bi- uide compressible

Le modèle mathématique qui va être présenté est un modèle faiblement compressible, qui constitue donc une alternative aux modèles incompressibles. Il s'agit d'un modèle simple reposant sur peu d'équations qui, moyennant d'autres expressions de la loi de fermeture, peut s'adapter à diverses physiques.

### 1.2.1 Hypothèses

Le modèle retenu pour cette étude [50] repose sur quatre hypothèses simplificatrices :

- ▶ **Fluide parfait** : les effets de viscosité sont négligés. Il s'agit probablement d'une des hypothèses les plus critiquables car elle s'affranchit d'une physique bien réelle du frottement du fluide, en particulier sur les structures. Le principal intérêt de considérer les équations d'Euler plutôt que les équations de Navier-Stokes est numérique. En effet, la résolution du terme laplacien demande une démarche numérique conséquente coûteuse en temps de calcul, impactée par une condition CFL très contraignante si le terme est explicite, ou une lourde inversion de système si le terme est implicite. Les cas tests ou les confrontations expérimentales qui seront considérés pour tester la validité du modèle devront donc être choisis pour des écoulements dont on est sûr que les effets visqueux seront négligeables. Cela impliquera notamment de devoir choisir les conditions numériques nécessaires pour que le nombre de Reynolds soit suffisamment élevé. Mathématiquement, le terme de viscosité introduit néanmoins de la régularité dans les équations et constitue en cela une importante source d'information pour établir des résultats de convergence qui peut être perdue ici.
- ▶ **Fluide compressible** : bien que les écoulements simulés dans ce travail sont clairement incompressibles, un modèle faiblement compressible est considéré. Par conséquent, la condition de divergence nulle du champ de vitesse spécifique aux écoulements

incompressibles n'est pas résolue. L'intérêt est encore ici numérique. En effet, le découplage-vitesse pression issu de la contrainte d'incompressibilité nécessite la résolution d'une équation de Poisson dont le coût calculatoire est très important. La loi de pression est donc explicite et permet de fermer le système. Elle ne dépend pas de paramètres thermodynamiques compte tenu de l'hypothèse isotherme. Le modèle est qualifié de faiblement compressible dans la mesure où l'on fera en sorte de rester dans une plage de valeur du nombre de Mach à proximité de 0.1, qui est une valeur communément admise pour laquelle l'écoulement peut être considéré comme incompressible. Une valeur trop supérieure n'est pas envisageable car l'écoulement deviendrait trop compressible. A l'inverse, une valeur trop basse dégrade les résultats et nécessiterait le développement d'un solveur bas Mach spécifique, ce qui n'est pas le cas pour l'approximation numérique choisi pour ce modèle. Le calage du nombre de Mach se fait par l'intermédiaire d'une vitesse du son artificielle de laquelle résulte une pression artificielle qui n'est pas la pression physique au sens où on l'entend communément. De cette compressibilité artificielle résulte une densité du fluide considéré variable en espace et dont la valeur autour de sa valeur de référence (la valeur à l'état incompressible) ne doit pas excéder une certaine quantité.

- ▶ **Fluide isotherme** : Les comparaisons avec certaines expériences numériques montrent que l'équation sur l'énergie apporte peu à la précision des résultats [50]. La négliger apporte un gain en temps de calcul. L'équation énergétique ne sera donc pas résolue. Le modèle sera qualifié d'isotherme.
- ▶ **Fluides immiscibles** : les écoulements considérés dans ce travail sont constitués de deux fluides de densité différente. Pour autant, une seule équation régit le mouvement de ces deux fluides. Cette unification bi-fluide sera détaillée dans la section suivante. Une interface sépare les deux fluides et est repérée par une fonction  $\chi$ . La pression et la vitesse à l'interface sont continues.
- ▶ Précisons enfin que la contrainte superficielle, les phénomènes de diffusion moléculaire et les effets de la force Coriolis ne sont pas considérés ici.

## 1.2.2 Présentation du modèle

Le modèle retenu pour décrire un écoulement bi-fluide dans le cadre des hypothèses précisées ci-dessus est un modèle à trois équations, issu de la simplification des modèles à quatre équations en supprimant l'équation sur l'énergie sous l'hypothèse de fluide isotherme. On considère ici le modèle décrit dans [50], pour simuler un écoulement non-visqueux isotherme compressible air/eau. Soit  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  un domaine borné dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $t \in [0, T]$ , et  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$

deux domaines fluides de densité différente. On considère le système hyperbolique suivant sur  $\Omega$ , correspondant aux lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (1.3)$$

où les inconnues sont  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la densité du mélange air/eau et  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$  la vitesse,  $\mathbf{x} \in \Omega$  et  $t > 0$ . Les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  contenant leur fluide respectif sont séparés par une interface  $\Gamma = \Omega_1 \setminus \Omega_2$  à travers laquelle la pression et la vitesse sont continues. L'introduction d'une fonction  $\chi$  dite fonction de phase permet de distinguer les deux fluides. Cette quantité est transportée par le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et vérifie donc :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = 0 \quad (1.4)$$

avec  $\chi$  définie telle que :

$$\chi(t, \mathbf{x}) = 1 \text{ si } \mathbf{x} \text{ est dans l'air à l'instant } t$$

$$\chi(t, \mathbf{x}) = 0 \text{ si } \mathbf{x} \text{ est dans l'eau à l'instant } t$$

L'écoulement étant compressible, une loi de pression explicite est donnée du type :

$$p = p_{ref} + c^2(\rho - \rho_{ref}) \quad (1.5)$$

avec :

$$\rho_{ref} = \chi \rho_a^0 + (1 - \chi) \rho_w^0$$

où  $p_{ref}$  est la pression de référence,  $\rho_w^0$  et  $\rho_a^0$  correspondent respectivement à la densité de l'air et la densité de l'eau prise à la pression de référence et  $c$  la vitesse du son dans le fluide considéré. Le problème est complété des conditions initiales suivantes :

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0$$

$$\chi(\mathbf{x}, 0) = \chi_0$$

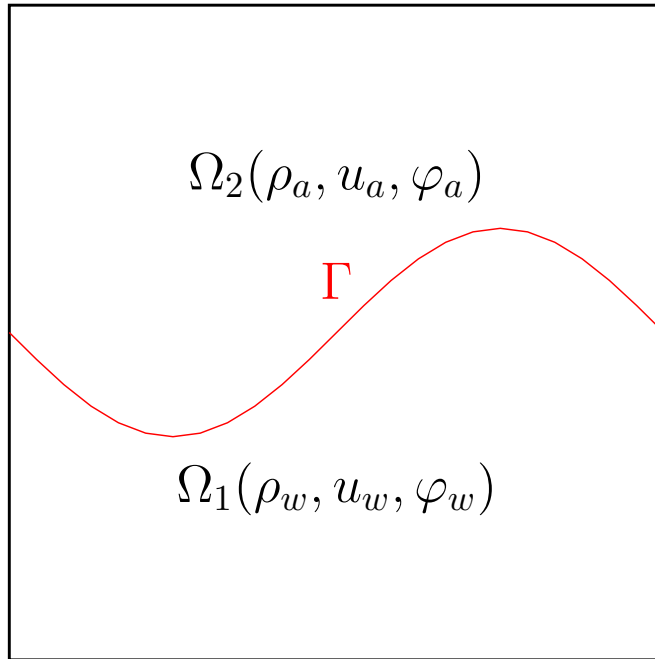


FIGURE 1.4 – Définition des espaces de travail et notations

### Unification bi-fluide

Une façon d'introduire une modélisation bi-fluide unifiée sur  $\Omega$  est de considérer une combinaison linéaire du type :

$$\rho = \alpha \rho_a + (1 - \alpha) \rho_w \quad (1.6)$$

où  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air et  $\rho_w$  la masse volumique de l'eau. Pour comprendre comment la combinaison linéaire (1.6) permet d'écrire le système d'équation (1.2)-(1.3) dans une configuration bi-fluide, on considère l'équation (1.2) dans l'air et dans l'eau :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_a u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_w u)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

L'équation de la conservation de la masse pour la variable  $\rho$  définie par l'équation (1.6) s'écrit donc formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_a + (1 - \alpha) \rho_w) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho_a + (1 - \alpha) \rho_w) u \\ &= \alpha \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_a u)}{\partial x} + (1 - \alpha) \left( \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_w u)}{\partial x} \right) + (\rho_a - \rho_w) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On considère maintenant l'équation (1.3) dans l'air et dans l'eau :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho_a u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_a u^2 + p_{ref} + c_a^2 (\rho_a - \rho_a^0)) = 0 \\ \frac{\partial(\rho_w u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_w u^2 + p_{ref} + c_w^2 (\rho_w - \rho_w^0)) = 0 \end{cases}$$

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement pour la variable  $\rho$  définie par l'équation (1.6) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t}([\rho_a + (1 - \alpha)\rho_w]u) + \frac{\partial}{\partial x}([\rho_a + (1 - \alpha)\rho_w]u^2 \\
 &\quad + p_{ref} + c^2(\rho_a + (1 - \alpha)\rho_w - (\rho_a^0 + (1 - \alpha)\rho_w^0))) \\
 &= \frac{\partial(\rho_a u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a u^2 + p_{ref} + c^2(\rho_a - \rho_a^0)) \\
 &\quad - \frac{\partial(\rho_w u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w u^2 + p_{ref} + c^2(\rho_w - \rho_w^0)) \\
 &\quad + \frac{\partial(\rho_w u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_w u^2 + p_{ref} + c^2(\rho_w - \rho_w^0)) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)(\rho_a - \rho_w)u + \frac{\partial}{\partial x} c^2(\rho_a - \rho_a^0) - c^2(\rho_w - \rho_w^0) \\
 &= 0 \quad \text{si et seulement si } c = c_a = c_w
 \end{aligned}$$

La combinaison linéaire (1.6) permet effectivement de considérer deux fluides de masse volumique différente par une seule variable  $\rho$  respectant les équations classiques de conservation de masse et de quantité de mouvement, sous réserve que les vitesses du son dans les deux fluides soient égales. Cette dernière condition n'a physiquement pas de sens et confirme bien le fait que la loi de pression (1.5) constitue une loi de fermeture purement artificielle. Sous l'hypothèse de fluides immiscibles, les conditions à l'interface sont assurées par les équations de saut qui stipulent que la pression et la vitesse sont continues.

### Loi de fermeture et compressibilité artificielle

Il est sous-entendu que la pression, pour les écoulements compressibles isothermes étudiés ici, décrit une loi du type  $p = p(\rho)$ . On réalise en fait une linéarisation de cette loi de pression autour d'un point de référence  $(\rho_{ref}, p_{ref})$  sous l'hypothèse que les variations de masse volumique sont faibles. L'approximation à l'ordre 1 qui en résulte permet d'écrire :

$$p(\rho) = p_{ref}(\rho_{ref}) + \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho$$

On rappelle que le coefficient de compressibilité adiabatique s'exprime :

$$\chi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$$

et que la vitesse du son s'écrit :

$$c = \frac{1}{\rho \chi}$$

Compte tenu de ces deux expressions et du fait que l'on observe une variation  $d\rho$  autour d'une densité de référence  $\rho_{ref}$ , on peut écrire la relation sur la pression :

$$p(\rho) = p_{ref}(\rho_{ref}) + c^2(\rho - \rho_{ref})$$

où  $c$  est techniquement la vitesse du son dans le fluide de masse volumique  $\rho$ . Une vitesse du son faible autorise une grande variation de masse volumique, parfois au delà ce de qui est souhaitable. Par ailleurs, on rappelle que le nombre de Mach est défini par le ratio :

$$M_a = \frac{\|\mathbf{u}\|}{c}$$

Il est communément admis qu'un écoulement peut être considéré comme quasi-incompressible dès lors que le nombre de Mach reste inférieur à 0.1. Cette limite reste toutefois floue car elle est davantage liée à la volonté d'interdire une variation de masse volumique au delà d'un certain pourcentage choisi subjectivement. Etant donné que la vitesse du son est fixée par la physique, la notion de faible Mach implique des écoulements à basse vitesse par rapport à la vitesse des ondes acoustiques, beaucoup plus élevée. Par exemple, dans l'eau, la vitesse du son est d'environ 1600m/s, le nombre de Mach y est très faible car aucun écoulement ne peut atteindre une vitesse de cet ordre là. Dans ce travail, on estime que les écoulements ne dépasseront pas des vitesses maximales de 2m/s. Les solveurs des modèles compressibles gèrent mal le passage au faible Mach [60], [132]. Pour s'affranchir de ce problème, on choisit alors d'utiliser une compressibilité artificielle en modifiant la vitesse du son (elle ne correspond plus à une vitesse physique mais à une valeur purement numérique) de façon à garder un rapport entre la vitesse de l'écoulement et cette vitesse du son artificielle de l'ordre de 0.1. Dans [50], une vitesse de  $c = 20 \text{ m/s}$  est choisie mais il ne s'agit en aucun cas d'une valeur figée puisque un compromis doit être trouvé entre limite incompressible, variation de masse volumique et efficacité numérique.

## 1.3 Approximation numérique

### 1.3.1 Maillage et raffinement dynamique

Dans le cadre d'écoulements bi-fluide, on utilise un modèle à interface diffuse pour sa capacité à tenir compte des déformations et des reconnections d'interface. Indéniablement, un phénomène de diffusion numérique se manifeste à l'interface dû à la discrétisation de l'équation (1.4). Par ailleurs, une méthode de compression d'interface a été développée (section 1.3.5) afin de réduire l'impact de cette diffusion numérique sur la zone de mélange artificielle. Cette approche doit être menée conjointement avec un maillage adéquatement raffiné. En effet, on sait que pour obtenir une précision élevée, le domaine continu doit être divisé en un nombre assez conséquent de mailles. Un grand nombre de cellules aide également à la convergence des schémas numériques et améliore le réalisme des simulations.

Étant donné un domaine de calcul  $\Omega$ , on le divise en  $k$  volumes de contrôles  $C_k$  appelés *mailles* ( $\Omega = \cup_k C_k$ ), de taille  $|C_k|$ , l'ensemble des mailles définit la discrétisation de  $\Omega$  et constitue un

maillage. Chaque élément (triangle, carré, hexaèdre, pyramide...) est constitué de plusieurs sommets (ou noeuds) connectés entre eux par des faces. Une table de connectivité relie les éléments entre eux en définissant les faces qui composent chaque élément. Dans le cas le plus général, cette table de connectivité est nécessaire pour constituer un maillage non-structuré. Dans le cas d'une grille cartésienne, la table de connectivité est explicite (la connectivité des éléments est déduite des indices de discrétisation) et peut être omise de la description du maillage, on parle alors de maillage structuré. Lorsque tous les éléments sont composés du même nombre de faces, le maillage est dit-conforme. Dans le cas contraire, on parle de maillage non-conforme.

Le choix des éléments constitutifs d'un maillage dépend du problème considéré à résoudre. Les éléments triangles ou tétraédriques sont très souvent utilisés pour leur capacité à décrire des géométries complexes, pour leur précision ainsi que pour les nombreux résultats théoriques dont on dispose pour ce type d'élément. Les éléments carrés ou hexaédriques sont simples à appréhender et s'adapte parfaitement à des configurations cartésiennes et permettent des calculs de gradient efficaces et précis. Dans le cadre de ce travail, une conception simple et rapide du maillage est souhaitée, notamment en vue de l'utilisation d'une procédure de raffinement dynamique et de l'impact des opérations de remaillage. Pour cette raison, on choisit des éléments carrés (en 2D) et des cubes (3D), géométriquement simples à construire.

Une approche naïve consiste à mailler fortement l'intégralité du domaine pour obtenir la meilleure précision possible partout. Si elle séduit par sa simplicité dans la mesure où le maillage reste inchangé au cours du temps (et donc pas de nécessité de remaillage), cette méthode n'est pas envisageable pratiquement car le coût en temps de calcul et en mémoire serait exorbitant. Par ailleurs, selon le type d'écoulement simulé, des phénomènes locaux entrent en jeu et nécessitent d'être décrits avec précision, comme par exemple la zone de déferlement lors de la propagation d'un soliton sur une plage ou l'interface eau-sol pour des études d'érosion. Ces zones doivent donc être particulièrement maillées. En revanche, d'autres zones dans le domaine sont sujettes à peu de variation de masse volumique, vitesse ou de pression et ne nécessitent donc pas autant de précision. L'idée est donc de localiser le raffinement à certains endroits et d'affecter plus de mailles dans des zones critiques où les gradients sont importants et moins de mailles (voire en enlever) dans les zones dans lesquelles les variations sont faibles. Cette gestion des mailles dans le temps s'intitule raffinement dynamique du maillage.

Une autre solution est de choisir l'approche multi-grille. Le principe derrière ces méthodes est d'imbriquer des grilles à résolution élevée dans des grilles plus grossières avec un traitement spécifique de l'emboîtement (*nesting conditions*), c'est à dire des conditions limites d'une grille à l'autre. Cette méthode est très utilisée en océanographie dans les modèles spectraux où les échelles d'espace sont très grandes [14], [129]. Typiquement, un modèle dit de grande emprise à faible résolution couvre une partie importante de l'océan afin d'obtenir la dynamique générale



des courants offshore tandis qu'au sein de cette grille grossière, un modèle à forte résolution avec un nombre de mailles conséquent est imbriqué et centré sur une zone côtière pour gagner en précision sur les courants côtiers. Toute la difficulté repose sur le traitement des conditions limites du modèle de petite emprise qui sont issues d'une simulation en amont depuis le modèle de grande emprise. Le raccordement des deux grilles nécessite des interpolations des conditions aux bords et à ce titre, des limites existent quant au rapport de mailles entre les deux grilles. Plusieurs modèles peuvent donc être imbriqués les uns dans les autres pour obtenir la résolution finale souhaitée sur le plus petit modèle. Cette approche est néanmoins lourde à mettre en place.

Une autre façon d'aborder la construction d'un maillage consiste à utiliser une structure en *bi-tree/quad-tree/oct-tree* (respectivement en 1D, 2D, 3D). Il s'agit d'une conception différente de la structure de données d'un maillage par rapport à l'approche traditionnelle, en utilisant des listes chaînées et des pointeurs. Au lieu de considérer le maillage comme un ensemble fini de cellules indexées par une table de connectivité, chaque cellule est considérée comme une cellule "mère" et peut potentiellement générer des cellules "enfants". L'ensemble de la structure de données constitue un arbre dont le nombre de ramification par niveau dépend de la dimension du problème et du choix des cellules à raffiner :

- en 1D, chaque cellule mère peut générer **deux** cellules enfants (*bi-tree*).

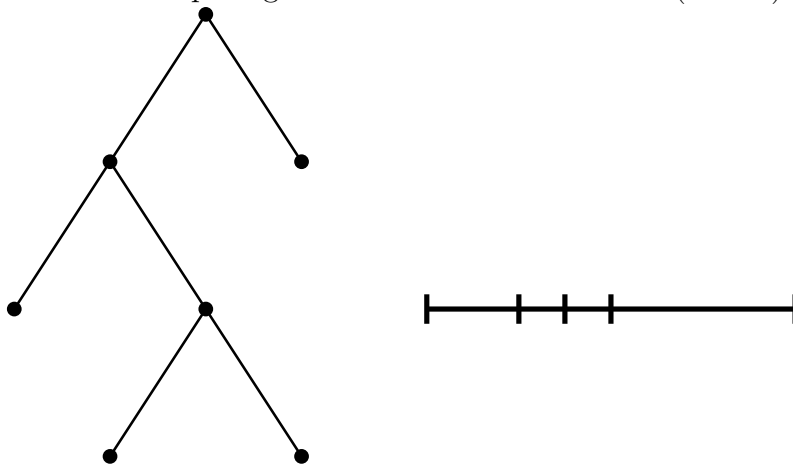


FIGURE 1.5 – Structure *bi-tree* et son maillage correspondant

- en 2D, chaque cellule mère peut générer **quatre** cellules enfants (*quad-tree*).

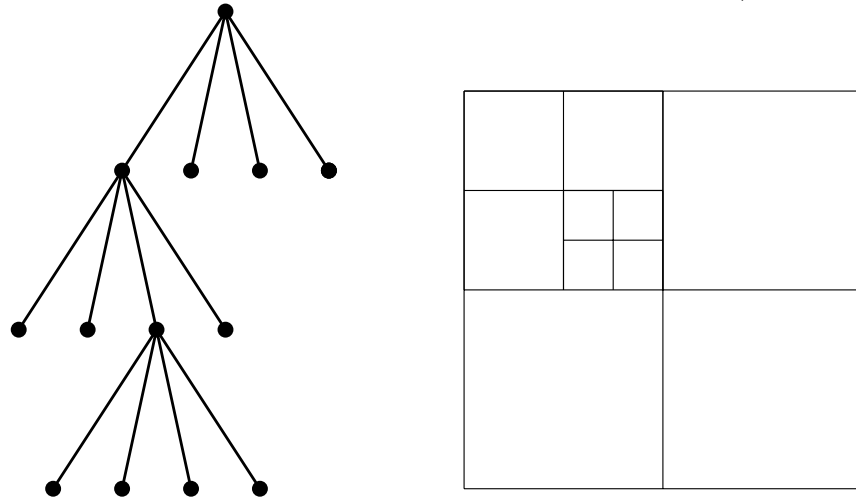


FIGURE 1.6 – Structure *quad-tree* et son maillage correspondant

- en 3D, chaque cellule mère peut générer **huit** cellules enfants (*oc-tree*).

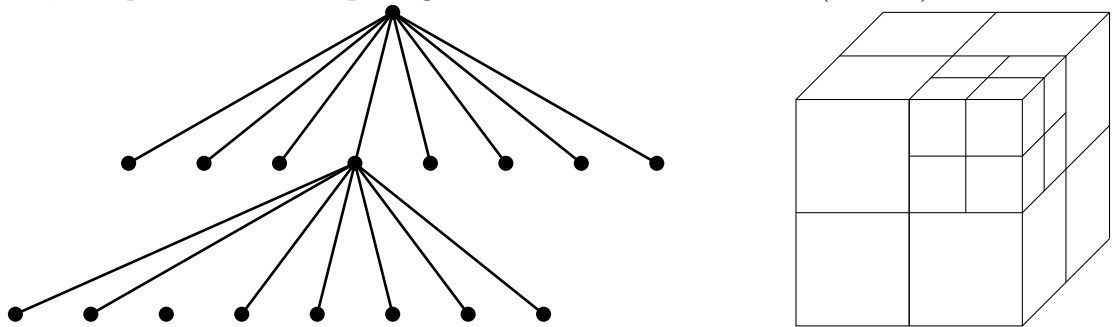


FIGURE 1.7 – Structure *oc-tree* et son maillage correspondant

L'utilisation d'une telle structure de données permet d'utiliser les résultats de la théorie des graphes, en l'occurrence les fonctions de tri et de recherche. Le maillage est donc représenté par un arbre de données et la navigation dans celui-ci est aisée grâce aux pointeurs, aux listes chaînées et aux opérations de *shift* binaire [40]. L'intensité du raffinement est donc lié au nombre de niveaux de l'arbre. Il s'agit d'un raffinement très local, au niveau de la cellule. L'approche *quadtree/octree* pour les équations d'Euler incompressible a été popularisée par Popinet [109]. L'entretien d'une telle structure en mémoire peut s'avérer complexe. En particulier, on sait que l'utilisation et le parcours des listes chaînées peut s'avérer très inefficace en mémoire par rapport à un tableau statique.

Suivant le développement d'une procédure de raffinement par blocs ([33],[51],[2]), le domaine de calcul est divisé en blocs. Chaque bloc est maillé de façon cartésienne en fonction d'un niveau de raffinement. Le nombre de mailles d'un bloc est égale à  $2^{n \times d}$ , où  $n$  est le degré de raffinement et  $d$  la dimension du problème. Le maillage est uniquement constitué de quadrilatères (en 2D) ou d'hexaèdres (en 3D) et est conçu pour s'adapter de manière dynamique. En fonction d'un critère à définir, un bloc est raffiné ou dé-raffiné en fonction de la valeur du critère,

lui-même dépendant des variables primitives de l'écoulement dans le bloc considéré. Cette stratégie d'AMR (*Adaptive Mesh Refinement*) par bloc permet un raffinement à l'échelle locale tout en restant suffisamment globale pour constituer un compromis entre fréquence et temps de remaillage. En cela, cette méthode se distingue des maillages utilisant des structures de données de type quadtree/octree pour lesquelles la fréquence et le temps de remaillage peuvent représenter un temps de calcul non négligeable par rapport au calcul des flux. La structure cartésienne des blocs permet également d'optimiser le post-traitement puisque chaque bloc ne nécessite pas de stockage de table de connectivité (la connexion/relation entre les blocs est ensuite assurée par le logiciel de post-traitement). Pour une approximation correcte des flux, la contrainte 2 :1 impose que la différence de niveau de raffinement entre deux blocs adjacents ne doit pas excéder 1. Davantage de précisions sur le calcul des flux entre des cellules de niveau de raffinement différents sont mentionnées dans [9], [33].

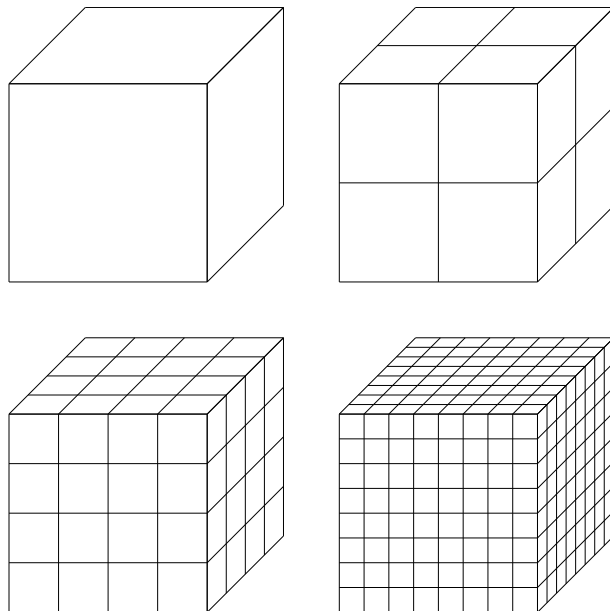


FIGURE 1.8 – Un exemple de bloc dont le niveau de raffinement varie de 0 (1 maille) à 3 (64 mailles)

Une stratégie doit maintenant être mise en place pour adapter automatiquement le maillage tout en offrant un compromis entre temps de calcul (nombre de mailles total) et précision (nombre de mailles dans les zones critiques). Pour cela, il est nécessaire de choisir un critère de raffinement. Dans de nombreux travaux, ce critère est fondé sur le calcul d'un estimateur d'erreur a posteriori [147]. Les travaux de Croisille [25] et Golay dans [49] utilisent comme critère de raffinement la production numérique d'entropie. Ce choix s'appuie sur les travaux de Puppo [112], [111] qui démontrent que la production numérique d'entropie est pertinente, d'une part, pour localiser les ondes de chocs, d'autre part car elle est liée à l'erreur locale commise. Ainsi, le raffinement sur critère entropique permet d'affecter des mailles dans les zones où des chocs ont lieu et dans les zones où l'erreur est plus importante. Cet intérêt double permet de gagner en précision. En revanche, les zones de détente, qui correspondent

également à des discontinuités et qui nécessitent au mettre titre que les chocs un raffinement de maillage, ne sont pas bien repérées par cette méthode. Le lecteur pourra se référer à [107] et [108] concernant le choix d'un critère de raffinement "idéal". Par ailleurs, l'utilisation de la production numérique d'entropie introduit une nouvelle équation qui induit un coût numérique supplémentaire. Pour ces deux raisons, un critère plus simple est envisagé, fondé sur une moyenne arithmétique de  $\rho$  sur un bloc. Comme les zones d'intérêts concernent l'interface air/eau, les blocs doivent être raffinés dans ces zones là, "déaffinés" sinon. Si la moyenne de  $\rho$  sur un bloc de volume  $V$ , définie par la sommation de la masse volumique de chaque cellule contenue dans ce bloc divisée par le nombre de cellules dans ce bloc, est comprise dans un certain intervalle  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ , alors cela signifie que le bloc en question est constitué d'un mélange d'air et d'eau, il est donc à l'interface et nécessite d'être raffiné :

$$\begin{cases} n_{raf} = n_{raf} + 1 & \text{si } \bar{\rho} \in [\rho_{min}, \rho_{max}] \\ n_{raf} = n_{raf} - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\bar{\rho} = \frac{1}{|V|} \int_V \rho \, dV$  et  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$  fixé subjectivement afin d'assurer un compromis entre raffinement suffisant de l'interface et nombre de mailles.

Cet algorithme est effectué en s'assurant toujours à ce que la différence de raffinement entre deux blocs n'excède pas 1.

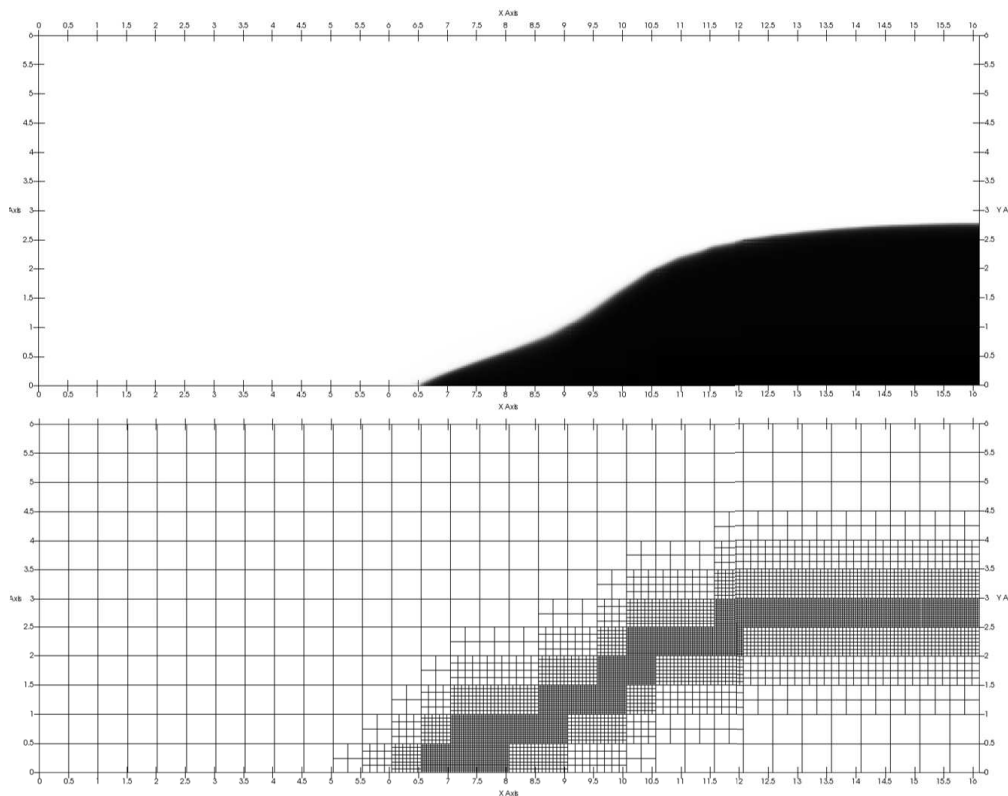


FIGURE 1.9 – Exemple de raffinement dynamique

### 1.3.2 Formulation volumes nis

On définit le vecteur des variables conservatives  $\mathbf{w} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w)$  tel que le système (1.2)-(1.3) peut-être réécrit :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{S} \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{f}(\mathbf{w})$  est la matrice flux :

$$\begin{array}{cccc} \rho & \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u & \rho u^2 + p & \rho uv & \rho uw \\ \rho v & \rho vu & \rho v^2 + p & \rho vw \\ \rho w & \rho wu & \rho wv & \rho w^2 + p \end{array}$$

et  $\mathbf{S}$  le terme source qui s'écrit dans cette étude, selon un axe vertical suivant  $y$  :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \rho \mathbf{g} & , \quad \mathbf{g} = & -g \\ 0 & & 0 \end{array}$$

La valeur de chaque variable est considérée au centre de chaque cellule, si bien que l'on utilise l'approximation dite *cell-centered* telle que pour une cellule donnée  $C_k$ , en notant  $\mathbf{w}_k(t, \mathbf{x})$  :

$$\mathbf{w}_k(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{|C_k|} \int_{C_k} \mathbf{w}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

En intégrant sur chaque cellule et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{C_k} \frac{\partial \mathbf{w}(t)}{\partial t} + \int_a \int_{C_{k/a}} \mathbf{f}(t, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_{k \ a} = 0$$

où l'on note  $\mathbf{n}_{k \ a}$  le vecteur unitaire à normale sortante sur la frontière  $C_{k \ a}$  entre les cellules  $k$  et  $a$ . La seconde intégrale ne peut être calculée explicitement, on introduit une quantité  $F(\mathbf{w}_k(t), \mathbf{w}_a(t), \mathbf{n}_{k \ a})$  appelée flux numérique approximant le flux physique :

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}_k(t), \mathbf{w}_a(t), \mathbf{n}_{k \ a}) = \frac{1}{|C_{k \ a}|} \int_{C_{k/a}} \mathbf{f}(t, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}_{k \ a} ds, \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{F}(\mathbf{w}_k(t), \mathbf{w}_a(t), \mathbf{n}_{k \ a})$  est calculé en fonction de la résolution exacte du problème de Riemann [130] à l'interface  $k \ a$  avec les états  $\mathbf{w}_k(t)$  and  $\mathbf{w}_a(t)$

En combinant les équations précédentes, on obtient le schéma semi-discretisé suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{w}_k(t)}{\partial t} + \frac{1}{|C_k|} \int_a |C_{k \ a}| F(\mathbf{w}_k(t), \mathbf{w}_a(t), \mathbf{n}_{k \ a}) = S_k \quad (1.9)$$

L'équation de transport sur doit être discretisée de façon à assurer les états (u,p) constants à l'interface air/eau. En utilisant l'astuce décrite dans [1], la discrétisation de l'équation de transport revient à l'utilisation d'un schéma upwind non-conservatif :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{dt}{dx} (\min(u_{i+1}^n, 0)(u_{i+1}^n - u_i^n) + \max(u_{i-1}^n, 0)(u_i^n - u_{i-1}^n)) \quad (1.10)$$

Cette discrétisation sous forme non-conservative plutôt que sous forme conservative est importante pour éviter l'apparition d'oscillations de pression à l'interface air/eau.

### 1.3.3 Résolution du problème de Riemann

Le solveur implémenté dans le code numérique repose sur la résolution exacte du problème de Riemann évoqué dans la section précédente. A chaque interface entre deux mailles, un problème de Riemann est résolu pour calculer le flux numérique permettant l'avancement de la solution. On détaille ici la construction de la solution complète du problème de Riemann. Le système 1D considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p(\rho, ))}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho \text{ )}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Sous forme matricielle, ce système conservatif s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{V})}{\partial x} = 0$$

où  $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u \end{pmatrix}$  avec  $p(\rho, ) = p_{ref} + c^2(\rho - [\rho_A + (1 - )\rho_W])$

Considérons le problème de Riemann (1.11) avec la donnée initiale suivante :

$$\mathbf{V}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{V}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{V}_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

#### Hyperbolicité

On note  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$  le vecteur des variables non-conservatives. Le système (1.11) se réécrit sous sa forme non-conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$$

avec :

$$\mathbf{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & \frac{c^2}{\rho}(\rho_W - \rho_A) \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de montrer que les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\lambda_1(\mathbf{W}) = u - c, \quad \lambda_2(\mathbf{W}) = u, \quad \lambda_3(\mathbf{W}) = u + c,$$

Ces trois valeurs propres sont distinctes en toutes circonstances, le système est donc strictement hyperbolique.

On en déduit les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Notons  $\mathbf{K}_i$  le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Alors :

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{c} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \rho_A - \rho_W \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{c} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Structure de la solution

On cherche une solution autosimilaire  $V(x, t) = V(\xi)$  pour laquelle la solution du problème de Riemann se traduit par la composition de plusieurs types d'ondes. Pour un système strictement hyperbolique, les valeurs propres distinctes génèrent des champs d'ondes distincts. Ici, on compte trois valeurs propres générant trois champs d'ondes et la solution exacte du problème de Riemann se construit comme une combinaison de ces trois champs, séparés par quatre états constants. Dans la suite, on utilisera l'indice  $i$  pour faire référence au  $i$ -ème champ. La 2-onde est générée par l'équation de transport sur  $x = ut$  et représente l'interface.

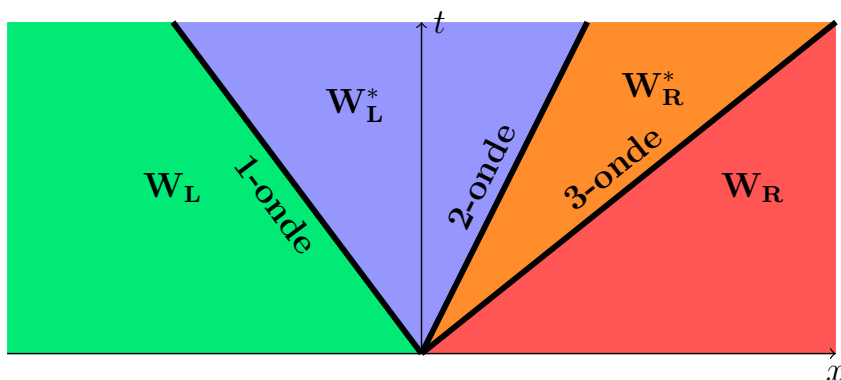


FIGURE 1.10 – Structure de la solution du problème de Riemann

### Invariants de Riemann

La nature des champs caractéristiques se détermine par la relation  $\nabla_{\mathbf{W}}(\cdot) \cdot \mathbf{K}_i(\mathbf{W})$ . En l'occurrence, on peut vérifier que  $\nabla_{\mathbf{W}}(\cdot) \cdot \mathbf{K}_1(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{W}}(\cdot) \cdot \mathbf{K}_3(\mathbf{W}) = 1$  ce qui indique que le 1-champ et le 3-champ sont vraiment non-linéaires. Pour ces champs là, on est en présence d'un choc ou d'une détente. En revanche, pour le 2-champ,  $\nabla_{\mathbf{W}}(\cdot) \cdot \mathbf{K}_2(\mathbf{W}) = 0$  ce qui indique qu'on est en présence d'un champ linéairement dégénéré, c'est à dire une discontinuité de contact qui correspond à l'interface où la pression et la vitesse sont continues. Pour le 1-champ et le 3-champ, les invariants de Riemann sont nécessaires pour calculer la solution dans les détentes, un choix possible de tels invariants est :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= u + c \ln(\rho) \\ \mathbf{I}_3 &= u - c \ln(\rho) \end{aligned}$$

### Chocs

Par ailleurs, pour le calcul des chocs, il est commode de considérer pour un choc de vitesse  $v$  le changement de variable suivant pour se ramener à une vitesse de discontinuité nulle :  $v = u - v$ . Les conditions de saut donnée par les relations de Rankine-Hugoniot donnent alors :

$$\begin{cases} [\rho v] = 0 \\ [\rho v^2 + p] = 0 \\ [\rho - v] = 0 \end{cases}$$

Pour un état gauche et un état droit dénotés respectivement L et R, on introduit alors la quantité M telle que  $M = \rho_L v_L = \rho_R v_R$ . Le système précédent se réécrit alors :

$$\begin{cases} M = \rho_L v_L = \rho_R v_R \\ M[v] = -[p] \\ M[\rho - v] = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Remarquons que  $M = 0$  implique un 1-choc ou un 3-choc, tandis que  $M \neq 0$  indique une discontinuité de contact pour le 2-champ.

### Construction de la solution

- Le 1-champ est constitué soit d'une onde de choc soit d'une onde de détente et relie les états  $\mathbf{W}_L$  et  $\mathbf{W}_L^*$  (voir 1.10).

**1-choc** : Etant donné un état gauche  $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, p_L)^\top$ , on cherche à déterminer l'état gauche intermédiaire  $\mathbf{W}_L^* = (\rho_L^*, u_L^*, p_L^*)^\top$  relié par un choc impliquant, par définition de la condition de Lax  $\lambda_1(\mathbf{W}_L) > \lambda_1(\mathbf{W}_L^*)$  :

$$\lambda_1(\mathbf{W}_L) > \lambda_1(\mathbf{W}_L^*)$$



d'où l'on déduit  $[v] = v_L^* - v_L < 0$ . Par ailleurs, une conséquence de  $\mathbf{1}(\mathbf{W}_L) < \mathbf{2}(\mathbf{W}_L)$  permet d'écrire :

$$\mathbf{1} < \mathbf{2}(\mathbf{W}_L) = \mathbf{W}_L$$

d'où l'on détermine que  $M > 0$  et donc par les relations (1.12) que  $[p] > 0$ . Puisque  $\rho$  est croissante,  $[\rho] > 0$  c'est à dire  $\rho_L^* > \rho_L$ . Enfin, comme  $M > 0$ ,  $[\phi] = 0$ .

L'application des conditions de Rankine-Hugoniot :

$$\mathbf{1} = \frac{[\rho u]}{[\rho]} = \frac{[\rho u^2 + p]}{[\rho u]}$$

permet d'extraire l'égalité suivante :

$$[u]^2 = \frac{[\rho][p]}{\rho_L \rho_L^*}$$

or comme  $[u] < 0$ ,  $-[u] = \frac{[\rho][p]}{\rho_L \rho_L^*}$  et on a finalement après quelques développements supplémentaires :

$$u_L^* = u_L + c \frac{\rho_L - \rho_L^*}{\rho_L \rho_L^*} = u_L^*(\rho_L^*)$$

**1-détente** : Étant donné un état gauche  $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, p_L)^\top$ , on cherche à déterminer l'état gauche intermédiaire  $\mathbf{W}_L^* = (\rho_L^*, u_L^*, p_L^*)^\top$  relié par une détente impliquant par définition :

$$\mathbf{1}(\mathbf{W}_L) < \mathbf{1}(\mathbf{W}_L^*)$$

ce qui permet déjà de déterminer que  $u_L < u_L^*$

Pour connaître les propriétés de l'état inconnu en présence d'une détente, on utilise le fait que les invariants de Riemann sont constants le long des caractéristiques. En l'occurrence, on peut écrire :

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{W}_L) = \mathbf{I}_1(\mathbf{W}_L^*)$$

qui donne après détail des calculs :

$$u_L^* = u_L + c \ln \frac{\rho_L}{\rho_L^*} = u_L^*(\rho_L^*)$$

Cela permet également de déterminer que  $\rho_L > \rho_L^*$ .

Pour déterminer la solution à l'intérieur du code de détente, on utilise encore le fait que les invariants de Riemann sont constants le long des caractéristiques et ont même origine (tous les pieds de caractéristiques sont identiques). Il vient pour  $x \in [\mathbf{1}(\mathbf{W}_L)t, \mathbf{1}(\mathbf{W}_L^*)t]$  :

$$u(x, t) + c \ln(\rho(x, t)) = u_L + c \ln(\rho_L)$$

Par ailleurs, les caractéristiques se déplacent à la vitesse  $c_1(\mathbf{W}_L)$  et vérifient l'équation  $\frac{dx}{dt} = c_1(\mathbf{W}_L) = u(x, t) - c$ , c'est à dire  $u(x, t) = \frac{x}{t} + c$ . On en déduit avec l'équation précédente que :

$$\rho = \rho_L \exp\left(\frac{u_L - \frac{x}{t} - c}{c}\right)$$

En conclusion, les états  $\mathbf{W}_L$  et  $\mathbf{W}_L^*$  peuvent être connectés via l'équation suivante :

$$u_L^*(\rho_L^*) = u_L + \int_{\rho_L^*}^{\rho_L} \frac{c}{\rho} d\rho = u_L + \begin{cases} c \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho_L^*}\right) & \text{si } \rho_L > \rho_L^* \\ c \frac{\rho_L - \rho_L^*}{\rho_L \rho_L^*} & \text{si } \rho_L < \rho_L^* \end{cases}$$

$$\rho_L^* = \rho_L$$

- Le 3-champ est constitué soit d'une onde de choc soit d'une onde de détente et relie les états  $\mathbf{W}_R$  et  $\mathbf{W}_R^*$ .

**3-choc** : Étant donné un état droit  $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, p_R)^\top$ , on cherche à déterminer l'état droit intermédiaire  $\mathbf{W}_R^* = (\rho_R^*, u_R^*, p_R^*)^\top$  relié par un choc impliquant, par définition de la condition de Lax  $c_3(\mathbf{W}_R^*) < c_3(\mathbf{W}_R)$  :

$$c_3(\mathbf{W}_R^*) > c_3(\mathbf{W}_R)$$

d'où l'on déduit  $[v] = v_R - v_R^* < 0$ . Par ailleurs, une conséquence de  $c_3(\mathbf{W}_R^*) < c_3(\mathbf{W}_R)$  permet d'écrire :

$$c_3 > c_2(\mathbf{W}_R) = c_2(\mathbf{W}_R)$$

d'où l'on détermine que  $M < 0$  et donc par les relations (1.12) que  $[p] < 0$ . Puisque  $\rho$  est croissante,  $[\rho] < 0$  c'est à dire  $\rho_R < \rho_R^*$ . Enfin, comme  $M < 0$ ,  $[\phi] = 0$ .

L'application des conditions de Rankine-Hugoniot :

$$c_3 = \frac{[\rho u]}{[\rho]} = \frac{[\rho u^2 + p]}{[\rho u]}$$

permet d'extraire l'égalité suivante :

$$[u]^2 = \frac{[\rho][p]}{\rho_L \rho_L^*}$$

or comme  $[u] < 0$ ,  $-[u] = \frac{[\rho][p]}{\rho_R \rho_R^*}$  et on a finalement après quelques développements supplémentaires :

$$u_R^* = u_R - c \frac{\rho_R - \rho_R^*}{\rho_R \rho_R^*} = u_R^*(\rho_R^*)$$

**3-détente** : Étant donné un état gauche  $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, p_R)^\top$ , on cherche à déterminer l'état droit intermédiaire  $\mathbf{W}_R^* = (\rho_R^*, u_R^*, p_R^*)^\top$  relié par une détente impliquant par définition :

$$u_3(\mathbf{W}_R^*) < u_3(\mathbf{W}_R)$$

ce qui permet déjà de déterminer que  $u_R^* < u_R$ .

Pour connaître les propriétés de l'état inconnu en présence d'une détente, on utilise le fait que les invariants de Riemann sont constants le long des caractéristiques. En l'occurrence, on peut écrire :

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{W}_R^*) = \mathbf{I}_1(\mathbf{W}_R)$$

qui donne après détail des calculs :

$$u_R^* = u_R - c \ln \frac{\rho_R}{\rho_R^*} = u_R^*(\rho_R^*)$$

Cela permet également de déterminer que  $\rho_R^* < \rho_R$ .

Pour déterminer la solution à l'intérieur du code de détente, on utilise encore le fait que les invariants de Riemann sont constants le long des caractéristiques et ont même origine (tous les pieds de caractéristiques sont identiques). Il vient pour  $x \in [u_3(\mathbf{W}_R^*)t, u_3(\mathbf{W}_R)t]$  :

$$u(x, t) - c \ln(\rho(x, t)) = u_R - c \ln(\rho_R)$$

Par ailleurs, les caractéristiques se déplacent à la vitesse  $u_3(\mathbf{W}_R)$  et vérifient l'équation  $\frac{dx}{dt} = u_3(\mathbf{W}_R) = u(x, t) + c$ , c'est à dire  $u(x, t) = \frac{x}{t} - c$ . On en déduit avec l'équation précédente que :

$$\rho = \rho_R \exp\left(\frac{u_R - \frac{x}{t} + c}{c}\right)$$

En conclusion, les états  $\mathbf{W}_R$  et  $\mathbf{W}_R^*$  peuvent être connectés via l'équation suivante :

$$u_R^*(\rho_R^*) = u_R - c \ln\left(\frac{\rho_R^*}{\rho_R}\right) \quad \text{si } \rho_R > \rho_R^*$$

$$u_R^*(\rho_R^*) = u_R - c \frac{\rho_R - \rho_R^*}{\rho_R \rho_R^*} \quad \text{si } \rho_R < \rho_R^*$$

$$p_R^* = p_R$$

- Le 2-champ relie le 1-champ et le 3-champ. Il s'agit d'un champ linéairement dégénéré, représentant donc une discontinuité de contact. Pour une telle onde,  $M=0$ , ce qui signifie que  $[p] = [u] = 0$  et  $[\rho] = 0, [\ ] = 0$ . Autrement dit, **la vitesse et la pression sont continues à travers une discontinuité de contact**, tandis que la masse volumique et la fonction de phase admettent un saut. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} u_L^* = u_R^* \\ p_L^* = p_R^* \\ \rho_R^* = \rho_R^*(\rho_L^*) \quad (\text{car } p = p(\rho)) \end{cases}$$

### Solution complète

La solution complète se construit comme une combinaison d'ondes de détente, de choc et de discontinuités de contact. En l'occurrence, quatre combinaisons sont possibles entre le 1-champ et le 3-champ puisqu'il existe toujours un unique 2-champ qui est une discontinuité de contact qui vient séparer ces deux champs : **choc - choc**, **choc - détente**, **détente - choc** et **détente - détente**.

En l'occurrence, c'est la continuité des vitesses à l'interface  $u_L^* - u_R^* = 0$  qui implique l'égalité suivante :

$$u_L - (\rho_L^*, \rho_L) - u_R - (\rho_R^*(\rho_L^*), \rho_R) = 0 \quad (1.13)$$

Il s'agit de trouver le zéro d'une équation non linéaire en  $\rho_L^*$ . Une méthode itérative de type Newton-Raphson permet de trouver la racine de cette équation. Le solveur de Riemann se divise comme suit :

- ▶ Trouver la solution  $\rho_L^*$  à partir de la résolution numérique de l'équation (1.13)
- ▶ Déterminer  $\rho_R^* = \rho_R^*(\rho_L^*)$
- ▶ Déterminer  $u_L^*(\rho_L^*) = u_R^*(\rho_R^*)$
- ▶ Déterminer la solution complète en fonction de la nature du 1-champ et du 3-champ. La vitesse du 1-choc,  $c_1$  à partir des conditions de Rankine-Hugoniot est :

$$c_1 = \frac{\rho_L^* u_L^* - \rho_L u_L}{\rho_L^* - \rho_L} = u_L - c_1 \frac{\rho_L^*}{\rho_L}$$

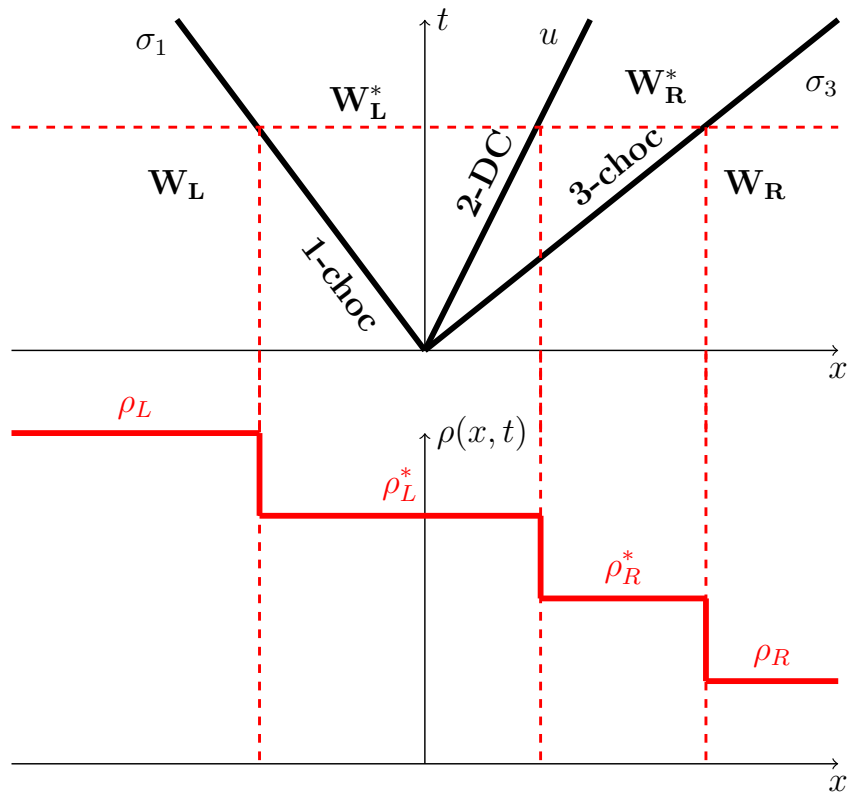
Et pour le 3-choc :

$$c_3 = \frac{\rho_R u_R - \rho_R^* u_R^*}{\rho_R - \rho_R^*} = u_R + c_3 \frac{\rho_R^*}{\rho_R}$$

et on note  $c = \frac{x}{t}$ .

Les quatre cas possibles sont :

choc - choc



Masse volumique

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L & \text{si } x < u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} \\ \rho_L^* & \text{si } u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} < x < u \\ \rho_R^* & \text{si } u < x < u_R + c \frac{\overline{\rho_R^*}}{\rho_R} \\ \rho_R & \text{si } x > u_R + c \frac{\overline{\rho_R^*}}{\rho_R} \end{cases}$$

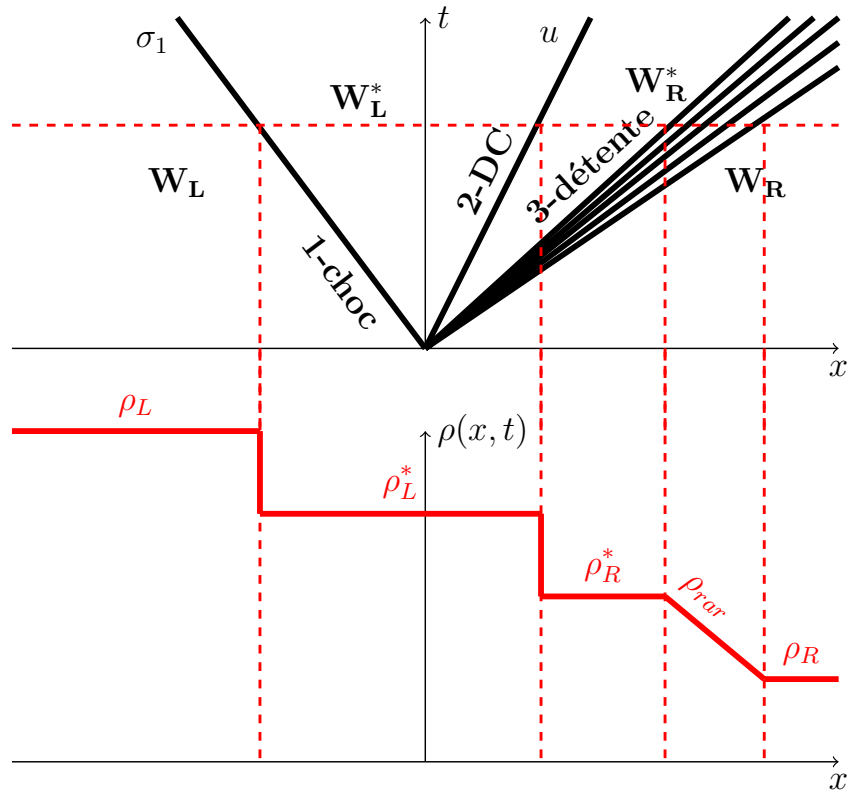
Vitesse

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} \\ c \frac{\rho_L - \rho_L^*}{\rho_L \rho_L^*} & \text{si } u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} < x < u \\ c \frac{\rho_R - \rho_R^*}{\rho_R \rho_R^*} & \text{si } u < x < u_R + c \frac{\overline{\rho_R^*}}{\rho_R} \\ u_R & \text{si } x > u_R + c \frac{\overline{\rho_R^*}}{\rho_R} \end{cases}$$

Fonction de phase

$$(x, t) = \begin{cases} L & \text{si } x < u \\ R & \text{si } x > u \end{cases}$$

choc - détente



Masse volumique

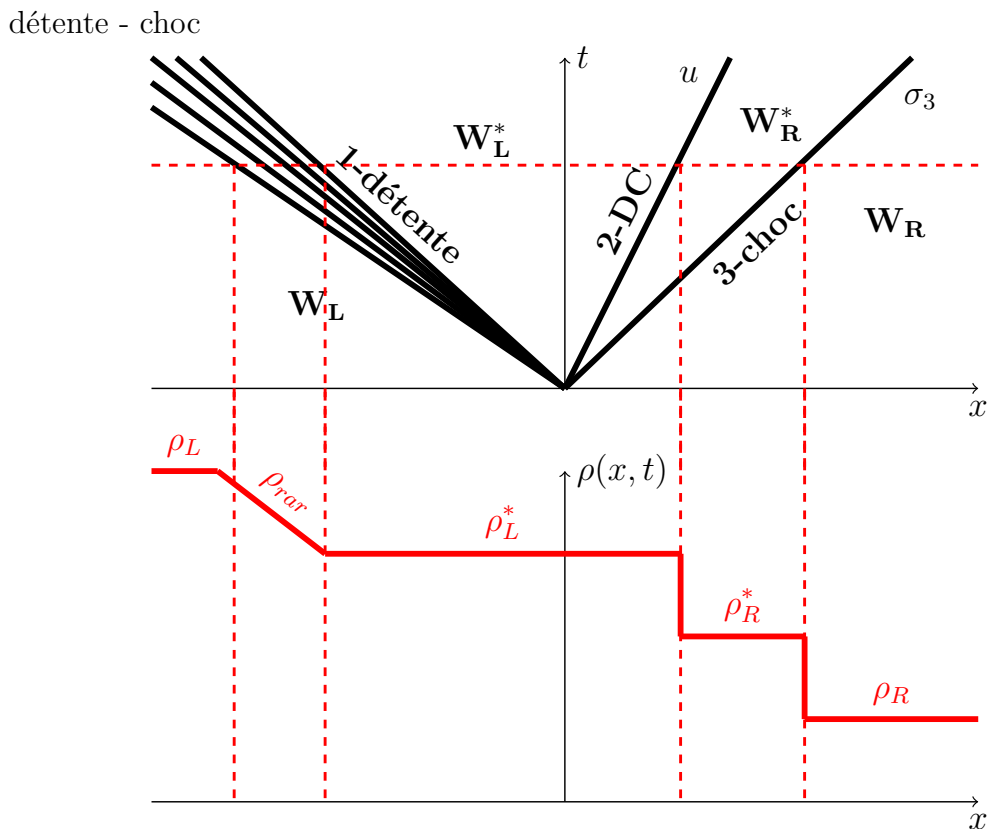
$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L & \text{si } x < u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} \\ \rho_L^* & \text{si } u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} < x < u \\ \rho_R^* & \text{si } u < x < u_R^* + c \\ \rho_R \exp\left(\frac{u_R - x + c}{c}\right) & \text{si } u_R^* + c < x < u_R + c \\ \rho_R & \text{si } x > u_R + c \end{cases}$$

Vitesse

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} \\ c \frac{\rho_L - \rho_L^*}{\rho_L \rho_L^*} & \text{si } u_L - c \frac{\overline{\rho_L^*}}{\rho_L} < x < u \\ c \ln\left(\frac{\rho_R^*}{\rho_R}\right) & \text{si } u < x < u_R^* + c \\ -c & \text{si } u_R^* + c < x < u_R + c \\ u_R & \text{si } x > u_R + c \end{cases}$$

Fonction de phase

$$(x, t) = \begin{cases} L & \text{si } x < u \\ R & \text{si } x > u \end{cases}$$



Masse volumique

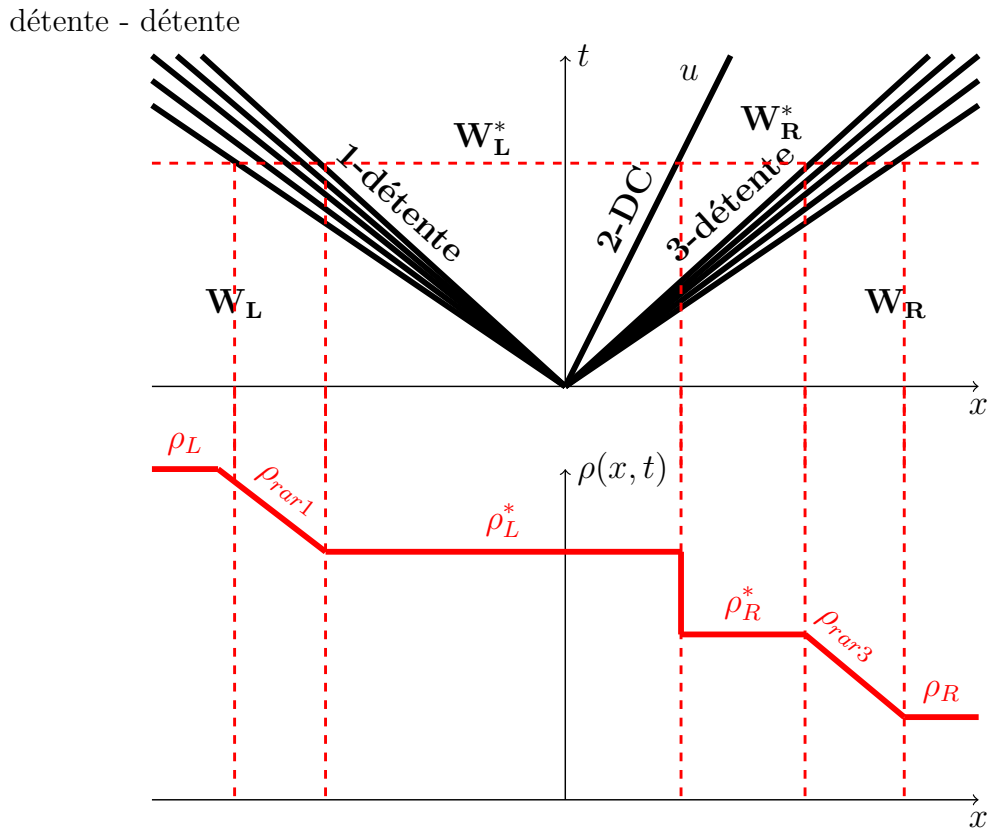
$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L & \text{si } x < u_L - c \\ \rho_L \exp\left(\frac{u_L - x - c}{c}\right) & \text{si } u_L - c < x < u_L^* - c \\ \rho_L^* & \text{si } u_L^* - c < x < u \\ \rho_R^* & \text{si } u < x < u_R + c \\ \rho_R & \text{si } x > u_R + c \end{cases}$$

Vitesse

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < u_L - c \\ u_L + c & \text{si } u_L - c < x < u_L^* - c \\ c \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho_L^*}\right) & \text{si } u_L^* - c < x < u \\ c \frac{\rho_R - \rho_R^*}{\rho_R \rho_R^*} & \text{si } u < x < u_R + c \\ u_R & \text{si } x > u_R + c \end{cases}$$

Fonction de phase

$$(x, t) = \begin{cases} L & \text{si } x < u \\ R & \text{si } x > u \end{cases}$$



Masse volumique

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L & \text{si } x < u_L - c \\ \rho_L \exp\left(\frac{u_L - c - u}{c}\right) & \text{si } u_L - c < x < u_L^* - c \\ \rho_L^* & \text{si } u_L^* - c < x < u \\ \rho_R^* & \text{si } u < x < u_R^* + c \\ \rho_R \exp\left(\frac{u_R - c - u}{c}\right) & \text{si } u_R^* + c < x < u_R + c \\ \rho_R & \text{si } x > u_R + c \end{cases}$$

Vitesse

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < u_L - c \\ u_L + c & \text{si } u_L - c < x < u_L^* - c \\ c \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho_L^*}\right) & \text{si } u_L^* - c < x < u \\ c \ln\left(\frac{\rho_R^*}{\rho_R}\right) & \text{si } u < x < u_R^* + c \\ u_R - c & \text{si } u_R^* + c < x < u_R + c \\ u_R & \text{si } x > u_R + c \end{cases}$$

Fonction de phase

$$(x, t) = \begin{cases} L & \text{si } x < u \\ R & \text{si } x > u \end{cases}$$



### 1.3.4 Montée en ordre

La discrétisation en temps est envisagée en explicite. Dans sa forme la plus sommaire, le schéma de discrétisation (1.9) utilisé pour résoudre le système d'équations (1.2)-(1.3) souffre d'un manque de précision. En l'occurrence, on peut même montrer que le schéma de Godunov échoue dans certains cas particuliers [7]. Une première amélioration consiste à proposer une discrétisation à l'ordre 2 en temps en ayant recours à un schéma à pas intermédiaire comme le schéma de Runge-Kutta en lieu et place d'un schéma Euler d'ordre 1 classique. Une pondération de la dérivée calculée au temps  $n$  et au temps  $n+1/2$  est utilisée afin d'approcher plus précisément la solution :

$$\mathbf{w}_k^{n+1/2} = \mathbf{w}_k^n - \frac{dt}{2C_k} |C_k| F(\mathbf{w}_k^n, \mathbf{w}_a^n, \mathbf{n}_{k,a}) + \frac{1}{2} \mathbf{S}_k^n dt$$

$$\mathbf{w}_k^{n+1} = \mathbf{w}_k^n - \frac{dt}{C_k} |C_k| F(\mathbf{w}_k^{n+1/2}, \mathbf{w}_a^{n+1/2}, \mathbf{n}_{k,a}) + \mathbf{S}_k^n dt$$

Une seconde amélioration consiste à proposer une reconstruction linéaire de la solution à l'interface plutôt qu'une solution constante par morceaux afin de calculer des flux plus précis. La méthode MUSCL [139] prolonge la solution constante au centre de la cellule par une fonction linéaire à l'interface en utilisant le gradient stocké au centre de la cellule. Le calcul des gradients se fait en utilisant la formule de Green pour des maillages non structurés :

$$\nabla \mathbf{w}_k = \frac{1}{|C_k|} \int_{faces} \mathbf{w}_f \mathbf{n}_{k,a} ds$$

où  $\mathbf{w}_f$  est la valeur du vecteur d'état à l'interface entre la cellule  $k$  et la cellule  $a$ . Plusieurs méthodes existent pour reconstruire la valeur à l'interface parmi lesquelles on peut distinguer :

- ▶ *Cell-based methods* : la valeur à l'interface est déduite de la valeur au centre des cellules partageant cette interface.
- ▶ *Node-based methods* : la valeur à l'interface est déduite de la valeur aux nœuds constituant l'interface, la valeur en ces nœuds étant elle-même issue d'une pondération entre les valeurs aux centres des cellules partageant ce nœud ([67]).

Les valeurs prises en compte (cellules ou nœuds) servent ensuite à interpoler ou à pondérer la valeur à l'interface. Bien que les *node-based methods* soient plus précises, le choix d'une *cell-based method* s'adapte immédiatement à une formulation volumes finis. Dans ce modèle numérique, le calcul de la valeur à l'interface résulte d'une moyenne arithmétique entre les valeurs au centre des cellules partageant cette interface :

$$\mathbf{w}_f = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_a)$$

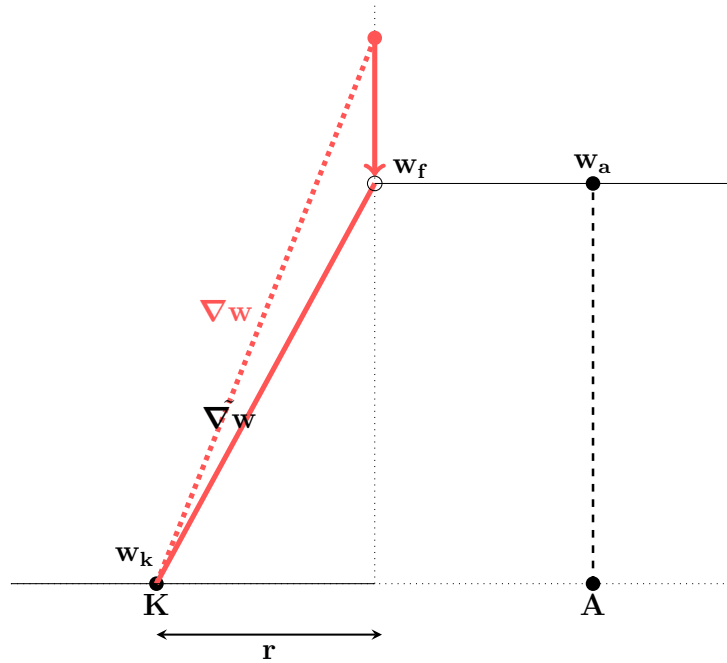


FIGURE 1.11 – Effet du limiteur de pente

Cette formulation extrêmement simple et rapide à mettre en œuvre n'est cependant pas très précise. Toute autre combinaison linéaire du type  $w_f = w_k + (1 - \alpha)w_a$  peut être choisie pour améliorer la précision. La solution à l'interface  $f$  est alors déterminée par :

$$w_f = w_k + \nabla w_k \cdot \mathbf{r}$$

avec  $\mathbf{r}$  le vecteur distance entre le centre de la cellule considérée et la face. Cependant, la construction de cette nouvelle valeur à l'interface ne constitue pas un schéma TVD (la solution n'est pas bornée), il est donc nécessaire de limiter le gradient tel que :

$$\nabla w_k = \alpha_K \nabla w_k$$

où  $\alpha_K \in [0, 1]$  est un limiteur qui est déterminé comme étant le plus grand réel possible satisfaisant un critère de monotonie, c'est à dire pour lequel un nouvel extremum n'est pas créé à l'interface. Ce limiteur ne correspond pas à un limiteur multidimensionnel en cela qu'il limite du même facteur  $\alpha_K$  dans toutes les directions indépendamment du fait que le critère de monotonie ne puisse être violé que dans une seule direction. Pour cette raison, on utilise le limiteur multidimensionnel décrit dans [76] dont on rappelle ici l'algorithme :

---

**Algorithm 1** Algorithme du limiteur multidimensionnel

---

```

1: function LIMITER( $\nabla \mathbf{w}_k$ )
2:   for Chaque cellule commune à l'interface do
3:     Trouve le minimum et le maximum local  $\mathbf{w}_{\min}, \mathbf{w}_{\max}$ 
4:      $\mathbf{w}_0 = \nabla \mathbf{w}_k$ 
5:     for Chaque face de la cellule en cours do
6:        $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$ 
7:        $\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{n}$ 
8:        $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{r}$ 
9:        $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_n \mathbf{n}$ 
10:      if ( $\mathbf{w}_{\max} > \mathbf{w}_0$ ) and ( $\mathbf{w} > \mathbf{w}_{\max} - \mathbf{w}_0$ ) then
11:         $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w} + \mathbf{n}(\mathbf{w}_{\max} - \mathbf{w}_0)$ 
12:      if ( $\mathbf{w}_{\min} < \mathbf{w}_0$ ) and ( $\mathbf{w} < \mathbf{w}_{\min} - \mathbf{w}_0$ ) then
13:         $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w} + \mathbf{n}(\mathbf{w}_{\min} - \mathbf{w}_0)$ 
14:     $\nabla \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_0$ 

```

---

### 1.3.5 Compression d'interface

La discrétisation de l'équation (1.4) crée une diffusion numérique à l'interface air/eau qu'il faut enrayer pour espérer obtenir une interface nette. Déjà évoquées en introduction, les méthodes WENO apportent un haut degré de précision en réduisant significativement l'erreur de troncature. Une solution consiste à raisonner sur le calcul des flux et en l'occurrence à proposer des schémas anti-diffusifs ([48], [78], [39]), ou bien à ajouter un terme d'anti-diffusion en tant que terme source de l'équation de transport ([124],[125]). Ici, on s'oriente vers des méthodes dites de compression d'interface qui reposent sur un splitting en temps où l'équation d'advection est normalement résolue dans un premier temps puis corrigée sur un pas de temps fictif par un terme de redressement. Plusieurs méthodes de compression d'interface sont présentées dans [118]. La méthode de Kokh avec terme source [79] a le mérite d'être facile à implémenter. Une équation corrige la valeur de  $\phi$  pour faire tendre ce paramètre vers 0 ou 1 et ainsi éviter d'avoir des valeurs intermédiaires à l'origine d'une interface diffuse. Cette équation corrigée sur le transport de  $\phi$  prend la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = (1 - \phi)(\phi - 0.5) \quad (1.14)$$

étant un paramètre qui pilote l'épaisseur de l'interface. On remarque que dans le cas où  $\phi$  vaut 1 ou 0, le second terme s'annule et donc aucune correction n'est effectuée et on retrouve l'équation de transport classique. La valeur 0.5 dans le dernier terme permet de forcer les valeurs de  $\phi$  à 1 pour  $\phi > 0.5$  et à 0 pour  $\phi < 0.5$ . Le choix de cette valeur ne permet pas de satisfaire convenablement la conservation de la masse. Cette méthode a été implémentée

dans [118] avec des résultats satisfaisants sur l'épaisseur de l'interface mais des problèmes de conservation de la masse et de stabilité de la pression ont été mis à jour dans ce présent travail. Par ailleurs, des tests de sensibilité sur  $\alpha$  ont montré que la valeur de ce paramètre joue considérablement sur la stabilité de la simulation.

Dans [123], l'auteur préconise de modifier l'équation (1.1) en ajoutant un terme anti-diffusif dans le second membre pour contrer l'effet de la diffusion. On modifie également l'équation sur la quantité de mouvement et la conservation de la masse en raison de la propriété compressible de l'écoulement. Dans un premier temps, les équations d'Euler isothermes bi-fluides sont résolues sans ajout de terme liés à la compression d'interface. Puis dans un second temps, on effectue une correction de telle sorte que sur un pas de temps fictif  $\tau$  on résout une équation du type :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = s(\mathbf{w}) \quad (1.15)$$

avec  $\mathbf{w}$  vecteur des variables conservatives. L'utilisation de cette méthode introduit un second membre antidiffusif  $s(\mathbf{w})$ , très couteux en temps de calcul.

On propose maintenant ici une méthode de compression dérivée des deux précédentes en alliant une méthode à pas fractionnaire avec une stricte conservation de la masse. On résout (1.7) sans terme correctifs liés à la compression. Puis on effectue une correction sur  $\rho$  du type :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\alpha(\rho - c) \quad (1.16)$$

En discrétisant cette équation par une méthode d'Euler classique, on obtient :

$$\rho^* = \rho + \alpha(\rho - c) \quad (1.17)$$

Il convient de noter que toute variation de  $\rho$  dans une cellule entraîne obligatoirement une modification de  $p$  (les variables du triplet  $p, \rho, \mathbf{u}$  sont reliées par l'équation de fermeture) et cette étape est faite sans modification de la pression pour ne pas perturber la dynamique de l'écoulement. Notons  $\alpha$  la fraction volumique avant l'étape de compression et  $\alpha^*$  la fraction volumique après l'étape de compression. D'après la loi de pression, on a :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + c_0^2(\rho - (\alpha \rho_A + (1 - \alpha)\rho_W)) \\ p^* &= p_0 + c_0^2(\rho^* - (\alpha^* \rho_A + (1 - \alpha^*)\rho_W)) \end{aligned}$$

On veut conserver la condition d'équilibre (ie.  $p^* = p$ ) d'où :

$$\begin{aligned} \rho^* - \rho &= (\rho_A - \rho_W)(\alpha^* - \alpha) \\ \rho^* &= \rho + (\rho_A - \rho_W)\alpha(\alpha^* - \alpha) \quad (1 - \alpha)(\alpha - c) \end{aligned}$$

A partir de cette valeur de  $\rho^*$ , on met à jour les autres variables conservatives :

$$(\rho \mathbf{u})^* = \rho^* \mathbf{u}$$

Une première précaution à prendre est de veiller à ce que la nouvelle valeur de  $\rho$  reste bornée par l'intervalle  $[0,1]$ . De la même manière, la nouvelle valeur de  $\rho$  doit être comprise entre  $\rho_A$  et  $\rho_W$ . Pour ce faire, on contrôle la valeur du paramètre  $\alpha$  tel que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq 1 \\ \rho_A &\leq \rho^* \leq \rho_W \end{aligned}$$

L'application de cette contrainte implique que :

$$\begin{cases} \alpha = \min \left( \frac{1 - \rho}{(\rho - \rho_A)}, \frac{\rho - \rho_A}{(\rho - \rho_A)(\rho_W - \rho_A)} \right) & \text{si } (\rho - \rho_A)(\rho - \rho_W) > 0 \\ \alpha = \min \left( \frac{1 - \rho}{(\rho - \rho_A)}, \frac{\rho - \rho_W}{(\rho - \rho_A)(\rho_W - \rho_A)} \right) & \text{si } (\rho - \rho_A)(\rho - \rho_W) < 0 \end{cases}$$

Après cette étape, on relaxe le paramètre  $\alpha$  en le multipliant par une "CFL" de manière à stabiliser la valeur de  $\rho$  en deçà de la valeur critique imposée par la condition ci-dessus :

$$\alpha =$$

où  $\alpha$  est une constante positive qui pilote le raidissement de l'interface à l'instar de  $\alpha$  dans [79]. La valeur de  $\alpha$  doit à l'heure actuelle être choisi au cas par cas de façon à associer raidissement convenable de l'interface et stabilité numérique.

L'étape de compression doit se faire en respectant strictement la conservation de la masse [123]. Ainsi, on veut que :

$$\int \rho^* = \int \rho$$

ce qui implique d'après l'équation (1.17) :

$$\int (1 - \alpha)(\rho - \rho_A) = 0$$

ce qui permet de trouver le paramètre numérique  $c$ , indicateur de la conservation de la masse, tel que l'équation ci-dessus soit vérifiée :

$$c = \frac{2(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)}$$

La figure 1.12 montre la sensibilité du paramètre de compression sur l'épaisseur de l'interface. Sans compression ( $\alpha = 0$ ), l'interface présente un aspect flou, diffus, typique d'une viscosité numérique excessive. En augmentant la valeur du paramètre de compression, l'épaisseur de l'interface diminue et cette dernière présente un contour visuellement plus satisfaisant. En continuant à augmenter davantage le paramètre de compression, l'interface commence à présenter un phénomène de crénelage et la position du front d'onde change substantiellement par rapport à la simulation sans compression d'interface, en s'accompagnant de variations non négligeables de la masse totale de fluide (figure 1.13). En particulier, pour  $\alpha = 0.1$ , le front se situe à 4.5, pour  $\alpha = 0.6$ , le front se situe à 5.8.

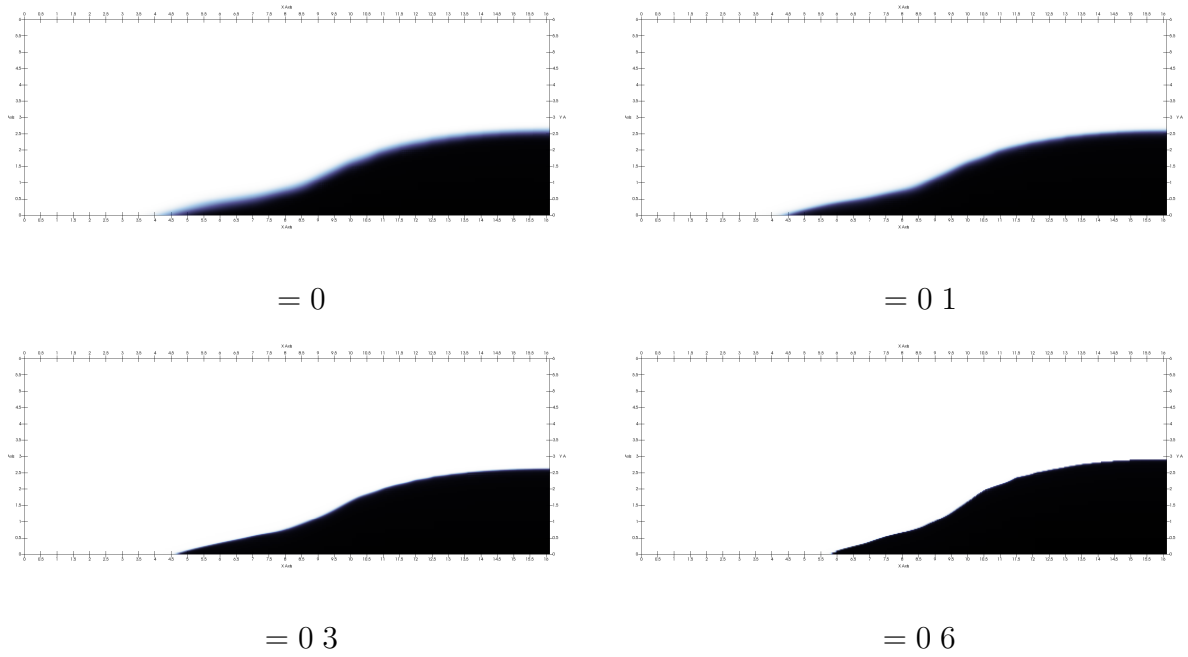


FIGURE 1.12 – Sensibilité au paramètre de compression pour un dambreak

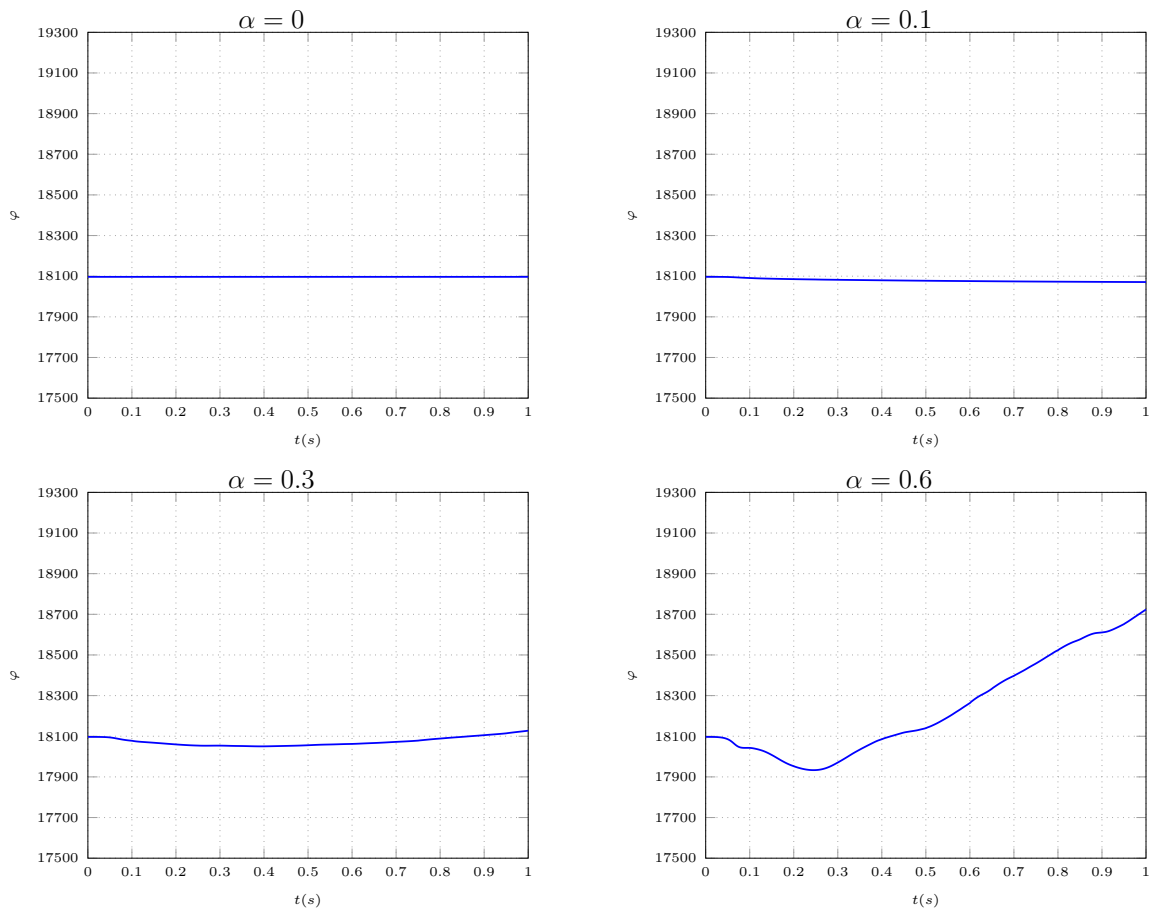


FIGURE 1.13 – Évolution de la masse totale de fluide en fonction de

Une compression trop importante modifie la structure de l'interface, viole la conservation de la masse et a tendance à diminuer les amplitudes et ralentir l'écoulement des fluides. Le choix du paramètre résulte d'un compromis entre réduction de l'épaisseur de l'interface, conservation de la masse et conservation de la forme et de la cinématique de l'interface, et constitue malheureusement une subjectivité qui ne permet pas de généraliser correctement cette méthode.

### 1.3.6 Parallélisation

Lorsque le nombre de mailles devient important, les calculs deviennent particulièrement longs. En trois dimensions, où le nombre de mailles atteint rapidement plusieurs millions, ce temps est exorbitant. Il est donc inenvisageable de considérer l'application à des cas réels en des temps raisonnables sans un moyen d'accélérer les calculs. Dans la plupart des cas, lorsque des algorithmes de discrétisation sont présentés, ils le sont dans un contexte séquentiel, c'est à dire pour un seul cœur de calcul exécutant les instructions les unes après les autres.

Compte tenu des avancées technologiques et de la progression de la puissance des processeurs depuis une trentaine d'années (loi de Moore), il est possible d'exploiter l'intégralité du potentiel des processeurs, y compris sur des stations de bureau, en utilisant des bibliothèques permettant de paralléliser les codes de calcul.

Un processeur est constitué de un ou plusieurs cœurs de calcul qui se chargent d'exécuter les instructions. La parallélisation consiste à utiliser une partie ou l'intégralité de ces cœurs de calcul et à répartir entre ces cœurs le nombre d'instructions pour accélérer l'exécution d'un code. De cette répartition de charge dépend l'efficacité de la parallélisation puisque la vitesse d'exécution se calera inévitablement sur le cœur de calcul le plus lent (donc celui ayant le plus de cycles d'instructions à traiter). Tous les codes ne sont pas parallélisables, d'autres ne le sont qu'en partie. Certains algorithmes s'adaptent plus ou moins bien à la parallélisation et de manière générale, programmer un code parallélisé nécessite de repenser complètement la structure de données par rapport à un code séquentiel.

Le parallélisme dépend fortement des schémas de discrétisation choisis. En l'occurrence, une discrétisation implicite implique la résolution d'un système linéaire. Ce système, qui est un produit matrice-vecteur, peut être parallélisé en demandant à ce que chaque cœur de calcul n'exécute qu'une portion du produit matriciel indépendamment des autres. Évidemment, l'application pratique est beaucoup compliquée car il existe bien souvent un couplage plus ou moins fort des termes selon la structure des équations et les stencils de discrétisations.

Lorsque la discrétisation est explicite, il n'y a pas de système à résoudre et la solution peut être avancée en temps à partir de la solution à l'instant précédent. Il est possible de profiter de la parallélisation en utilisant une décomposition de domaines. Le domaine de calcul est

subdivisé en un certain nombre de sous-domaines et chaque cœur de calcul se charge de calculer et d'avancer la solution pour toutes les mailles comprises dans son sous-domaine. La répartition de la charge entre les sous-domaines est ici primordiale. En l'occurrence, la notion de bloc utilisée dans le présent travail représente déjà une subdivision du domaine de calcul et constitue une entité qui s'adapte naturellement assez bien à la décomposition de domaine. Chaque cœur de calcul va en effet traiter un certain nombre de blocs, la répartition de charge étant calculée de façon à ce que chaque cœur de calcul considère pour l'ensemble des blocs qu'il traite le même nombre de mailles. Dans [33], [51] et [2], cette décomposition était assurée par un algorithme de Cuthil-MacKee. Dans le présent travail, une amélioration est proposée en vue de profiter d'une meilleure décomposition de domaines pour l'interaction fluide-structure. Elle consiste à utiliser le partitionneur METIS [74].

Comme évoqué précédemment, la répartition homogène de la charge sur les cœurs de calcul est primordiale pour une bonne parallélisation. Toutefois, il existe un autre critère à prendre en compte qui est celui du nombre de communications. Sauf variable globale déclarée, chaque processus agit indépendamment des autres, ce qui signifie qu'il n'a pas connaissance des calculs qu'effectuent les autres processus. Pour toutes les mailles comprises dans un sous-domaine, la solution peut être avancée en temps mais pour les cellules frontières entre plusieurs sous-domaines, il est nécessaire d'échanger des informations avec les cellules des sous-domaines voisins. Cette opération nécessite l'appel d'une fonction de communication qui est le cœur de la librairie MPI dont l'impact est d'autant plus lourd sur le calcul que le nombre de communication est important. Il est donc essentiel, en plus de répartir uniformément la charge, de réduire le nombre de zones de communication en minimisant les surfaces communes entre plusieurs sous-domaines. Un partitionnement efficace résout donc un problème d'optimisation sous contrainte qui est de minimiser le nombre de zones de communication sous contrainte de répartir uniformément la charge. Cet algorithme d'optimisation est implémenté dans METIS et est utilisé dans ce travail à l'échelle de l'entité de maillage qui est le bloc. Si pour des maillages uniformément raffinés, l'intérêt est moindre, cette décomposition de domaine apporte toute sa puissance dans du raffinement dynamique de maillage. Plus le nombre de blocs est important, plus la parallélisation sera efficace car le nombre total de mailles peut être mieux réparti entre les blocs.

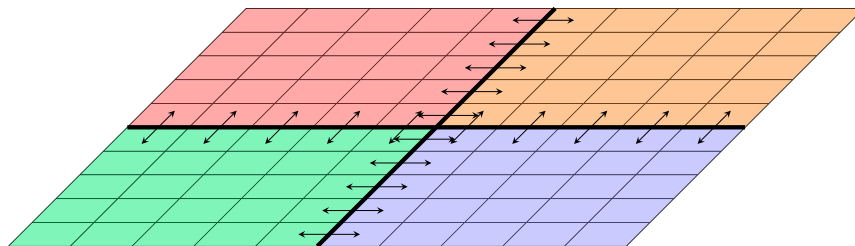


FIGURE 1.14 – Principe de la décomposition de domaines. Les flèches indiquent les communications MPI entre sous domaines



## 1.4 Exemples

### 1.4.1 Tube à choc

Le cas test simulé ici est la reproduction du test 1D présenté dans [50]. Il consiste en deux fluides séparés par une discontinuité en  $x=0$ . A l'état initial, l'état gauche et l'état droit sont définis comme suit :

$\rho_L$	$\rho_R$	$u_L$	$u_R$	$L$	$R$
1125	1000	0	0	0	1

Le maillage est constitué d'un seul bloc de degré raffinement 10 ( $2^{10} = 1024$  mailles). L'intégration en temps et en espace est d'ordre 2. La vitesse du son numérique est de 20m/s. L'évolution de la densité, la vitesse, la pression et la fonction de phase est tracée à  $t=0.2s$  (figure 1.15).

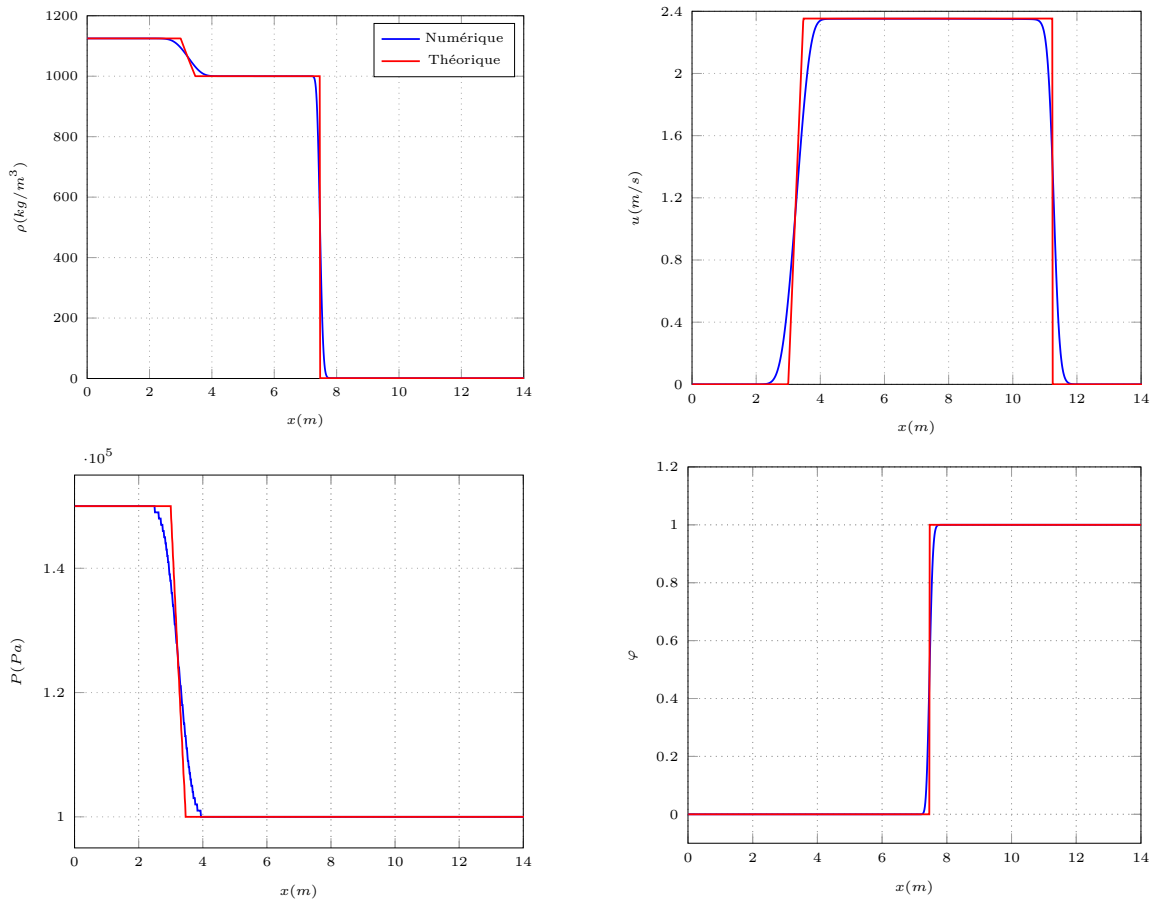


FIGURE 1.15 – Évolution des différentes variables pour un tube à choc à  $t=0.2s$

L'approximation numérique par rapport à la solution théorique du problème de Riemann est satisfaisante pour toutes les variables. Il s'agit d'un exemple classique permettant de vérifier la robustesse du solveur de Riemann et de s'assurer du bon calcul des flux.

## 1.4.2 Dambreak

Un exemple de calcul plus complexe en deux dimensions est présenté ici. Le cas test est la reproduction de l'expérience présentée dans [84] effectuée à l'université de Madrid. On s'intéresse à un lâcher de barrage dans une cuve de dimension 1610 x 600 x 150 mm. Une porte coulissante sépare à la position 1010 mm une zone sèche d'une masse d'eau de densité  $997 \text{ kg m}^3$  initialement de dimension 600 x H x 150 mm. Pour ce cas test, la hauteur d'eau initiale est de  $H=300 \text{ mm}$ . A l'instant  $t=0$ , la porte coulissante est levée et la masse d'eau s'effondre et vient impacter quelques instants plus tard la frontière gauche de la cuve où sont installés des capteurs de pression aux hauteurs 3, 15, 30 et 80 mm. La simulation de ce lâcher de barrage est effectuée sur une période de 6.64s sur un maillage dynamique où le degré de raffinement maximal des blocs est fixé à 5. Le domaine de calcul est bidimensionnel et discrétisé par 32 blocs dans la direction horizontale et 12 blocs dans la direction verticale. La méthode en temps et en espace est d'ordre 2. La compression d'interface est activée et trois valeurs du paramètre de compression sont étudiés. Par ailleurs, trois vitesses du son numérique (20,40 et 80 m/s) sont considérées. Les conditions aux frontières sont réfléchives.

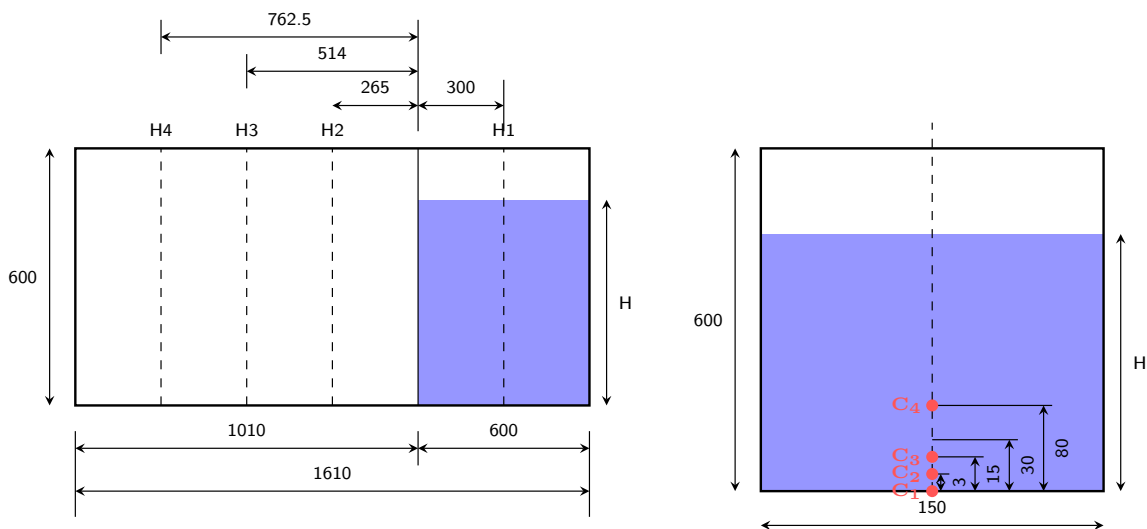


FIGURE 1.16 – Configuration expérimentale

L'étude se divise en deux parties : une partie cinématique, où la position du front du dambreak est relevée ainsi que la hauteur d'eau en quatre points différents et une partie dynamique, où les pressions d'impact sont mesurées à la position des capteurs (figure 1.16). Pour tous les graphes, l'abscisse représente le temps adimensionné  $t/gH$  permettant en plus du jeu de

données présentés dans [84] une comparaison avec les données expérimentales de Martin et Moyce [86] et de Dressler [29].

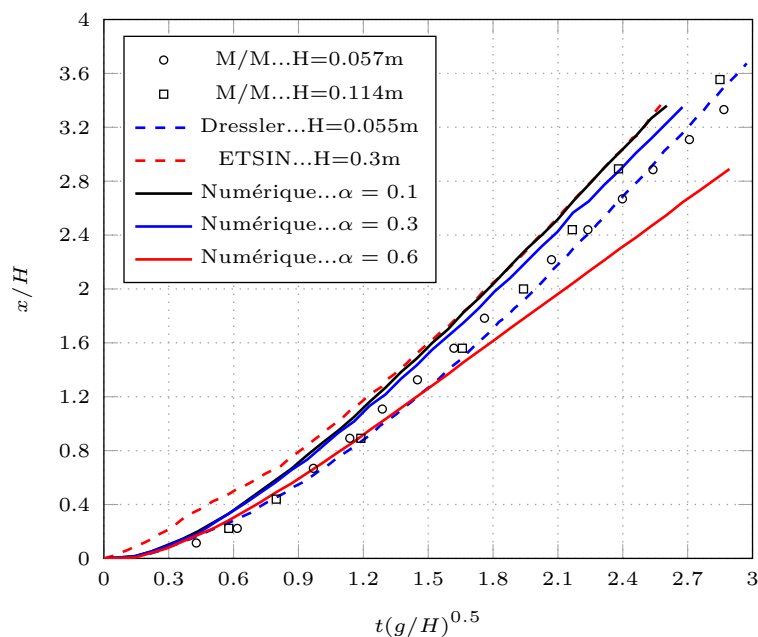


FIGURE 1.17 – Position du front d'onde pour différentes valeurs de  $\alpha$

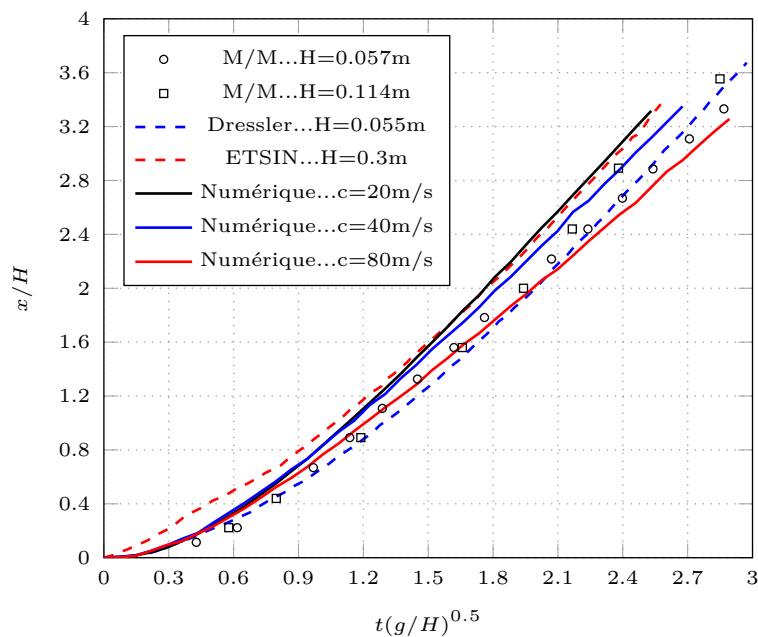


FIGURE 1.18 – Position du front d'onde pour différentes valeurs de  $c$

Concernant l'étude cinématique, on s'intéresse en premier lieu à l'évolution de la position  $x$  du front d'onde du dambreak. Toutes les 0.12s, on relève numériquement sa position pour

trois valeur de paramètre de compression. Lorsque l'interface est trop diffuse, on choisit la position de l'isovaleur  $\rho = 500$ . Ces relevés sont synthétisés sur la figure 1.17. De même, on étudie trois configurations de vitesse du son artificielle différentes et on trace les résultats sur la figure 1.18. Les tests de sensibilité sur le paramètre de compression montrent qu'il peut y avoir une importante modification de la cinématique du lâcher de barrage. Comme évoqué dans la section 1.3.5, il semblerait que des valeurs trop importantes ( $c = 0.6$ ) compriment trop l'interface et ralentissent la progression de l'écoulement. Pour des valeurs de  $c$  modérées, l'accord avec l'expérimental est plutôt satisfaisant. Concernant la sensibilité de la position du front d'onde à la vitesse du son, les résultats concordent raisonnablement avec les données expérimentales avec néanmoins des disparités qui semblent s'accumuler dans le temps. L'autre aspect de l'étude cinématique concerne la comparaison de la hauteur d'eau (figure 1.19) pour quatre positions de capteur différentes référencées sur la figure 1.16. Pour les transects H1 et H4, on constate une bonne corrélation avec les expériences. Pour les transects H2 et H3, il est plus difficile d'arriver à la même conclusion bien qu'on puisse dégager une tendance commune sur la présence de pics et une élévation soudaine du niveau d'eau à partir de  $T=7$ .

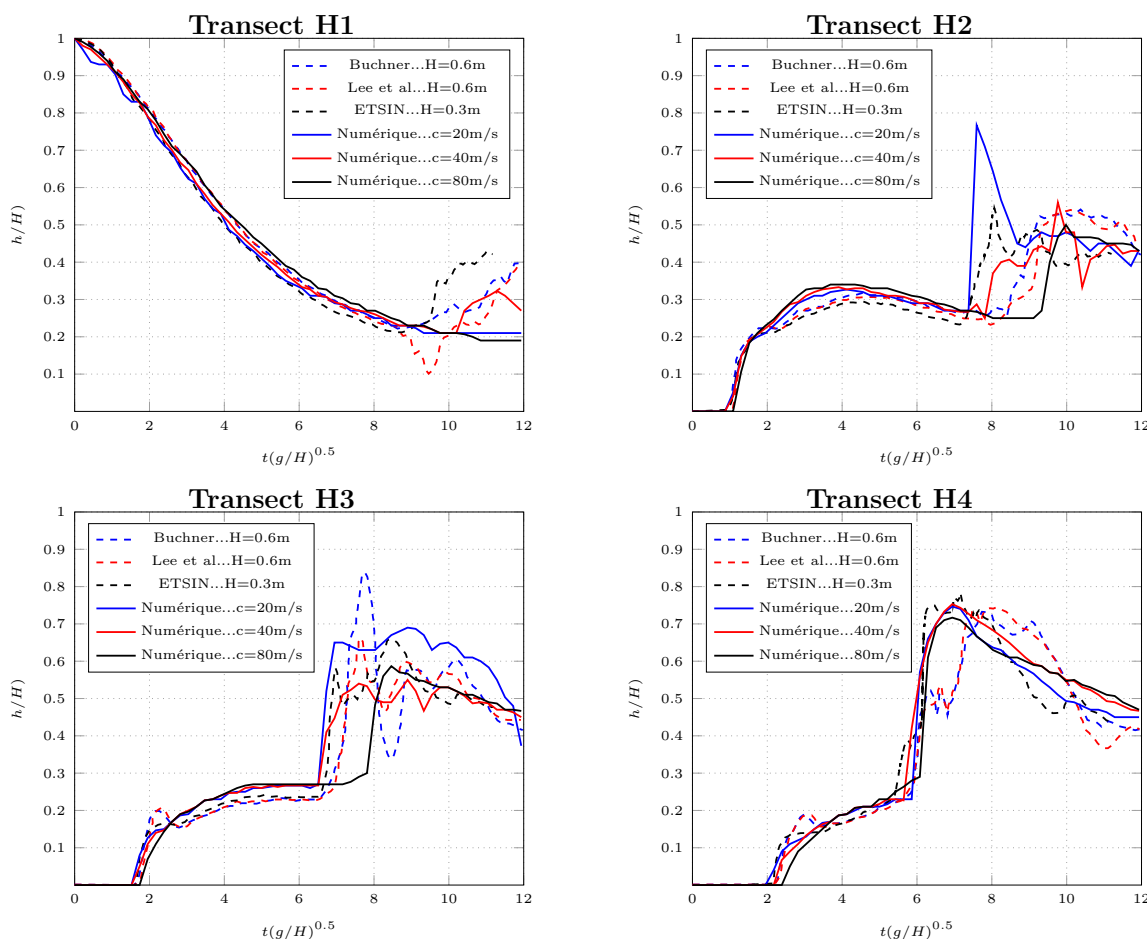


FIGURE 1.19 – Évolution de la hauteur d'eau pour 4 positions différentes

La partie dynamique consiste à étudier l'amplitude de la pression pour les quatre positions

de capteur sus-citées. La figure 1.20 résume l'étude de sensibilité de la pression d'impact sur la paroi gauche instrumentée de la cuve à la vitesse du son numérique.

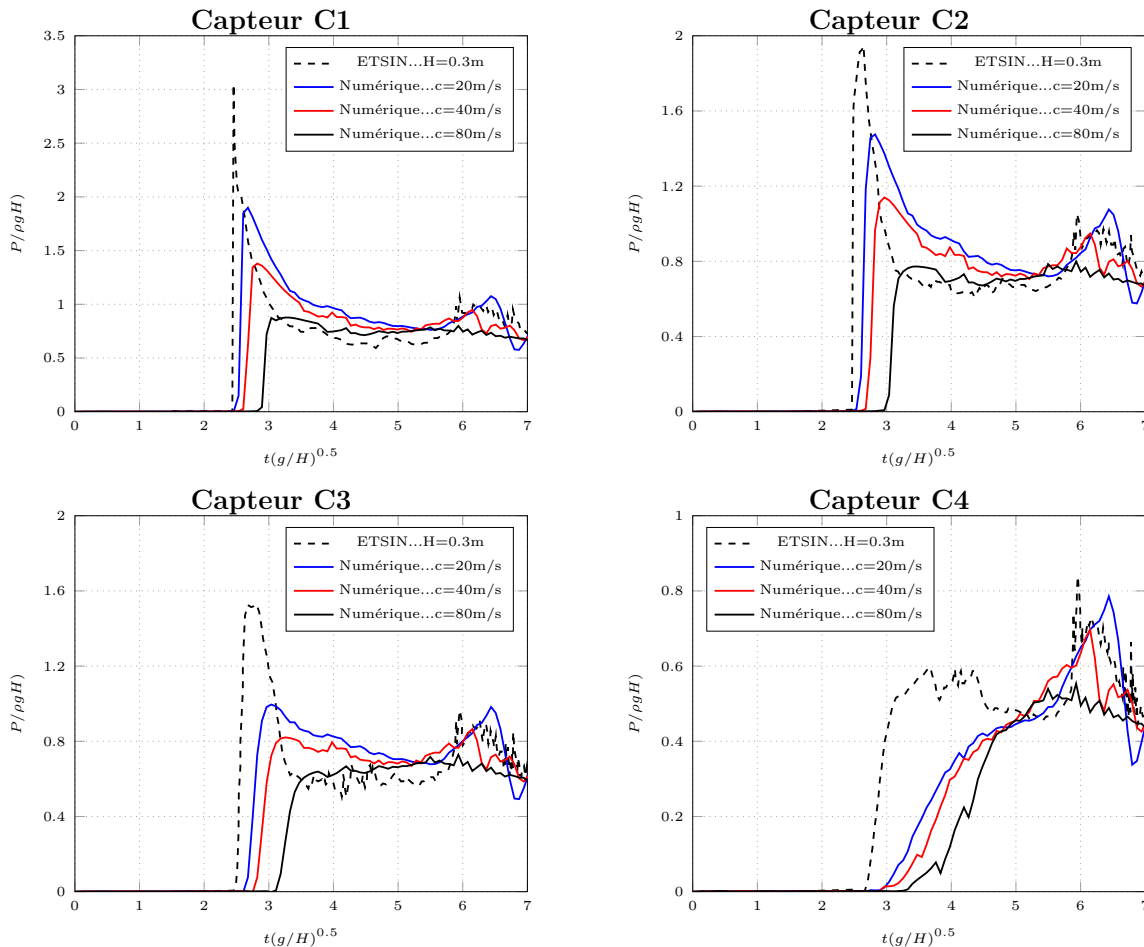


FIGURE 1.20 – Évolution de la pression d'impact pour 4 capteurs différents

On remarque une disparité très claire des résultats selon la valeur de la vitesse du son. En particulier, la pression d'impact lorsque la masse d'eau vient heurter la paroi instrumentée est largement sous-estimée, et l'est d'autant plus que la vitesse du son est importante. Cela montre clairement qu'il existe une contribution dynamique de la pression qui dépend fortement de la compressibilité de l'écoulement. Après le premier impact, la pression retrouve une valeur avoisinant celle de l'expérimental avec un contraste vis à vis de la vitesse du son qui est plus mesuré. Le deuxième impact sur la vague de retour est mieux approché mais il est étonnant de voir que le premier impact sur le capteur C3 est de même amplitude que le second impact. Sur le capteur C4, le premier impact semble étonnamment déphasé et avec un *rise-time* beaucoup plus important. Il est nécessaire de préciser que la variabilité des résultats et les disparités observées peuvent en partie provenir d'une part des conditions expérimentales (reproductibilité des résultats, effet de la vitesse d'ouverture de la porte coulissante [84]), d'autre part de l'imprécision et de la subjectivité dans le relevé des données numériques (digitalisation, erreur humaine de lecture).

Si l'étude cinématique est correcte, les résultats de l'étude dynamique sont plus mitigés et montrent qu'il est difficile de retrouver les pressions expérimentales, et ce même en jouant sur le paramètre numérique qu'est la vitesse du son. Étant donné l'évolution des courbes, on pourrait penser que diminuer davantage la vitesse du son permettrait de mieux mesurer le pic de pression mais cela augmenterait de manière significative la masse volumique de l'eau qui deviendrait anormalement élevée et non représentative de la physique réelle de l'écoulement. On observe sur la figure 1.21 une légère variation de la masse au cours de la simulation, pour un paramètre de compression  $\beta = 0.3$  fixé, ce qui corrobore l'observation déjà faite sur la figure 1.13 de la section 1.3.5. Enfin sur la figure 1.22, on compare visuellement l'évolution de la surface libre sur plusieurs pas de temps pour les trois vitesses du son retenues. On constate que les résultats à partir de la reconnexion de l'interface divergent sensiblement avec la vitesse du son. Pour une vitesse du son de 80 m/s, on remarque notamment que la masse d'eau remonte beaucoup moins haut sur la paroi gauche de la cuve et qu'il n'y a pas de piégeage de bulle d'air ni la constitution de rouleaux.

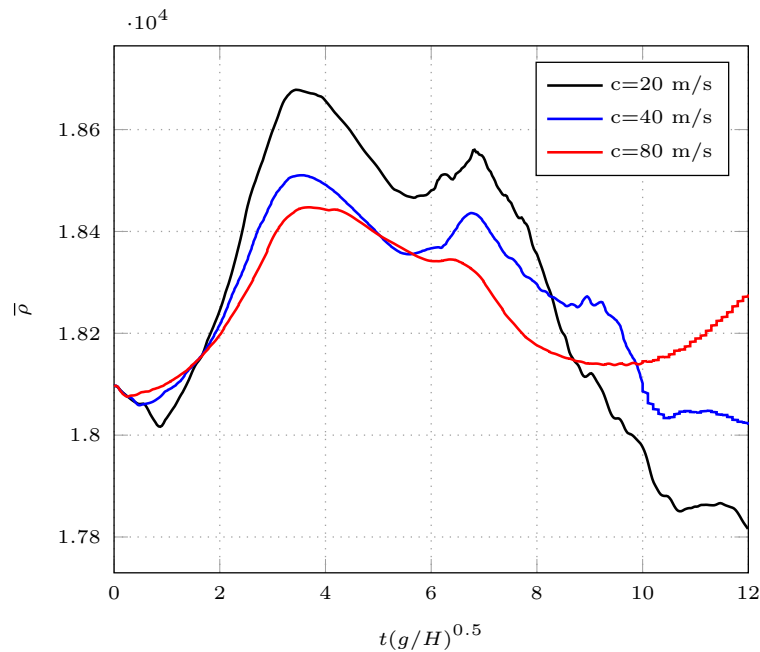


FIGURE 1.21 – Conservation de la masse pour différentes vitesses du son ( $\beta = 0.3$ )

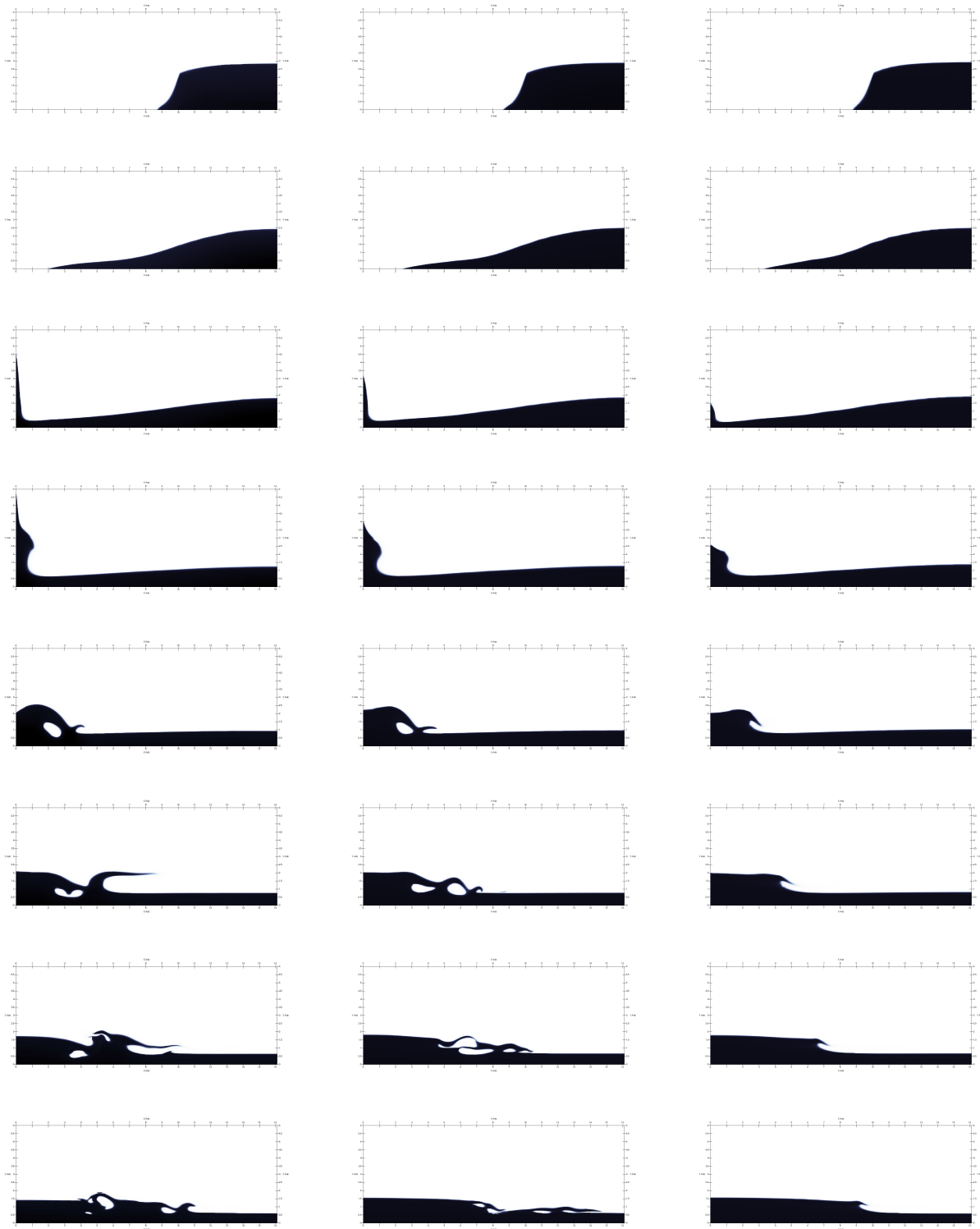


FIGURE 1.22 – Évolution de la surface libre lors d'un lâcher de barrage de 0.4s à 6s par pas de 0.8s. A gauche, résultats pour 20m/s, au centre 40m/s, à droite 80m/s.

## 1.5 Conclusion

Le modèle décrit dans [50] permet la simulation d'écoulement bi-fluide compressible utilisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices le plaçant comme une approche intermédiaire, compromis entre les modèles de type Navier-Stokes, très complets mais lents, et les modèles plus simples de type Saint-Venant ou BEM, rapides mais peu précis pour les phénomènes envisagés ici. L'approximation numérique repose sur une formulation volumes finis où un problème de Riemann est résolu à chaque interface et pour lequel la solution a été détaillée. Des améliorations classiques du modèle numérique à travers des méthodes d'ordre 2 en temps et en espace utilisées conjointement avec une procédure de raffinement dynamique du maillage permettent d'obtenir un bon compromis entre temps de calcul et précision des résultats.

L'utilisation d'une compressibilité artificielle, séduisante par le gain de temps qu'elle autorise, permet de s'affranchir des problèmes à bas Mach que le solveur dans sa conception actuelle n'est pas capable de traiter. Il en résulte néanmoins une difficulté dans le calage de la vitesse du son artificielle, celle-ci pouvant modifier ostensiblement la dynamique des écoulements, en particulier sur les valeurs de pression et autoriser des variations de masse volumique trop importante.

S'il n'est pas exempt de tout reproche, le modèle proposé présente des atouts indéniables. L'approche AMR par bloc permet un gain en temps de calcul considérable en répartissant intelligemment la gestion des mailles. L'explicitation de la discrétisation simplifie le développement numérique et la parallélisation en s'affranchissant de la résolution d'un système, au détriment certes d'une condition CFL contraignante. C'est en partie grâce à cette grande flexibilité que le développement d'une procédure d'interaction fluide-structure a été rendue possible sans de profondes modifications ni un changement total de philosophie numérique et dont le détail fait l'objet de la seconde partie de ce manuscrit.





# 2 Un modèle uni é d interaction uide-structure

## 2.1 Introduction

Les problématiques d'interaction fluide-structure (IFS) se rencontrent dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingénierie. Des expériences en laboratoire permettent de mettre en exergue l'impact du fluide sur une structure à travers par exemple l'instrumentation de maquettes faisant office de modèles réduits. Des études de similitude sur le nombre de Froude et/ou de Reynolds autorisent l'extrapolation des efforts sur des prototypes à échelle réelle. Bien que l'expérience en laboratoire permette d'observer au plus près la physique de l'écoulement à proximité de l'obstacle et de mesurer précisément les efforts s'appliquant sur celui-ci, cette approche trouve rapidement ses limites pour l'extension aux cas réels tant la complexité et l'ampleur des phénomènes étudiés ainsi que les dimensions des structures impliquées entraîneraient un dispositif expérimental conséquent et coûteux. La simulation numérique apporte une alternative viable économiquement, tant par la rapidité de production qu'elle permet que par l'échelle des phénomènes qu'elle peut reproduire. La fiabilité des résultats issus de la simulation numérique de problèmes d'interaction fluide-structure repose sur la compréhension des phénomènes physiques entrant en jeu et la rigueur de la modélisation du couplage fluide-solide.

L'inertie d'un fluide environnant une structure exerce des forces entraînant des contraintes et un mouvement de celle-ci. On parle de couplage car la présence même de l'obstacle, ainsi que son mouvement vient modifier la structure de l'écoulement et rétroactivement, le champ de pression fluide agissant sur la structure varie en fonction du mouvement de celle-ci. L'interaction fluide-structure, à proprement parler, repose sur la transmission des contraintes du fluide vers le solide à travers l'interface entre les deux milieux. Les conditions limites à la frontière fluide-solide doivent donc être rigoureusement modélisées pour que l'on puisse espérer une simulation physique de l'interaction fluide-structure. La diversité des modélisations possibles et disponibles pour traiter ce genre de problème donne lieu à un regroupement de certaines méthodes sous le nom de méthodes de frontières immergées (*immersed boundary methods*), dont les différentes formes sont synthétisées dans l'article

de Mittal et Iaccarino [89] qui sert souvent de référence en la matière. Ces méthodes ne constituent cependant qu'une partie des méthodes d'interaction fluide-structure dont le choix est aussi déterminé par la méthode de maillage du domaine de calcul ou par la possibilité de coupler des solveurs existants. La distinction entre méthodes partitionnées et monolithiques, entre méthodes conformes et non conformes aux géométries des structures, apporte une classification plus générale, proposée notamment dans l'article de Hou [68].

La façon la plus intuitive de traiter un problème d'interaction fluide-structure consiste à traiter le fluide d'une part et la structure d'autre part. Traiter le fluide et le solide successivement et séparément est le propre des méthodes dites partitionnées. Chaque domaine (fluide et solide) possède son propre solveur, son propre maillage, sa propre discrétisation. La majorité des logiciels commerciaux utilisent une approche partitionnée. Classiquement, les équations dans le fluide sont résolues dans un formalisme eulérien et une approche volumes finis tandis que le solveur mécanique utilise des éléments finis dans une formulation lagrangienne permettant une description précise de la structure et une estimation des déformations et des contraintes. L'interaction entre les deux milieux (ie. le couplage) est traitée minutieusement en prenant soin d'associer les bonnes conditions limites sur les noeuds à l'interface. Typiquement, la procédure de couplage fluide-structure dans une approche partitionnée se fait comme suit [88] :

- ▶ Transfert du mouvement de la structure vers le fluide
- ▶ Mettre à jour la position du maillage fluide
- ▶ Avancer la solution fluide en temps et calculer la nouvelle contrainte
- ▶ Convertir cette contrainte en mouvement de la structure
- ▶ Avancer la solution solide en temps

Felipa [38] recense certains des avantages de l'approche partitionnée. Par exemple, le système fluide et le système solide étant traités séparément, le programmeur dispose d'un large choix de techniques et de méthodes éprouvées pour construire à sa guise un schéma numérique efficace pour chacun des systèmes. Dans le cas de l'interaction fluide-structure, l'approche partitionnée permet de construire un maillage fluide et un maillage solide qui peuvent ne pas coïncider puisque que les deux sont traités séparément. Enfin, cette approche permet une grande modularité et le gros avantage est de pouvoir associer n'importe quel solveur fluide avec n'importe quel solveur solide déjà existant. Les approches partitionnées souffrent néanmoins d'un problème de synchronisation dû à la résolution successive des problèmes fluide et solide. Les deux solveurs utilisant a priori des schémas et des méthodes numériques différents, et donc des pas de temps différents, la difficulté consiste à les synchroniser de façon à ce qu'ils itèrent au même instant suivant.

A l'inverse, l'approche monolithique (ou unifiée) utilise un seul jeu d'équations pour décrire le mouvement du fluide et du solide simultanément au sein d'un solveur unique. Le couplage est

interne au solveur et nécessite donc un effort de programmation supplémentaire. Le problème de désynchronisation évoqué dans l'approche partitionnée n'existe plus car le même schéma numérique est utilisé pour la résolution du système fluide-solide. La méthode de résolution est au choix du numéricien parmi des méthodes qui seront détaillées ci-après mais pose le désavantage de rendre le code peu portable et difficilement modifiable car le couplage fluide-structure est "codé en dur". Les approches monolithiques proposent des modèles où les équations unifiées dans le fluide et dans le solide ont la même structure. Pour autant, les termes de ces équations pris séparément représentent des quantités discontinues au passage de l'interface fluide-solide. On comprend alors qu'il est nécessaire d'effectuer un traitement particulier et rigoureux de ces quantités à l'interface car de la bonne estimation de celles-ci dépend la fiabilité et la cohérence de l'interaction fluide-structure. En particulier, la contrainte et la vitesse doivent être continues à l'interface.

Une autre classification utile des méthodes d'interaction fluide-structure consiste à s'interroger sur le type de maillage utilisé. Une méthode utilisant une grille de calcul dont les nœuds sont disposés à l'interface fluide-solide rentre dans la catégorie des méthodes conformes. A l'inverse, lorsque la grille n'est pas *body-tted*, on dit que la méthode est non-conforme. Cette distinction est importante car la façon de traiter le problème d'interaction fluide-structure change alors radicalement. Les méthodes conformes traitent les conditions d'interface fluide-solide comme des conditions limites physiques. Des procédures de remaillage sont nécessaires lorsque la solution est itérée dans le temps pour assurer la conformité avec l'interface avec tous les inconvénients liés aux distorsions des mailles. En revanche, les méthodes non conformes considèrent les conditions d'interface fluide-solide comme une contrainte imposée sur le système d'équations. En cela, il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage conforme à la géométrie de l'obstacle.

Mailler un obstacle de géométrie donnée de façon conforme peut s'avérer extrêmement fastidieux et complexe. Par ailleurs, ce maillage doit être reconstruit après le mouvement du solide et la mise à jour de sa nouvelle position. Cette opération de remaillage peut s'avérer terriblement coûteuse selon la complexité de l'interface. En ayant un maillage totalement cartésien uniforme non-conforme à la frontière fluide-structure et dont la génération est simple et rapide, on s'affranchit d'un temps et d'une fréquence de remaillage.

Il s'avère très souvent que les approches partitionnées fassent appel à des méthodes conformes tandis que les approches monolithiques s'intègrent très bien dans des méthodes non conformes. Il y a en effet un cadre de travail qui tend naturellement à associer partitionné et conforme d'une part, et monolithique et non conforme d'autre part. Cette association sera désormais faite dans le reste de ce manuscrit.

## 2.2 État de l'art des méthodes d'IFS

L'essentiel de l'effort dans le développement d'un solveur d'interaction fluide-structure dans ce travail s'est concentré sur l'implémentation de méthodes monolithiques fondées sur des méthodes non conformes. Pour cette raison, on ne détaillera pas la littérature sur les approches partitionnées utilisant des maillages *body-fitted*. L'idée commune aux méthodes non conformes est d'ajouter un terme supplémentaire dans l'équation de quantité de mouvement de façon à traduire la présence d'une structure dans un écoulement. Il existe autant de méthodes que de façons de paramétrer ce terme supplémentaire, l'objet de cette section est d'en exposer quelques unes parmi les plus utilisées.

### 2.2.1 Méthodes de frontières immergées

Une excellente présentation des méthodes à frontières immergées a été faite par Mittal et Iaccarino [89] dont on reprend rapidement ici l'introduction du concept clé de terme de forçage. Soit un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  contenant un domaine fluide  $\Omega_f$  et un domaine solide  $\Omega_s$ . On désigne par  $\Gamma$  l'interface fluide-solide. Considérons une version compacte des équations de Navier-Stokes (ou d'Euler) écrite sous la forme :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur représentant l'équation de Navier-Stokes et  $\mathbf{U}$  le vecteur des inconnues. Le terme source est nul pour simplifier. A cette équation s'ajoute les équations de saut, se traduisant par une continuité des vitesses et des contraintes normales à l'interface. En l'occurrence, on a :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U} \text{ sur } \Gamma \quad (2.2)$$

On fait maintenant la supposition qu'il existe un terme de forçage  $\mathbf{f}_s$  tel que la condition (2.2) soit imposée en marge de l'équation (2.1) et ce en y ajoutant ce terme de forçage en tant que terme source. Une première classification des méthodes à frontières immergées apparaît alors en fonction de la façon de traiter ce terme source de forçage avant ou après discrétisation de l'équation (2.1) :

► Forçage continu :

En utilisant une approche continue du forçage, le terme source est ajouté dans l'équation (2.1) en amont de la discrétisation :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}_s$$

L'intérêt de cette approche est qu'elle est indépendante de la méthode de discrétisation.

► Forçage discret :

Une autre façon est de résoudre d'abord l'équation (2.1) indépendamment de la position de la frontière immergée puis de résoudre une équation du type  $\mathcal{L}'(\mathbf{U}) = \mathbf{r}$  dans les mailles traversées par l'interface .  $\mathcal{L}'$  correspond à un opérateur discret et  $\mathbf{r}$  un terme connu associé à la condition limite (2.2). Une réécriture de cette procédure proposée dans [89] suggère :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}'_{\mathbf{b}}$$

où  $\mathbf{f}'_{\mathbf{b}} = \mathbf{r} + \mathcal{L}(\mathbf{U}) - \mathcal{L}'(\mathbf{U})$

Cette méthode autorise un accès direct aux propriétés de consistance, de stabilité et de convergence propre à la méthode de discrétisation choisie et permet donc un paramétrage fin et précis de la méthode d'interaction fluide-structure, ce qui explique en partie le grand nombre de publications présentant leur propre méthode de forçage discret.

### Forçage continu

Les travaux de Peskin [105], [106] semblent pionniers dans la modélisation mathématique de l'interaction fluide-structure. Celui-ci est en effet le premier à avoir proposé une modification des équations fluides, en particulier dans l'équation de conservation de quantité de mouvement pour rendre compte de l'effet d'une structure dans un écoulement. Il s'agit notamment d'une modification locale de l'équation au voisinage d'une membrane élastique dans le cadre de la simulation d'écoulement sanguin dans le cœur. Il pose l'hypothèse d'un écoulement visqueux incompressible sur grille fixe et considère le vaisseau sanguin comme une somme de fibres élastiques repérées par des marqueurs lagrangiens qui se déplacent avec le fluide. L'effet de la frontière immergée sur le fluide est pris en compte par l'intermédiaire d'un terme de forçage supplémentaire dans les équations de Navier-Stokes,  $\mathbf{f}_{\mathbf{b}}$ , fonction de la rhéologie du matériau qui compose la membrane élastique tel que :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) = \int F(s, t) (\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds$$

et  $F$  est déterminé par une loi de Hooke ou par toute autre loi de comportement. A cette équation s'ajoute le transport des marqueurs lagrangiens :

$$\frac{\partial X(s, t)}{\partial t} = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) dx$$

La présence de la frontière immergée passe par l'utilisation d'une fonction . Cependant, dans le contexte des méthodes non conformes, les points de grilles ne coïncident pas avec la position des marqueurs lagrangiens de la frontière immergée. C'est pour cette raison que l'on utilise une fonction régularisée qui distribue le forçage sur plusieurs cellules à proximité de l'interface. Le choix de la fonction de lissage a donné lieu à plusieurs discussions ([80],[117],[104], [10]). C'est une méthode à interface diffuse.

D'autres auteurs ont proposé d'autres expressions du terme de forçage. Ainsi, Goldstein dans [52] propose un terme de *feedback* de la forme :

$$\mathbf{f}_b(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) (dt) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (2.3)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes négatives. Le premier terme peut être interprété comme un champ de force qui tendrait à ramener l'écoulement au repos sur l'interface, autrement dit à respecter la condition de non-glissement. Le second terme peut être vu comme une force s'opposant au mouvement assimilable à une force de traînée. L'auteur définit cette méthode de *feedback* de façon assez poétique et séduisante en affirmant que le terme de forçage se modifie de façon à *apprendre* à imposer la condition limite désirée, si bien qu'il est possible d'imaginer une autre condition limite où on imposerait une vitesse  $\mathbf{v}$  au solide :

$$\mathbf{f}_b(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) (dt) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$$

Le premier terme en intégrale, souvent majoritaire, décroît avec le temps, devient de plus en plus négatif et tend ainsi à diminuer la différence de vitesse entre le fluide à l'interface et le solide. Le désavantage de cette méthode provient des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  qui imposent des contraintes sur le pas de temps. De plus, ces constantes sont souvent difficiles à paramétrer sans perte de généralités et sont donc souvent choisies par des considérations *ad hoc* et subjectives. Par ailleurs, Saiki et Birigen ont montré dans [117] la nécessité d'appliquer la pénalisation dans l'obstacle (pénalisation volumique) et pas seulement sur le contour afin que la méthode converge vers la bonne solution, en particulier pour des écoulements à fort Reynolds.

Une autre classe de méthodes correspondant à un forçage continu sont les méthodes de pénalisation. Elles ont été introduites par Arquis et Caltagirone dans le cadre de la simulation d'écoulements de convection naturelle [5] puis étendues aux obstacles poreux [4] et à un système fluide-solide en milieu poreux [75]. Le principe consiste à considérer le fluide et la structure comme un système unique au sein duquel la perméabilité  $K$  varie. Cette approche permet de considérer l'écoulement dans des obstacles plus ou moins poreux. L'astuce consiste à ajouter un terme dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour modéliser la présence du solide avec un terme de perméabilité suffisamment grand pour que l'obstacle soit considéré comme imperméable et s'apparente donc à un solide rigide. L'équation est l'équation de Navier-Stokes à laquelle on ajoute un terme dit de Darcy (en référence aux travaux de celui-ci sur la porosité) :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \frac{\mu}{K} \mathbf{u} \quad (2.4)$$

Notons au passage que cette équation n'est ni plus ni moins qu'un cas particulier de l'équation (2.3) avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = \frac{\mu}{K}$ . Lorsque  $K \rightarrow 0$ , le terme de Darcy tend vers l'infini et devient prépondérant devant les autres termes de l'équation précédente si bien qu'il ne reste plus que

$\mathbf{u} = 0$ . Physiquement, cela se traduit par un milieu infiniment imperméable dans lequel la vitesse est nulle et permet donc de modéliser un obstacle fixe. Lorsque  $K \rightarrow \infty$ , le terme de Darcy tend vers 0 et devient négligeable devant les autres termes de l'équation si bien que l'on retrouve l'équation de Navier-Stokes classique. Physiquement, cela signifie que le milieu considéré est un milieu à perméabilité infinie et permet donc de modéliser un fluide. Lorsque  $K \rightarrow 0$  et que le terme de Darcy est prépondérant, on remarque que la vitesse appliquée dans le milieu (qui est donc un milieu imperméable, donc un solide) est nulle. Cela revient à imposer aucun mouvement au solide. Cette méthode de pénalisation ne permet donc que de simuler des obstacles rigides fixes. Pour considérer un obstacle mobile, on modifie légèrement l'équation (2.4) afin de pouvoir imposer une condition de Dirichlet non homogène à la frontière de l'obstacle. En effet, le problème à résoudre est constitué des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} && \text{dans le fluide} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{dans le solide} \end{aligned}$$

Ces deux équations peuvent être exprimées de façon unifiée en introduisant la fonction indicatrice  $\chi$  et le paramètre de pénalisation  $\beta$  :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \chi^{-1} \beta (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \quad (2.5)$$

La fonction  $\chi$  vaut 1 dans le solide et 0 ailleurs. Par conséquent lorsque l'on se trouve dans le fluide, le dernier terme de l'équation (2.5) s'annule et on retrouve les équations de Navier-Stokes, on modélise alors un fluide.

Lorsque l'on se trouve dans le solide, le dernier terme de l'équation (2.5) existe et sa contribution est déterminée par la valeur de  $\beta$ .  $\beta$  est destiné à être une petite valeur si bien que le terme  $\chi^{-1} \beta (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})$  devient prépondérant et il reste alors  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ .

La pénalisation volumique a été utilisée avec succès pour traiter des problèmes d'interaction fluide-structure ([32], [31], [30], [72], [73], [120], [121]). La démonstration mathématique de la convergence des équations pénalisées vers les solutions de Navier-Stokes a été faite dans [3] suivie des travaux de Carbou et Fabrie [20] sur la démonstration de la vitesse de convergence en  $O(\beta^{-1})$ .

A partir des travaux de [115] sur une pénalisation en viscosité, Caltagirone et Vincent [19] ont proposé une nouvelle méthode de pénalisation fondée sur une nouvelle formulation du tenseur des contraintes. Mise en application dans [113] puis [114], son principe consiste à faire apparaître les différentes contributions du tenseur des contraintes, à savoir la compression, l'élongation, le cisaillement et la rotation. On rappelle que le tenseur des contraintes peut s'écrire :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (-p + \mu \nabla \cdot \mathbf{u}) \bar{\mathbf{I}} + 2 \mu \bar{\boldsymbol{\tau}}$$



où  $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$  est le tenseur des taux de déformation. Le principe de la méthode est de reformuler le tenseur des contraintes de façon à ce que les phénomènes de compression, d'élongation, de cisaillement et de rotation soient explicités avec leur viscosité respective  $(\lambda, \mu, \nu, \kappa)$ .

Pour cela on décompose le tenseur gradient en une partie symétrique  $\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{ij}$  et une partie antisymétrique  $\bar{\bar{\mathbf{A}}}_{ij}$  :

$$\nabla_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_{ij} + \nabla_{ji}) + \frac{1}{2}(\nabla_{ij} - \nabla_{ji}) = \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{ij} + \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{ij}$$

On écrit alors :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (-p + \nabla \cdot \mathbf{u})\bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2(\lambda \bar{\bar{\mathbf{S}}} - \mu \bar{\bar{\mathbf{A}}})$$

Que l'on peut réécrire finalement sous la forme :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (-p + \nabla \cdot \mathbf{u})\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \lambda \bar{\bar{\mathbf{S}}} + 2\mu \bar{\bar{\mathbf{S}}} - 2\mu \bar{\bar{\mathbf{A}}}$$

où  $\lambda, \mu, \nu, \kappa$  valent respectivement  $-\frac{2}{3}, 2, 2$  et  $\kappa$  pour un fluide newtonien. Une explicitation sous forme matricielle s'écrit :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p + \nabla \cdot \mathbf{u} & 0 & 0 \\ 0 & -p + \nabla \cdot \mathbf{u} & 0 \\ 0 & 0 & -p + \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

L'idée est ensuite de résoudre un problème de minimisation sous contrainte d'incompressibilité par un algorithme d'Uzawa dans la zone fluide et d'appliquer la contrainte de déformation dans la zone solide par une méthode de Lagrangien augmenté [142]. L'intérêt d'une telle formulation est de pouvoir pénaliser distinctement chaque contribution du tenseur des contraintes de façon à obtenir la contrainte souhaitée. Notons également que cette écriture originale du tenseur des contraintes permet d'imposer une condition d'incompressibilité en jouant sur le paramètre  $\lambda$ . La pénalisation tensorielle est un outil élégant mais dans la mesure où l'hypothèse de solide rigide est retenue et que le fluide est non-visqueux, la décomposition du tenseur des contraintes n'a plus vraiment d'intérêt puisque la seule contrainte restante est le terme de pression. La pénalisation volumique est la méthode qui retient l'attention car elle permet d'imposer une condition de vitesse de type Dirichlet.

## Forçage discret

Parmi les approches discrètes, Mohd-Yusof [91] et Verzicco [140] proposent un *direct forcing* à travers une expression très simple de  $\mathbf{f}_b$ . Partant des équations de Navier-Stokes sans perturbation due à la frontière immergée, on effectue une prédiction fluide

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{t} = \mathbf{RHS}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{f}_b^{n+\frac{1}{2}}$$

Le forçage intermédiaire  $\mathbf{f}_b^{n+\frac{1}{2}}$  qui génère la condition limite (2.2), à savoir  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{U}_\Gamma$ , est entièrement connu à partir de cette prédiction :

$$\mathbf{f}_b^{n+\frac{1}{2}} = -\mathbf{RHS}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\mathbf{U}_\Gamma^{n+1} - \mathbf{u}^n}{t}$$

L'approche est simple, peu coûteuse et ne dépend pas de paramètres. Cette dernière propriété est la plus intéressante et c'est ce qui fait la popularité de la méthode. En revanche, les points de grille où les forçages seront appliqués ne coïncident pas avec la frontière immergée. Plusieurs procédures ont été proposées pour traiter cette non-conformité [34]. On peut donc éventuellement s'affranchir de l'utilisation d'une fonction de régularisation pour lisser le forçage sur plusieurs mailles à l'instar de Peskin, bien que certains auteurs critiquent ce choix en raison des oscillations sur les forces hydrodynamiques qui peuvent apparaître [137]. Fadlun et al. ont montré dans [34] que l'application du *direct forcing* de Mohd-Yusof plutôt que le *feedback forcing* de Goldstein permet une résolution numérique beaucoup plus rapide et présente donc un intérêt majeur pour la simulation d'écoulements 3D.

L'imposition de la condition limite (2.2) sur la frontière immergée peut se faire par des *ghost-cell*. On définit une *ghost-cell* comme étant une cellule solide ayant au moins une cellule voisine dans le fluide. L'idée est de modifier le stencil de discrétisation pour les *ghost-cells* de façon à imposer la condition limite sur la frontière immergée. Prenons l'exemple de la figure suivante :

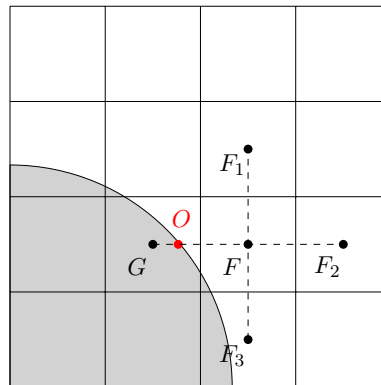


FIGURE 2.1 – Stencil de discrétisation pour une méthode *ghost-cell*

Imaginons une résolution en différences finies. Pour calculer la solution fluide au point F, il est nécessaire de connaître les solutions des cellules intervenant dans le stencil de discrétisation, en particulier la solution au point G. Ce dernier correspond à une *ghost-cell*, une cellule solide pour laquelle on ne dispose pas de valeur définie car ne faisant pas partie du domaine fluide. En revanche, on sait qu'au point O, la condition (2.2) doit s'appliquer. Il est donc possible par l'intermédiaire d'un schéma d'interpolation faisant intervenir les cellules fluides voisines F1, F2 et F3, ainsi que la condition limite en O de déterminer une solution artificielle en G. Cette solution fictive en G existe uniquement dans le but d'imposer explicitement une condition de Dirichlet en O. Une interpolation classique permettant d'obtenir la solution d'une variable générique en G peut être par exemple une interpolation bilinéaire (trilinéaire en 3D)[89] :

$$= C_1xy + C_2x + C_3y + C_4$$

Tout autre schéma d'interpolation peut être envisagé pour augmenter localement l'ordre de la méthode.

Toutes les méthodes évoquées jusqu'à présent pêchent sur un point particulier qui est celui de la préservation des lois de conservation. La méthode des volumes finis est largement répandue en CFD en raison de sa propriété essentielle de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les techniques inhérentes aux méthodes à frontières immergées n'assurent en aucun cas de telles conservations. C'est pour cette raison qu'ont été introduites les méthodes *cut-cell*. Dans la logique des méthodes volumes finis fondées sur un bilan des flux, les méthodes *cut-cell* permettent de traiter spécifiquement les cellules qui sont traversées par l'interface en recalculant un bilan des flux sur les cellules considérées assurant de ce fait une bonne conservation de la masse. Dans [146], Ye et al. proposent un traitement des cellules qui sont coupées par l'interface. Sous l'hypothèse que l'interface est représentée par une série de segments, les cellules qui sont traversées par celle-ci et dont le centre est dans le solide sont fusionnées avec les cellules fluides voisines. A l'inverse, les cellules coupées par l'interface et dont le centre est dans le fluide sont reconstruite en retirant la partie dans le solide. Les cellules ainsi redéfinies obtiennent une forme trapézoïdale. Toute la spécificité de la méthode consiste ensuite à travailler sur les flux des faces des cellules trapézoïdales et à les calculer par différentes méthodes d'interpolation en conservant un ordre suffisant et une stricte conservation de la masse. On pourra trouver une bonne explication de ces procédures dans [146] et [69]. Dans la continuité des travaux de Ye, Le et al. ont proposé une extension à la simulation d'obstacles mobiles, donnant lieu à d'élégantes simulations de cylindres passant dans un goulot d'étranglement [81]. On ne peut citer toutes les études qui ont été menées sur ce sujet, on pourra aussi se référer aux travaux de Udaykumar [135], [136], [134].

### 2.2.2 Méthodes de domaines fictifs

Les méthodes de frontières immergées s'attachent au traitement du forçage (au niveau continu ou discret) à l'interface fluide-solide, sans se soucier de ce qui se passe dans le solide. En réalité, il n'y a aucune raison de s'y intéresser puisque le solide n'est repéré que par sa frontière avec le fluide et pour la simple et bonne raison qu'aucun maillage ne vient discrétiser le domaine en son sein ou bien que l'on néglige totalement ce qui s'y passe. Il s'agit là d'une distinction avec les méthodes de domaines fictifs. Avec ces dernières, le domaine solide  $\Omega_s$  inclus dans  $\Omega$  est intégralement maillé, peu importe la position de l'obstacle. Il y a donc un maillage cartésien simple de  $\Omega$  qui discrétise  $\Omega_s$  par recouvrement. Ces méthodes sont parfois appelées *immersed domain methods*, en opposition avec les *immersed boundary methods* pour marquer la distinction entre le fait de considérer uniquement la frontière pour le couplage fluide-structure ou le domaine solide tout entier. Au sein de  $\Omega_s$ , certaines équations sont appliquées. A ce titre, l'idée pionnière de Glowinski ([45],[46],[47]) consiste à considérer le terme source supplémentaire dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme un multiplicateur de Lagrange associée à une contrainte dans  $\Omega_s$  qui témoigne du fait que l'obstacle est un solide rigide. En l'occurrence, une façon d'assurer la rigidité dans  $\Omega_s$  est d'imposer un tenseur des déformations nul :

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = 0 \quad (2.6)$$

Améliorée par Patankar dans [101], [102] et [122], la méthode se dérive par l'écriture de la formulation faible. Elle sera au centre du développement du solveur d'interaction fluide-structure de ce travail. Aussi la formulation variationnelle y sera plus longuement discutée dans la section suivante.

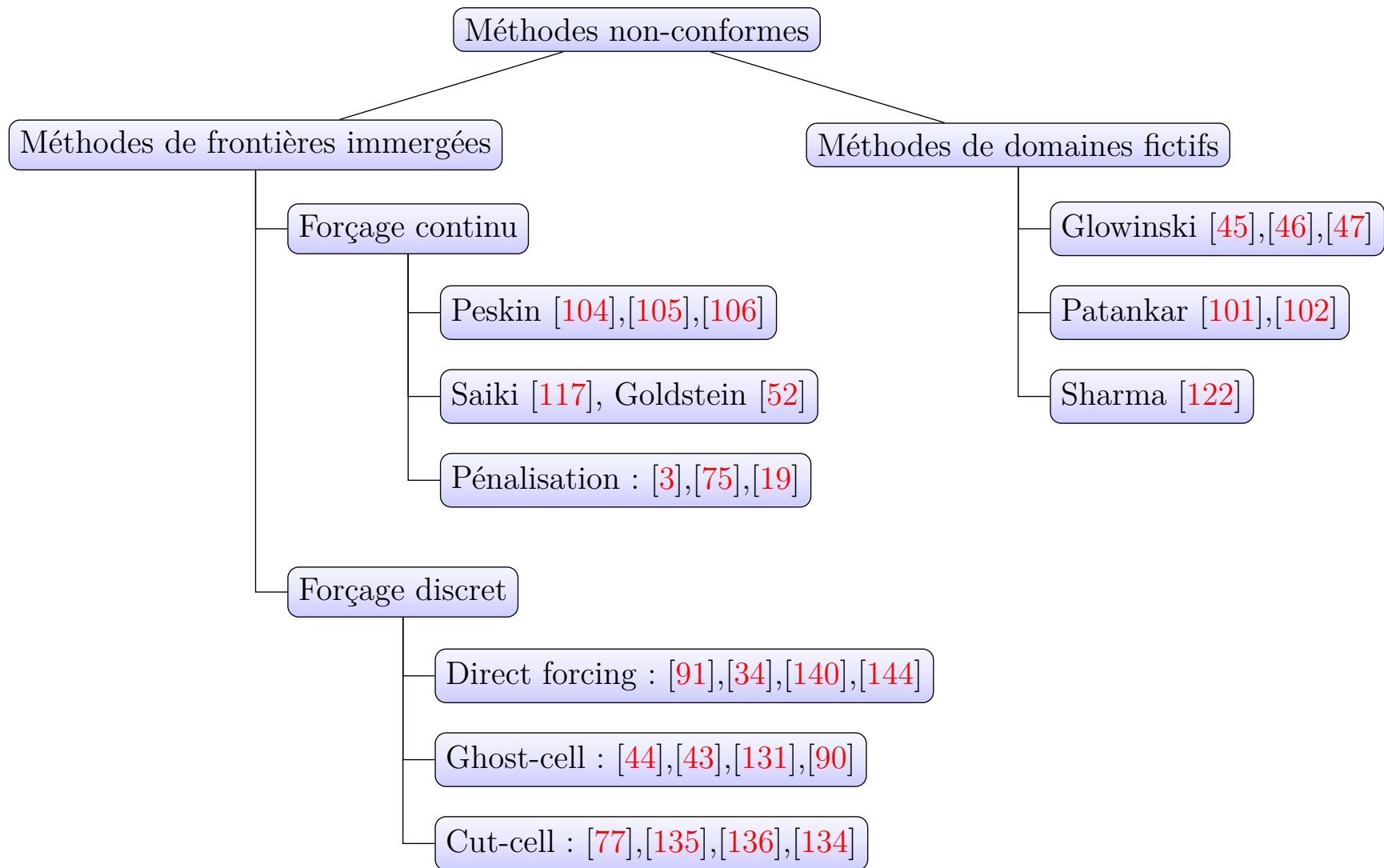


FIGURE 2.2 – Résumé des méthodes non-conformes mentionnées dans la littérature

## 2.3 Vers un modèle unifié

Ce travail s'oriente vers le développement d'une méthode monolithique, c'est à dire la considération d'une seule équation permettant de traiter simultanément le mouvement du fluide et du solide. Pour comprendre le fondement mathématique d'une telle unification, il est d'abord nécessaire d'exposer ce qui se fait classiquement lors d'une approche partitionnée. On détaillera ensuite la démarche pour proposer un modèle unifié.

### 2.3.1 Formulation de l'hypothèse de solide rigide

Avant toute chose, il est impératif de préciser le fait que l'on se place dans l'hypothèse de **solide rigide** de masse volumique  $\rho_s$  constante. Cette hypothèse est extrêmement forte et apporte des informations considérables qui ont véritablement orienté le travail de recherche. La rigidité peut être exploitée de différentes manières. Aussi, on détaille ici quelques unes des formulations de l'hypothèse de solide rigide que l'on sera amené à rencontrer. En l'occurrence, on montre certaines relations entre les trois équations suivantes dans  $\mathcal{V}_s$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0 \text{ sous l'hypothèse petites perturbations} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

La première relation indique que le mouvement d'un solide rigide s'exprime de manière unique comme la composition d'une vitesse de translation  $\mathbf{V}_G$  et une vitesse de rotation  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  où  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur vitesse instantanée de rotation et  $\mathbf{r}$  le rayon vecteur entre un point M quelconque du solide et son centre de gravité G. La seconde relation exprime une condition d'incompressibilité. Il s'agit plutôt d'une équation de la mécanique des fluides. La troisième relation traduit une égalité tensorielle et impose que le tenseur des déformations soit nul. C'est la conséquence la plus directe d'une condition de rigidité : un solide rigide est indéformable, son tenseur des déformations est donc nul.

Durant les développements qui vont suivre dans les sections suivantes, on sera amené à utiliser une ou plusieurs de ces égalités. Il convient de démontrer une équivalence et une implication.

On veut montrer dans un premier temps que  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] = 0 \quad \mathbf{u} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} :$

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] = 0 \quad \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} = - \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} = \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes. On en déduit la dépendance des fonctions  $u, v$  et  $w$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(y, z) = a + y - z \\ v(x, z) = b - x + z \\ w(x, y) = c + x - y \end{array} \right.$$

qui se réécrit sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Or ce dernier résultat n'est autre que la composition d'une vitesse de translation et d'une vitesse de rotation, on y reconnait notamment la présence d'une matrice anti-symétrique caractéristique d'une rotation :

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

avec :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_G = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Compte tenu du système (2.8), on a  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  donc en particulier  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ . Alors on a l'implication  $\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0 \implies \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$  :

La première égalité de (2.7) est équivalente à la troisième et cette dernière implique la seconde.

### 2.3.2 Modèle partitionné

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert ou fermé. Un obstacle rigide indéformable  $\Omega_s$  est considéré dans l'écoulement tel que  $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$ . Le mouvement d'un solide rigide indéformable est régi par les équations de la mécanique du solide :

$$m \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \int_{\partial \Omega_s} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega_s} \rho \mathbf{g} \, d\Omega_s \quad (2.9)$$

$$\overline{\mathbf{J}} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \int_{\partial \Omega_s} \mathbf{r} \times (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_{\Omega_s} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} \, d\Omega_s \quad (2.10)$$

où  $m$  est la masse du solide,  $\mathbf{V}_G$  est la vitesse de translation du solide,  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\overline{\mathbf{J}}$  la matrice d'inertie du solide,  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur rotation du solide et  $\mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{M}$  où  $G$  est le centre de gravité du solide et  $M$  un point quelconque du solide. Sous l'hypothèse de solide rigide, la vitesse  $\mathbf{u}_s$  du solide en un point  $M$  peut s'écrire comme la composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation :

$$\mathbf{u}_s(M) = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.11)$$

Souvent, le problème d'interaction fluide-structure composé d'une part d'une partie solide  $\Omega_s$  et d'une partie fluide  $\Omega_f$  ( $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$ ) est résolu de façon partitionnée, c'est à dire que les systèmes (1.2-1.3-1.4) et (2.9-2.10) sont résolus de manière séparée et indépendante avec leurs solveurs propres. L'interaction proprement dite entre la structure et le fluide est transmise par l'intermédiaire des conditions limites sur  $\partial \Omega_s = \partial \Omega_f \setminus \Omega_s$  entre les deux systèmes. Les équations de saut permettent d'écrire [22] :

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial \Omega_s \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega_s$ ,  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega_f$  et :

$$[\overline{\boldsymbol{\sigma}}] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_s \quad (2.13)$$

La contrainte normale ne présente pas de saut à la traversée de l'interface. Dans le cas contraire, cela correspond à une pénétration du fluide dans le solide ou à la création de vide à l'interface, ce qui n'est ni souhaité, ni souhaitable.



Le système d'interaction fluide-structure partitionné s'écrit donc :

Dans  $\Omega_f$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \\ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = 0 \\ p = p_0 + c_0^2(\rho - (\rho_A + (1 - \alpha)\rho_W)) \end{array} \right.$$

Dans  $\Omega_s$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \int_S \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho \mathbf{g} \, dV \\ \overline{\mathbf{J}} \frac{d}{dt} = \int_S \mathbf{r} \otimes (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_V \mathbf{r} \otimes \rho \mathbf{g} \, dV \\ \mathbf{u}_s(M) = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{r} \end{array} \right.$$

Sur  $\partial \Omega_s$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} \end{array} \right.$$

### 2.3.3 Modèle unifié

Contrairement à l'approche partitionnée où la partie fluide et la partie solide vérifient deux équations indépendantes résolues séparément, une modélisation monolithique utilise une seule équation pour représenter le mouvement du fluide et de la structure. Toute la subtilité de la méthode consiste à considérer le solide comme un fluide (on trouve souvent l'appellation *rigid-fluid* dans la littérature) au sein duquel le mouvement est rigidifié pour correspondre au mouvement classique d'un solide rigide décrit par la mécanique du solide (c'est à dire trois translations et trois rotations). Comme évoqué dans le chapitre 2.2, la méthode utilisée ici fait partie des méthodes non conformes et consiste à ajouter un terme source supplémentaire dans l'équation de quantité de mouvement pour rendre compte de l'effet d'une structure dans un écoulement.

Soit  $\mathbf{x} \in R^3, t > 0$ . Le système d'équations unifié considéré sur  $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \chi \mathbf{A} \mathbf{R} \\ p = p(\rho, \theta) \\ \mathbf{u}|_{\Omega_s} = \mathbf{u}_{\text{rig}} \end{array} \right.$$

où  $\chi$  est la fonction indicatrice du solide définie par :

$$\chi = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in f \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in s \end{cases}$$

et  $\mathbf{AR}$  un terme traduisant la présence d'un obstacle dans l'écoulement. Ce terme est dit *anti-rigide* pour des raisons qui seront expliquées plus loin. Son expression sera explicitée également plus tard.  $\mathbf{u}_{\text{rig}}$  correspond à une vitesse rigide dans le solide.

## 2.4 Extension de la formulation uide

L'extension des équations fluides dans la partie solide n'est pas triviale. Cette section vise à préciser notamment les conditions d'interface à respecter pour ne pas introduire de discontinuités à l'interface fluide-solide. On rappelle en amont ce qui se fait en incompressible car l'essentiel du travail consiste à effectuer une analogie avec les méthodes incompressibles pour étendre le problème d'interaction fluide-structure aux écoulements compressibles.

### 2.4.1 Formulation variationnelle pour Navier-Stokes incompressible

Prenons l'équation de Navier-Stokes incompressible et écrivons le tenseur des contraintes sous la forme  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}, p) = -p\bar{\mathbf{I}} + 2\bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]$  :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + 2 \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir la formulation faible, on multiplie cette équation par une fonction test  $\mathbf{v}$  de classe  $C^1$  s'annulant au bord  $\partial$  et on intègre sur tout le domaine :

$$\int \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = - \int \nabla p \cdot \mathbf{v} + 2 \int (\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v} + \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

Par application des formules de Green :

$$\begin{aligned} \int \nabla p \cdot \mathbf{v} &= \int p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \int p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \\ \int (\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v} &= \int (\bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} - \int \bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \nabla \mathbf{v} \end{aligned}$$

Les intégrales sur le bord s'annulent car  $\mathbf{v}$  s'annule au bord.

Par ailleurs,  $\bar{\mathbf{D}}$  est symétrique ce qui implique  $\bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \nabla \mathbf{v} = \bar{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \bar{\mathbf{D}}[\mathbf{v}]$ .

De même, on multiplie l'équation de conservation de la masse (se résumant dans le cas incompressible à  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) par une fonction test  $q \in L^2(\Omega)$  et on intègre sur tout le domaine  $\Omega$ . Finalement, la formulation variationnelle s'écrit :

$$\begin{cases} \int \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int p \operatorname{div}(\mathbf{v}) + 2 \int \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}] = \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ \int q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

On procède formellement à une discrétisation temporelle pour se ramener à un problème en espace uniquement et faire un lien avec un problème d'optimisation. En introduisant les formes bilinéaires suivantes,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int \rho \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{t} \cdot \mathbf{v} + 2 \int \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}] \\ b(\mathbf{u}, q) &= \int q \operatorname{div}(\mathbf{u}) \\ F(\mathbf{v}) &= \int \mathbf{f} - (\rho \mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\rho \mathbf{u}^n}{t} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

le problème s'écrit :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) & \mathbf{v} \in C^1(\Omega) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & q \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

On définit un opérateur linéaire  $\mathbf{A}$  tel que  $\mathbf{A}[\mathbf{u}](\mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $\mathbf{B}$  tel que  $\mathbf{B}[\mathbf{u}](q) = b(\mathbf{u}, q)$ . Alors le problème peut prendre encore une autre forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Il s'agit ici de la définition d'un problème de point-selle. Pour s'en convaincre, exprimons la fonctionnelle  $J(\mathbf{u})$  telle que :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{F}, \mathbf{u}$$

On considère le problème de minimiser cette fonctionnelle sous la contrainte  $\mathbf{B} \mathbf{u} = 0$  :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{B} \mathbf{u} = 0} J(\mathbf{u}) \\ \mathbf{B} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte. On peut reformuler ce problème sans contrainte en introduisant un multiplicateur de Lagrange tel que l'on cherche à minimiser la nouvelle fonctionnelle suivante, dit Lagrangien :

$$\min \max \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{F}, \mathbf{u} + p, \mathbf{B} \mathbf{u}$$

La caractérisation du point-selle donne :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}(\mathcal{L}) &= \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{F} + p, \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{F} + \mathbf{B}^\top p = 0 \\ \nabla_p(\mathcal{L}) &= \mathbf{B}\mathbf{u} = 0\end{aligned}$$

On obtient la caractérisation du minimum qui est la relation (2.14). Ainsi, rechercher le point-selle du lagrangien ci-dessus et considérer la formulation variationnelle de l'équation de Navier-Stokes incompressible sont deux problèmes équivalents. On remarque alors que la pression  $p$  agit comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $\mathbf{B}\mathbf{u} = 0$  c'est à dire de  $\int q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  formulation faible de la contrainte d'incompressibilité  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ .

## 2.4.2 Formulation variationnelle IFS

Pour la compréhension de la démonstration qui va suivre, on définit les espaces et les notations sur le schéma suivant :

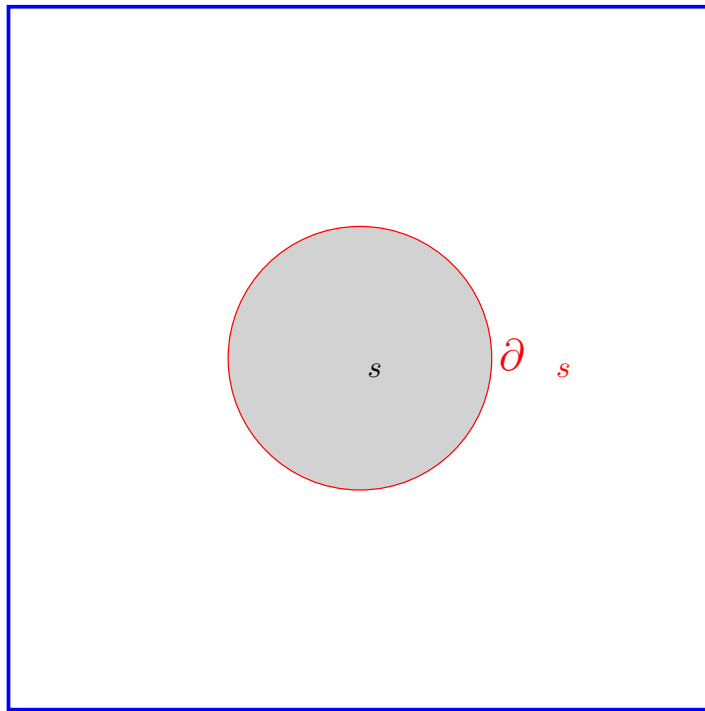


FIGURE 2.3 – Définition des espaces de travail et notations

On précise que sur la figure 2.3,  $\Omega_s$  est inclus dans  $\Omega$ , ce dernier comprend donc intégralement l'espace délimité par la frontière  $\partial \Omega_s$ .

L'objectif de cette section est de proposer une formulation variationnelle unifiée en incompressible, c'est à dire sur  $\Omega$ . Pour cela, on écrit séparément les formulations variationnelles dans  $\Omega_s$  et dans  $\Omega \setminus \Omega_s$ .

On commence par écrire l'équation de Navier-Stokes incompressible pour le domaine  $\Omega_s$  avec le tenseur des contraintes fluides  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_f = -p\overline{\mathbf{I}} + 2\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]$  :

$$\begin{cases} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + 2 \nabla \cdot \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] + \mathbf{g} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

On définit les espaces de fonctions suivants :

L'espace de solution des vitesses fluides :

$$V = \mathbf{u} \in H^1(\Omega_s), \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \Gamma$$

L'espace des fonctions test  $\mathbf{v}_1$  :

$$V_0 = \mathbf{v}_1 \in H^1(\Omega_s), \mathbf{v}_1 = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Le domaine  $\Omega_s$  admet une frontière externe  $\Gamma_s$  et une frontière interne  $\partial \Omega_s$ . On multiplie l'équation (2.15) par une fonction test  $v_1 \in V_0$  et la contrainte d'incompressibilité par  $q \in L^2(\Omega_s)$  et on intègre sur  $\Omega_s$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_s} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_1 = - \int_{\Omega_s} \nabla p \cdot \mathbf{v}_1 + 2 \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v}_1 \\ \int_{\Omega_s} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

L'application des formules de Green permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \nabla p \cdot \mathbf{v}_1 &= \int_{\Gamma_s} (p \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_1 + \int_{\partial \Omega_s} (p \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_1 - \int_{\Omega_s} p \operatorname{div}(\mathbf{v}_1) \\ &\quad \underset{=0 \text{ car } \mathbf{v}_1 \in V_0}{=} \\ \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v}_1 &= \int_{\Gamma_s} (\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_1 + \int_{\partial \Omega_s} (\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_1 - \int_{\Omega_s} \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \nabla(\mathbf{v}_1) \\ &\quad \underset{=0 \text{ car } \mathbf{v}_1 \in V_0}{=} \quad \underset{= \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}_1] \text{ car } \overline{\mathbf{D}} \text{ sym}}{=} \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de l'équation (2.15) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_s} \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_1 + 2 \int_{\Omega_s} \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}_1] \\ \quad - \int_{\Omega_s} p \operatorname{div}(\mathbf{v}_1) - \int_{\Gamma_s} \overline{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n} \mathbf{v}_1 = 0 \\ \int_{\Omega_s} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

On verra par la suite qu'en vertu de la continuité des contraintes à l'interface fluide-solide  $\partial \Omega_s$ , le terme de bord dans l'équation 2.16 faisant intervenir la contrainte fluide  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_f$  traduit en fait les efforts venus du solide.

Écrivons maintenant la formulation variationnelle pour la partie solide. Le domaine solide est représenté comme un fluide incompressible soumis à **une contrainte supplémentaire de rigidité** (*rigid- uide*), c'est à dire de non-déformation :

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] = 0 \quad \text{dans } s \quad (2.17)$$

Au même titre que la contrainte d'incompressibilité (qui est une contrainte scalaire) donnant lieu à une pression  $p$  agissant comme le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte, la contrainte de rigidité (qui est une contrainte tensorielle) donne lieu à un certain tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{L}}}$  agissant comme le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte. Cela revient à considérer un nouveau tenseur des contraintes de la forme [46] :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_s = -p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{L}}} + 2 \overline{\overline{\mathbf{D}}}$$

Ce nouveau tenseur associé à la contrainte  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] = 0$  correspond donc à la résolution de six équations scalaires (puisque  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  est symétrique). Patankar [101] propose une amélioration et fait remarquer qu'appliquer la contrainte de rigidité est équivalent à imposer :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]) = 0 & \text{dans } s \\ \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial^- s \end{cases} \quad (2.18)$$

De ce fait, le tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{L}}}$  n'est plus lui même multiplicateur de Lagrange et peut être représenté par un multiplicateur de Lagrange vectoriel  $\overline{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}$  à trois composantes de sorte que  $\overline{\overline{\mathbf{L}}}$  s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\overline{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}] \quad (2.19)$$

Dès lors, le système que l'on considère est le suivant :

$$\begin{cases} \rho_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + 2 \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] + \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\overline{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}] + \mathbf{g} \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

La première équation du système (2.20) est une équation traditionnellement utilisée en mécanique des fluides. On conçoit alors que son utilisation pour caractériser le mouvement d'un solide peut paraître étrange. Toutefois, on insiste sur le fait que dans ce travail, le solide est considéré comme un fluide soumis à une contrainte de rigidité et qu'utiliser une telle équation est légitime. En l'occurrence, on montrera à la fin de ce chapitre que cette équation fluide, sous l'hypothèse d'un champ de vitesse rigide, implique un mouvement solide décrit par les équations de la mécanique des solides.

On définit l'espace des fonctions test  $\mathbf{v}_2$  :

$$V_p = \{ \mathbf{v}_2 \in H^1(s), \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{v}_2] = 0 \text{ dans } s \}$$

On multiplie l'équation (2.20) par une fonction test  $v_2 \in V_p$ , la contrainte d'incompressibilité par  $q \in L^2(\Omega_s)$ , la contrainte de rigidité par  $\boldsymbol{\mu} \in H^1(\Omega_s)$  et on intègre sur  $\Omega_s$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_2 = - \int_{\Omega_s} \nabla p \cdot \mathbf{v}_2 + 2 \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v}_2 + \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}]) \cdot \mathbf{v}_2 \\ \int_{\Omega_s} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]) \cdot \boldsymbol{\mu} = 0 \end{array} \right.$$

L'application des formules de Green permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \nabla p \cdot \mathbf{v}_2 &= \int_{\Omega_s} (p \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_2 - \int_{\Omega_s} p \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) \\ \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{v}_2 &= \int_{\Omega_s} (\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_2 - \int_{\Omega_s} \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] : \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{v}_2] \\ &= 0 \text{ car } \mathbf{v}_2 \in V_p \\ \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}]) \cdot \mathbf{v}_2 &= \int_{\Omega_s} (\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_2 - \int_{\Omega_s} \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] : \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{v}_2] \end{aligned}$$

et pour la condition de rigidité :

$$\int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]) \cdot \boldsymbol{\mu} = \int_{\Omega_s} (\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\mu} - \int_{\Omega_s} \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]$$

$\int_{\Omega_s} (\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\mu} = 0$  par 2.18

La formulation variationnelle de l'équation (2.20) s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_2 + \int_{\Omega_s} \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] : \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{v}_2] - \int_{\Omega_s} p \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) \\ \quad - \int_{\Omega_s} ((-p + 2 \frac{\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]}{\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}_s}) + \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}]) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_2 = 0 \\ \int_{\Omega_s} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \int_{\Omega_s} \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

On verra par la suite qu'en vertu de la continuité des contraintes à l'interface fluide-solide  $\partial \Omega_s$ , le terme de bord dans l'équation (2.21) faisant intervenir la contrainte solide  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}_s}$  traduit en fait les efforts venus du fluide. Par analogie avec la section précédente où le terme  $\int_{\Omega_f} q \operatorname{div}(\mathbf{u})$  était associé à  $\int_{\Omega_f} p \operatorname{div}(\mathbf{v})$  où  $p$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité, le terme  $\int_{\Omega_s} \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}] : \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\mu}]$  est associé à un terme  $\int_{\Omega_s} \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] : \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{v}]$  où  $\boldsymbol{\lambda}$  est un champ vectoriel agissant comme un multiplicateur de Lagrange de la contrainte de rigidité. Remarquons deux choses ici :

- ▶ le terme  $\int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}_2]$  est nul car  $\mathbf{v}_2 \in V_p$ . Cependant, le garder va permettre d'écrire la formulation faible sur l'espace entier .
- ▶ la contrainte de rigidité  $\int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0$  et la contrainte d'incompressibilité exprimée par  $\int_s q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$  sont redondantes puisque  $\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0 \implies \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . Là encore, garder les deux termes permettra d'écrire la formulation variationnelle unifiée.

En sommant les formulations variationnelles (2.16-2.21) pour considérer les intégrales sur tout entier, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_s \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_1 + \int_s \rho_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_2 + 2\nu \int_s \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}_1] \\ + \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}_2] - \int_s p \operatorname{div}(\mathbf{v}_1) + \int_s p \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) - \int_s (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_1 + \int_s (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_s \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_2 = 0 \\ \int_s q \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \int_s q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Dès lors, il est nécessaire d'introduire la fonction  $\mathbf{v}$  suivante :

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{v}_1 & \text{dans } s \\ \mathbf{v}_2 & \text{dans } s \end{cases}$$

respectant la condition  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}$ . Cette définition d'une "fonction test unifiée" permet de grouper certains intégrales de la formulation (2.22). Par ailleurs, on remarque que les termes de bords s'annulent par la relation (2.13). **On retrouve ici la condition essentielle de continuité des contraintes à l'interface.** Dès lors, il est possible d'écrire [101] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + 2 \int \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}] - \int p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \\ + \int_s (\rho_s - \rho_f) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}] = 0 \\ \int q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

On procède formellement à une discrétisation temporelle pour se ramener à un problème en espace uniquement et faire un lien avec un problème d'optimisation. En introduisant les



formes bilinéaires suivantes,

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int \rho_f \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{t} \cdot \mathbf{v} + \int_s (\rho_s - \rho_f) \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{t} \cdot \mathbf{v} + 2 \int \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}] \\
 b(\mathbf{u}, q) &= \int q \operatorname{div}(\mathbf{u}) \\
 c(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) &= \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] \\
 F(\mathbf{v}) &= \int \rho_f \mathbf{g} - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\mathbf{u}^n}{t} \cdot \mathbf{v} + \int_s (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\mathbf{u}^n}{t} \cdot \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

le problème s'écrit :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \\ c(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = 0 \end{cases}$$

En définissant les opérateurs adéquats, on peut réécrire le problème sous la forme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top & \mathbf{C}^\top & \mathbf{u} & \mathbf{F} \\
 \mathbf{B} & 0 & 0 & p & = 0 \\
 \mathbf{C} & 0 & 0 & \boldsymbol{\lambda} & 0
 \end{array}$$

Alors, par analogie avec la section précédente, ce problème revient à rechercher le point-selle du lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} + p, \mathbf{B} \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{F}, \mathbf{u}$$

On retrouve bien que  $\boldsymbol{\lambda}$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0$  au même titre que  $p$  agit comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ .

**Remarque :** Une autre façon de comprendre l'expression (2.19) est de faire une analogie avec les méthodes de pénalisation en viscosité. Un terme  $\frac{1}{t} \nabla \cdot (\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}])$  est ajouté dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement afin de pénaliser la contrainte visqueuse et de rendre le solide infiniment visqueux c'est à dire rigide. Ce terme tend vers  $\nabla \cdot (\overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}])$  lorsque  $t$  tend vers 0, ce qui correspond effectivement à une décomposition du tenseur des contraintes sous la forme  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_s = -p \overline{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}] + 2 \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}]$

### 2.4.3 Formulation variationnelle IFS pour Euler compressible

L'extension de la formulation variationnelle (2.23) aux équations d'Euler compressibles ne présente pas de difficulté particulière. En effet,  $\overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0 \iff \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  dans le solide et comme évoqué précédemment, ces deux contraintes de rigidité et d'incompressibilité sont redondantes dans l'équation (2.23). Par conséquent, on peut s'affranchir totalement de la

contrainte d'incompressibilité sur tout le domaine . La formulation variationnelle unifiée du problème d'interaction fluide-structure s'en retrouve donc simplifiée et on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \int p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \\ + \int_s (\rho_s - \rho_f) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} + \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{v}] = 0 \\ \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] = 0 \end{array} \right.$$

La pression  $p$  n'est ici plus une inconnue car elle est donnée explicitement par la loi de fermeture. On procède formellement à une discrétisation temporelle pour se ramener à un problème en espace uniquement et faire un lien avec un problème d'optimisation. En introduisant les formes bilinéaires suivantes,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int \rho_f \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \mathbf{v} + \int_s (\rho_s - \rho_f) \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \mathbf{v} \\ b(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) &= \int_s \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\mu}] : \overline{\mathbf{D}}[\mathbf{u}] \\ F(\mathbf{v}) &= \int p \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \int \rho_f \mathbf{g} - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v} + \int_s (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

le problème s'écrit :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = 0 \end{cases}$$

et en introduisant les opérateurs adéquats, on peut obtenir le problème sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top & \mathbf{u} \\ \mathbf{B} & 0 & \boldsymbol{\lambda} \end{array} = \begin{array}{c} F \\ 0 \end{array}$$

ou sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\min \max \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{F}, \mathbf{u}$$

Par analogie avec l'incompressible, on remarque alors que  $\boldsymbol{\lambda}$  multiplicateur de Lagrange associée à la contrainte de rigidité joue exactement le rôle d'une pression, à ceci près qu'il s'agit désormais d'une quantité vectorielle.

Pour aller plus loin sur le rôle de  $\boldsymbol{\lambda}$  comme pression, on rappelle que le tenseur des contraintes dans le fluide s'écrit  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_f = -p_f \overline{\mathbf{I}}$  et son équivalent dans le solide s'écrit  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_s = -p_s \overline{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}]$  faisant intervenir un tenseur  $\overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}]$  permettant de rigidifier  $s$ . La condition de continuité des contraintes à l'interface sur fluide-solide impose :

$$-p_f \cdot \mathbf{n} = -p_s \cdot \mathbf{n} + \overline{\mathbf{D}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n}$$

On comprend qu'en vertu de la loi de fermeture (1.5), la pression  $p_s$  dans un solide de masse volumique constante est constante et ne correspond en rien au prolongement naturel de

la pression fluide  $p_f$  depuis  $\mathbf{f}$ . Il paraît donc évident que le terme  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n}$  de l'équation ci-dessus apporte obligatoirement une contribution telle que la continuité des contraintes est assurée. Cette contribution peut s'exprimer comme celle d'une pression artificielle. Supposons qu'il existe un champ vectoriel  $\boldsymbol{\lambda}$  et une pression  $p_{art}$  tels que :

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n} = -p_{art} \cdot \mathbf{n} + \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n} \quad (2.24)$$

alors la continuité des contraintes s'écrirait :

$$-p_f \cdot \mathbf{n} = -(p_s + p_{art}) \cdot \mathbf{n} + \overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n}$$

Si  $p_{art}$  est une pression artificielle bien choisie telle que cette pression additionnée à la pression dans le solide  $p_s$  (constante) soit égale à la pression fluide  $p_f$ , la continuité des contraintes est assurée avec pour conséquence que  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n} = 0$  et  $-p_f \cdot \mathbf{n} = -(p_s + p_{art}) \cdot \mathbf{n}$ . Il existe en fait une infinité de couple  $(\boldsymbol{\lambda}, p_{art})$  telle que la continuité des contraintes soit toujours assurée. Le terme  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}] \cdot \mathbf{n}$  renferme une pression artificielle qui est toujours en mesure de compenser la pression solide pour assurer la continuité avec la pression fluide, sous réserve de l'existence de la décomposition (2.24). Démontrons ce dernier point :

Soit  $p_{art} = p_{art}(x, y, z)$  et  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ . Un calcul algébrique permet d'extraire les six relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = p_{art} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = p_{art} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial z} = p_{art} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial z} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} = \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} \end{array} \right.$$

Après quelques calculs, il devient possible de découpler les équations et de dégager l'équation de Poisson vectorielle suivante :

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} - \nabla p_{art}$$

Cette dernière équation, supplantée de la condition limite donnée par (2.24), permet donc de déduire la solution  $\boldsymbol{\lambda}$ . Il existe donc une décomposition du tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\boldsymbol{\lambda}]$  donnée par la relation (2.24) permettant d'assurer en toutes circonstances une continuité des contraintes à l'interface fluide-solide. On verra dans le chapitre 3 que  $p_{art}$  n'est jamais explicitée et que  $p_s$  n'est jamais utilisée dans la méthode numérique. On utilise uniquement  $p_f$  pour assurer un prolongement continu de la pression par une méthode de type *ghost-uid*

## 2.5 Identification du terme anti-rigide

Dans les méthodes incompressibles, le découplage vitesse-pression trouve sa genèse dans la formulation de la vitesse comme la composition d'une partie irrotationnelle et d'une partie solénoïdale. Par analogie, dans ce travail on décompose la vitesse  $\mathbf{u}$  comme la somme d'une vitesse rigide et d'une vitesse anti-rigide. Le terme supplémentaire que l'on rajoute dans l'équation de quantité de mouvement pour prendre en compte la présence de l'obstacle dans l'écoulement fluide prend alors la forme d'un terme anti-rigide. Ce qui suit explique pourquoi.

Reprenons l'équation de quantité de mouvement vérifiée par le fluide :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho\mathbf{g} \quad (2.25)$$

On veut maintenant montrer que cette équation prise dans la partie rigide  $\Omega_s$  sous la contrainte  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rig}}$  fait apparaître un terme  $\mathbf{AR}$  associé à cette contrainte de rigidité. On a vu dans la section précédente que ce terme peut s'expliciter comme un multiplicateur de Lagrange et qu'il peut s'exprimer comme la divergence d'un tenseur. On vérifie ici qu'il s'agit bien d'un terme dit *anti-rigide*.

On introduit un sous-espace vectoriel de dimension finie appelé l'espace des mouvements rigides tel que :

$$\mathcal{F} = \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega_s), \mathbf{u} = \mathbf{V}_{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{r} \}$$

Autrement dit, il s'agit de l'espace des vitesses qui se décomposent comme une translation et une rotation. On définit le projecteur orthogonal  $P$  de  $\mathbf{u}$  sur  $\mathcal{F}$  avec les propriétés suivantes qui en découlent :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - P(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega_s)} &= \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_s)} \\ \mathbf{u} &= P(\mathbf{u}) + Q(\mathbf{u}) \\ P \circ Q &= 0 \\ P \circ P &= P \end{aligned}$$

La vitesse  $\mathbf{u}_{\text{rig}}$  est donc simplement la projection de la vitesse  $\mathbf{u}$  sur l'espace des mouvements rigides :  $\mathbf{u}_{\text{rig}} = P(\mathbf{u})$  et s'exprime donc comme la somme d'une vitesse de translation (paramétrée par  $\mathbf{V}_{\mathbf{G}}$ ) et d'une vitesse de rotation (paramétrée par  $\boldsymbol{\omega}$ ).

Pour la démonstration qui suit, on fait l'hypothèse que toutes les termes de l'équation (2.25) appartiennent à  $L^2(\Omega_s)$ . On a donc le droit d'appliquer l'opérateur de projection défini ci-dessus à tous les termes de cette équation, ce qui donne, en utilisant la propriété de linéarité du projecteur :

$$P\left(\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}\right) + P(\text{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) = P(-\nabla p) + P(\rho\mathbf{g}) \quad (2.26)$$

Étudions chacun des termes de cette nouvelle égalité.

► terme en temps

Dans  $\mathcal{S}$ ,  $\mathbf{u} = P(\mathbf{u})$ , un mouvement initialement rigide le reste au cours du temps donc :

$$P\left(\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}\right) = \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\partial(\rho P(\mathbf{u}))}{\partial t}$$

► terme convectif

Considérons le terme suivant :

$$\operatorname{div}(\rho P(\mathbf{u}) \quad P(\mathbf{u})) = \underbrace{\rho \nabla(P(\mathbf{u}))}_{\mathbf{A}} \underbrace{P(\mathbf{u})}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\rho P(\mathbf{u})}_{\mathbf{c}} \operatorname{div}(P(\mathbf{u}))$$

$\mathbf{A}$  est une matrice et  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  des vecteurs. Alors si la partie symétrique de  $\mathbf{A}$  est nulle, le produit matrice vecteur  $\mathbf{A}\mathbf{b}$  représente une rotation et le vecteur  $\mathbf{c}$  une translation, c'est à dire un mouvement rigide. Comme,  $\mathbf{u} = P(\mathbf{u})$  dans  $\mathcal{S}$ , on a :

$$\operatorname{div}(\rho P(\mathbf{u}) \quad P(\mathbf{u})) = \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \quad \mathbf{u}) = \rho \nabla(\mathbf{u}) \mathbf{u}$$

La partie symétrique de  $\nabla(\mathbf{u})$  correspond à  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}[\mathbf{u}]$  qui est nulle par définition dans  $\mathcal{S}$ . Il s'agit donc d'un terme rigide et on peut écrire :

$$\operatorname{div}(\rho P(\mathbf{u}) \quad P(\mathbf{u})) = P(\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \quad \mathbf{u}))$$

► terme contrainte

On ne peut rien dire de particulier sur la composante rigide ou anti-rigide de ce terme. On peut néanmoins écrire  $P(-\nabla p) = -\nabla p - Q(-\nabla p)$

► terme de forçage

Sous l'hypothèse d'un obstacle de masse volumique constante, le terme de gravité est constant et agit de manière identique en tout point du solide. Il s'agit par conséquent d'une contribution rigide qui n'induit pas de déformations et alors  $P(\rho \mathbf{g}) = \rho \mathbf{g}$

Finalement, l'équation (2.26) peut s'écrire dans  $\mathcal{S}$  :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \quad \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \underbrace{Q(-\nabla p)}_{\mathbf{AR}} \quad (2.27)$$

associée à la contrainte :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rig}} = P(\mathbf{u})$$

$\mathbf{AR}$  s'écrit donc bien comme une composante **anti-rigide** (l'opérateur  $Q$  est l'opérateur anti-rigide). Son signe négatif témoigne du fait que ce terme vient compenser/supprimer toute déviation anti-rigide du champ de vitesse dans l'obstacle afin que celui-ci reste parfaitement rigide. Comme évoqué dans la section précédente,  $\mathbf{AR}$  agit comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $\mathbf{u} = P(\mathbf{u})$

## 2.6 Approximation du modèle uni é

L'extension de la formulation unifiée étant effectuée pour les écoulements compressibles, toute l'interaction fluide-solide repose finalement sur l'imposition d'une vitesse rigide au sein du solide. C'est donc assez naturellement que l'on se tourne vers les méthodes de pénalisation pour approcher le modèle monolithique. On poursuit l'analogie avec l'incompressible en faisant un parallèle entre les méthodes de projection pour l'incompressible et une méthode de projection pour imposer le mouvement de solide rigide.

### 2.6.1 Méthode de projection de type Chorin-Temam

Pour imposer la condition de divergence nulle pour les écoulements incompressibles, une méthode de projection est souvent utilisée. Reprenons la méthode de prédiction-corrrection originelle de Chorin [21] pour les méthodes incompressibles pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation de Navier-Stokes sous contrainte d'incompressibilité de l'écoulement, une première étape dite de prédiction consiste à calculer une solution intermédiaire  $\mathbf{u}^*$  à partir de l'équation sans considérer le terme de pression. En supposant un schéma d'Euler implicite en temps, on obtient :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + t(\mathbf{u}^{n+1} - (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1}) \quad (2.28)$$

Puis on effectue une étape dite de correction où la solution  $\mathbf{u}^{n+1}$  résout :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{t}{\rho} \nabla p^{n+1} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

où l'on requiert que la solution  $\mathbf{u}^{n+1}$  soit un champ solénoïdal. En prenant la divergence de l'équation précédente, on est amené à résoudre l'équation de Poisson suivante :

$$p^{n+1} = \frac{\rho}{t} \operatorname{div}(\mathbf{u}^*)$$

qui permet de calculer le champ de pression permettant de corriger la vitesse intermédiaire  $\mathbf{u}^*$  pour obtenir un champ de vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  à divergence nulle.

Dès lors, on peut remarquer deux choses :

- ▶ le fait de fractionner l'équation par une méthode de prédiction-corrrection correspond à un splitting en temps de l'équation de départ. En effet, il suffit de combiner l'équation (2.28) et (2.29) pour retrouver l'équation de Navier-Stokes. Ce splitting introduit en revanche une erreur (détaillée plus loin).
- ▶ l'équation (2.29) correspond en fait à une décomposition de Helmholtz–Hodge, stipulant qu'un champ de vitesse peut être décomposé de manière unique en une somme d'une partie solénoïdale et d'une partie irrotationnelle :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{sol}} + \mathbf{u}_{\text{irr}}$$

Comme un champ irrotationnel dérive d'un potentiel scalaire, on a  $\mathbf{u}_{\text{irr}} = \nabla \phi$  (car  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ ). Par identification avec l'équation (2.29), on a donc bien  $\mathbf{u}^{n+1}$  champ solénoïdal et  $\nabla p^{n+1}$  agit comme le champ irrotationnel.

- ▶ Le terme qui est splitté ici est le terme de pression, multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle.

Faisons maintenant une analogie avec la méthode utilisée pour traiter l'interaction fluide-structure dans ce travail. On utilise ici également une méthode de projection de type Temam-Chorin à la différence près que le splitting s'exerce maintenant sur le terme anti-rigide, restreint à  $\Omega_s$ , multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de rigidité. La décomposition utilisée pour le champ de vitesse n'est plus une décomposition de type Helmholtz–Hodge mais une décomposition de la vitesse en une somme d'une partie rigide et d'une partie anti-rigide telle que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rig}} + \mathbf{u}_{\text{anti}} = P(\mathbf{u}) + Q(\mathbf{u})$$

Une première étape de prédiction consiste à calculer une solution fluide intermédiaire  $\mathbf{u}^*$  sur  $\Omega_s$  à partir de l'équation (2.27) sans considérer le terme anti-rigide. En supposant un schéma d'Euler explicite en temps et en désignant par  $\mathbf{f}$  l'ensemble des termes sources et convectifs, on a :

$$\frac{(\rho \mathbf{u})^* - (\rho \mathbf{u})^n}{t} = \mathbf{f}^n$$

Puis on considère une étape de correction pour modifier la vitesse dans  $\Omega_s$  uniquement :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{t} = \mathbf{AR} \\ \mathbf{u}^{n+1} = P(\mathbf{u}^{n+1}) \end{cases} \quad (2.30)$$

où l'on requiert que la solution  $\mathbf{u}^{n+1}$  soit un champ rigide. En appliquant l'opérateur  $P$  à la première équation du système (2.30), on a :

$$\rho \frac{P(\mathbf{u}^{n+1}) - P(\mathbf{u}^*)}{t} = P(\mathbf{AR}) = 0$$

Il vient donc que :

$$\mathbf{u}^{n+1} = P(\mathbf{u}^*) \quad (2.31)$$

On en déduit alors que le terme anti-rigide s'exprime :

$$\mathbf{AR} = \frac{\rho}{t}(P(\mathbf{u}^*) - \mathbf{u}^*) = -\frac{\rho}{t}Q(\mathbf{u}^*) = -\frac{\rho}{t}\mathbf{u}_{\text{anti}}$$

Physiquement, on imagine qu'à partir d'un instant  $n$  rigide, le domaine  $\Omega_s$  représenté par l'obstacle a été déformé à l'issue de l'étape de prédiction sur un pas de temps  $t$ . L'étape de correction a pour objectif de rendre  $\Omega_s$  rigide à l'étape  $n+1$ , elle fait donc intervenir  $\mathbf{AR}$  dont la contribution est de venir retrancher toute la composante anti-rigide qui est apparue à l'étape de prédiction.

## 2.6.2 Erreur de splitting

Il est connu que les méthodes à pas fractionnaire telles que celle proposée ici introduisent une erreur numérique due à la non-commutativité des opérateurs différentiels. Pour quantifier cette erreur, considérons l'équation suivante :

$$u'(t) = \mathbf{A}u(t) + \mathbf{B}u(t)$$

avec  $u(t) \in R^N$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B} \in M_n(R)$ . Le splitting de Lie pour cette équation s'écrit :

$$\begin{cases} v'(t) = \mathbf{A}v(t) \\ v(0) = u_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} w'(t) = \mathbf{B}w(t) \\ w(0) = v(t) \end{cases}$$

et on considère  $w(t)$  l'approximation de  $u(t)$  pour  $t \ll 1$ . Théoriquement, la solution  $u(t)$  de l'équation complète s'écrit  $u(t) = u_0 e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$  et  $w(t) = v(t)e^{\mathbf{B}t} = u_0 e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}$ . Ecrivons le développement de Taylor des exponentielles :

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= I_d + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + o(t^4) \\ e^{\mathbf{B}t} &= I_d + t\mathbf{B} + \frac{t^2}{2}\mathbf{B}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{B}^3 + o(t^4) \\ e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &= I_d + t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{t^2}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 + \frac{t^3}{3!}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 + o(t^4) \end{aligned}$$

Alors après quelques calculs, l'erreur de splitting s'écrit :

$$u(t) - w(t) = \frac{t^2}{2}(\mathbf{BA} - \mathbf{AB})u_0 + o(t^3)$$

Le splitting de Lie est exact si les opérateurs différentiels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  commutent. Sinon, le splitting est globalement d'ordre 1. Pour l'équation qui nous intéresse, l'opérateur  $\mathbf{A}$  correspond à l'ensemble des termes de convection et de forçage, tandis que l'opérateur  $\mathbf{B}$  s'identifie au terme anti-rigide. Ces deux opérateurs ne commutent pas, le splitting est donc globalement d'ordre 1 et génère donc une erreur en  $O(t)$ .



### 2.6.3 Lien avec les méthodes de pénalisation

Partant de l'idée de pénaliser la vitesse fluide au sein du solide, on introduit maintenant une approximation du modèle unifié par pénalisation. La contrainte de rigidité imposée par la projection sur les champs de vitesse rigide est relaxée par l'introduction d'un paramètre numérique  $\chi$  multipliant le terme anti-rigide et destiné à être très petit. On approxime donc le modèle unifié régi par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mathbf{A}\mathbf{R} & \text{dans } \Omega_f \\ \mathbf{u} = P(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega_s \end{cases} \quad (2.32)$$

par un modèle unifié pénalisé satisfaisant l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \chi\rho(P(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \quad (2.33)$$

où  $\chi$  est un paramètre numérique destiné à être très petit. Formellement, lorsque l'on se trouve dans le fluide, le terme de pénalisation s'annule ( $\chi = 0$ ) et on retrouve les équations d'Euler, on modélise alors un fluide. Lorsque l'on se trouve dans le solide, ce terme existe et sa contribution est déterminée par la valeur de  $\chi$ , celui-ci étant destiné à être une très petite valeur afin que le terme  $P(\mathbf{u}) - \mathbf{u}$  devienne prépondérant et tende vers 0. La vitesse dans le solide  $\mathbf{u}$  converge alors asymptotiquement vers  $P(\mathbf{u})$ . C'est une pénalisation en vitesse.

Le dernier terme dans (2.33) représente une difficulté conséquente dans l'approximation numérique de cette équation. Il n'est en effet pas possible d'utiliser l'équation telle quelle. Le fait que la vitesse  $P(\mathbf{u})$  à imposer dans l'obstacle dépende de  $\mathbf{u}$  conduit naturellement à s'orienter vers des méthodes de splitting pour pouvoir calculer un champ rigide à partir d'une vitesse issue d'une première itération en temps (prédiction). Dans le cas particulier où la vitesse de pénalisation souhaitée est constante, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des techniques à pas fractionnaire. Une implicitation du terme de pénalisation permet de s'affranchir d'une contrainte sur  $\Delta t$  et le terme  $P(\mathbf{u}) - \mathbf{u}$  admet alors une erreur en  $O(\Delta t)$ . Dans ce cas, choisir  $\Delta t$  de l'ordre de la précision machine suffit à imposer le mouvement rigide.

On se propose de montrer qu'un choix particulier de discrétisation temporelle du terme de pénalisation permet de retrouver l'imposition de la contrainte rigide à partir d'une méthode de prédiction-correction. On propose le splitting en temps suivant :

$$\begin{aligned} \frac{(\rho\mathbf{u})^* - (\rho\mathbf{u})^n}{t} &= \mathbf{f}^n \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{t} &= \chi(P(\mathbf{u}^*) - \mathbf{u}^*) \ll 1 \end{aligned}$$

En discrétisant explicitement le terme de pénalisation, l'étape de correction revient à écrire :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)\mathbf{u}^* + \frac{t}{\Delta t}P(\mathbf{u}^*) \quad (2.34)$$

Alors pour le choix spécifique  $\tau = t$ , on obtient exactement l'équation (2.31) obtenue par une méthode de prédiction-corrrection effectuée sur l'équation (2.32). On remarque que l'équation (2.34) introduit en fait une pondération entre la vitesse prédite et la vitesse rigide. On comprend alors que pour  $\tau \ll t$ , l'équation (2.34) ne permet pas de garantir une composante rigide uniquement. Une autre façon d'aborder le problème est de constater qu'en raison d'un splitting d'ordre 1, le terme  $P(\mathbf{u}^*) - \mathbf{u}^*$  admet une erreur en  $O(\tau)$ . Comme ce terme est multiplié par  $\frac{1}{t}$ , il devient non-borné pour des valeurs de  $\tau \ll t$ . Il serait tout à fait possible d'envisager une discrétisation implicite du terme de pénalisation lors de l'étape de correction. Celle-ci s'écrirait alors :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{t} = \chi(P(\mathbf{u}^*) - \mathbf{u}^{n+1})$$

donnant lieu à l'expression suivante :

$$\mathbf{u}^{n+1} = (1 + \frac{\tau}{t})\mathbf{u}^* + \frac{-\tau}{1 + \frac{\tau}{t}}P(\mathbf{u}^*)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable et il suffit de prendre  $\tau$  de l'ordre de la précision machine pour retrouver l'approximation de l'équation (2.31) à l'ordre  $O(\tau)$  près.

## 2.7 Projection des champs de vitesses rigides

L'étape de correction qui est effectuée après la prédiction fluide et permettant de rigidifier le fluide dans  $\Omega_S$  nécessite le calcul du projecteur  $P$  qui, jusqu'à maintenant, est resté relativement abstrait. Dans la suite, on notera  $\bar{\mathbf{u}}$  la vitesse rigide et  $\mathbf{V}_\omega = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  la vitesse de rotation. Le calcul pratique de  $P$  consiste à minimiser la fonctionnelle suivante au sens de la norme  $L_2$  :

$$\min_{\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{F}} J = \int_S (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^2 \, d\mathbf{s}$$

Le développement de cette intégrale donne :

$$\begin{aligned} J &= \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega_S + \int_S (\mathbf{V}_G + \mathbf{V}_\omega) \cdot (\mathbf{V}_G + \mathbf{V}_\omega) \, d\Omega_S - 2 \int_S \mathbf{u} \cdot (\mathbf{V}_G + \mathbf{V}_\omega) \, d\Omega_S \\ &= \int_S \mathbf{u}^2 \, d\Omega_S + |V|V_G^2 + \int_S \mathbf{V}_\omega^2 \, d\Omega_S + 2\mathbf{V}_G \int_S \mathbf{V}_\omega \, d\Omega_S - 2\mathbf{V}_G \int_S \mathbf{u} \, d\Omega_S - 2 \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_\omega \, d\Omega_S \end{aligned}$$

On annule la dérivée de  $J$  suivant la composante de translation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{V}_G} &= 2\mathbf{V}_G|V| - 2 \int_S \mathbf{u} \, d\mathbf{s} = 0 \\ &= \mathbf{V}_G = \frac{1}{|V|} \int_S \mathbf{u} \, d\mathbf{s} \end{aligned}$$

On annule la dérivée de J suivant la composante de rotation :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} \int_S (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 d_s - 2 \int_S \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) d_s = 0 \\
 &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}} \int_S \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}^2 d_s - \int_S (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 d_s - 2 \boldsymbol{\omega} \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} d_s = 0 \\
 &= \boldsymbol{\omega} = \frac{\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} d_s}{\int_S \mathbf{r}^2 d_s}
 \end{aligned}$$

On rappelle que la matrice d'inertie s'exprime :

$$\bar{\mathbf{J}} = \int_S \mathbf{r}^2 dm = \rho \int_S \mathbf{r}^2 d_s$$

En combinant les équations précédentes, on obtient un champ de vitesse rigide dans le solide en fonction de la vitesse de l'écoulement :

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{|V|} \int_S \mathbf{u} d_s + \rho \bar{\mathbf{J}}^{-1} \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} d_s \mathbf{r}} \quad (2.35)$$

Ainsi la projection  $P$  d'un champ de vitesse quelconque  $\mathbf{u}$  est caractérisée par 2 grandeurs que sont  $\mathbf{V}_G$  et  $\boldsymbol{\omega}$  telles que :

$$P(\mathbf{u}) \begin{cases} \mathbf{V}_G &= \frac{1}{|V|} \int_S \mathbf{u} d_s \\ \boldsymbol{\omega} &= \rho \bar{\mathbf{J}}^{-1} \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} d_s \end{cases} \quad (2.36)$$

De cette définition se déduit la projection d'un terme anti-rigide  $\mathbf{AR}$  qui, par définition, est nulle :

$$P(\mathbf{AR}) \begin{cases} 0 &= \frac{1}{|V|} \int_S \mathbf{AR} d_s \\ 0 &= \rho \bar{\mathbf{J}}^{-1} \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{AR} d_s \end{cases} \quad (2.37)$$

Finalement, l'équation à résoudre en splitting est la suivante :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \frac{\chi}{\rho} \rho(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}), \quad \ll 1 \quad (2.38)$$

avec  $\bar{\mathbf{u}}$  donné par la relation (2.35).

## 2.8 Équivalence des modélisations fluides et solides

Afin de finaliser l'établissement du modèle d'interaction fluide-structure, il s'agit maintenant de vérifier que l'équation (2.38) prise dans  $\mathcal{S}$  puisse effectivement modéliser le mouvement d'un solide rigide, c'est à dire être équivalente aux équations de la mécanique du solide.

Récrivons l'équation (2.32) sous forme de dérivée lagrangienne :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{AR} \quad (2.39)$$

A partir de (2.35) et en utilisant la propriété  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  dans  $\mathcal{S}$ , on a :

$$\frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{S}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\mathcal{S}$$

donc en intégrant l'équation (2.39), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\mathcal{S} &= m \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \int_{\mathcal{S}} \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{g} d\mathcal{S} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{AR} d\mathcal{S}}_{= 0 \text{ par 2.37}} \\ &= \int_{\mathcal{S}} \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{g} d\mathcal{S} \end{aligned}$$

qui est équivalent à l'équation (2.9) décrivant le mouvement d'un solide rigide par un traditionnel PFD issu de la mécanique des solides.

Dérivons maintenant l'expression de  $\overline{\overline{\mathbf{J}}}$  à partir de la formule (2.35) en utilisant la propriété  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  dans  $\mathcal{S}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\overline{\mathbf{J}}} &= \rho \overline{\overline{\mathbf{J}}}^{-1} \int_{\mathcal{S}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} d\mathcal{S} \\ \overline{\overline{\mathbf{J}}} \frac{d}{dt} \overline{\overline{\mathbf{J}}} &= \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} d\mathcal{S} \\ &= \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{r} d\mathcal{S} \end{aligned}$$

En prenant le produit vectoriel de (2.39) par  $\mathbf{r}$  et en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{r} d\mathcal{S} &= \int_{\mathcal{S}} (\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{r}) d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} (\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) d\mathcal{S} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{AR} \cdot \mathbf{r}) d\mathcal{S}}_{= 0 \text{ par 2.37}} \\ \overline{\overline{\mathbf{J}}} \frac{d}{dt} \overline{\overline{\mathbf{J}}} &= \int_{\mathcal{S}} (\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{r}) d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} (\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) d\mathcal{S} \end{aligned}$$

qui est équivalent à l'équation (2.9) décrivant le mouvement d'un solide rigide par un traditionnel PFD issu de la mécanique des solides.

La formulation fluide (2.32) restreinte à  $\Omega_S$  est donc équivalente à une description solide du mouvement prévue par les équations (2.9-2.10). Le solide est considéré comme un fluide au sein duquel la vitesse a été rigidifiée par un opérateur de projection bien choisi.

## 2.9 Conclusion

Un modèle d'interaction fluide-structure a été proposé. A partir d'un rappel de la littérature à ce sujet et inspirés par la philosophie de conception du modèle bi-fluide compressible présenté dans le premier chapitre, les efforts se sont concentrés vers le développement d'une méthode non-conforme fondée sur une représentation unifiée de l'interaction fluide-structure. En particulier, les méthodes de domaines fictifs constituent un intérêt particulier en raison de l'approche envisagée. A partir des travaux de Glowinski [46] et des améliorations de Patankar [101], une formulation variationnelle a été écrite dans un cadre compressible et permet de faire un lien entre la contrainte de rigidité imposée par l'hypothèse de solide rigide et la contrainte de divergence nulle pour les méthodes incompressibles. En l'occurrence, au même titre que la pression joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange associée à la contrainte d'incompressibilité, on a mis en évidence un terme *anti-rigide* en tant que terme source supplémentaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui agit comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de rigidité. L'extension aux écoulements compressibles ne pose pas de difficulté particulière dans la mesure où les deux contraintes sont redondantes.

Cette analogie permet de déployer des méthodes de résolution numérique largement répandues et fiables, comme la méthode de prédiction-corrrection de type Chorin-Temam. Un splitting en temps a été proposé, à l'issue duquel, grâce à un opérateur de projection dans un espace vectoriel bien choisi, la rigidification du domaine solide se résume à une méthode de pénalisation en vitesse identique à celle proposée par Angot [3]. La vitesse de pénalisation  $\bar{u}$  est déduite de celle de l'écoulement à partir du calcul explicite du projecteur  $P$ .

La modélisation proposée, en particulier à travers une approche de splitting en temps et de pénalisation, permet de poser les bases d'une méthode numérique simple à mettre en place et dont la programmation se veut résolument indépendante et modulaire, sans modification profonde de la méthode numérique proposée au chapitre 1. Cette méthode fait l'objet du prochain chapitre.

# 3 Méthode numérique pour le modèle uni é pénalisé

## 3.1 Introduction

Compte tenu du développement du chapitre précédent, le découplage de l'interaction fluide-structure se résume simplement en la résolution successive (splitting en temps) des deux équations suivantes :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \text{ dans } \Omega_s$$

$$\mathbf{u} = P(\mathbf{u}^*) \text{ dans } \Omega_s$$

Le champ de vitesse  $\mathbf{u}^*$  solution de la première équation est issu de l'étape de prédiction. La dynamique du fluide est calculée sur  $\Omega_s$  tout entier, englobant le domaine solide qui est alors considéré comme un domaine fluide. La vitesse au sein de  $\Omega_s$  à cet instant n'est a priori pas rigide. Puis l'étape de correction, par l'intermédiaire d'une pénalisation en vitesse, corrige la vitesse dans le domaine solide  $\Omega_s$  pour que celle-ci corresponde à une vitesse rigide (c'est à dire qui peut s'écrire comme la somme d'une vitesse de translation et d'une vitesse de rotation). Les conditions à l'interface  $\partial \Omega_s$  sont implicites (elles sont explicitées dans les formulations variationnelles fluide et solide puis disparaissent dans la formulation faible unifiée). Toutefois, dans le domaine discret, des traitements locaux à l'interface vont devoir être effectués pour assurer la continuité des vitesses et des contraintes. Par ailleurs, la fonction  $\chi$ , qui permet de distinguer  $\Omega_s$  et  $\Omega_f$ , reste à construire numériquement.

## 3.2 Calcul de la fonction indicatrice

Soit un espace fermé  $\Omega$  incluant deux sous-espaces  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tel que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . La fonction indicatrice  $\chi$ , appelée aussi fonction binaire, fonction "couleur" ou encore fonction de Heaviside selon les auteurs, est une fonction qui ne prend que 2 valeurs dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \chi = 1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \chi = 0 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

Typiquement pour de l'interaction fluide-structure, on utilise une fonction indicatrice qui vaut 1 dans le solide et 0 dans le fluide afin de pouvoir utiliser l'équation pénalisée (2.5). On rappelle également que dans le cadre d'un formalisme eulérien, le maillage n'est pas adapté aux formes de l'obstacle. Par conséquent, initialement, on ne peut pas déterminer la valeur de la fonction indicatrice. C'est bien là le principe des domaines fictifs, la structure est immergée dans le fluide mais on se sait pas quels points du maillage sont effectivement dans le solide. Il faut donc développer une méthode pour calculer la fonction indicatrice pour chaque cellule du maillage.

Comme évoqué précédemment, la fonction indicatrice est une fonction de présence. La cellule considérée est-elle dans le solide à l'instant  $t$ ? On peut poser cette question sous une autre forme équivalente, en considérant la propriété géométrique de l'obstacle qui est un polygone quelconque : un point quelconque de  $\Omega_1$  est-il à l'intérieur du polygone (de l'obstacle)? Cette interrogation est bien connue du domaine de l'infographie et plus généralement de la géométrie informatique.

En infographie, on cherche à modéliser une *scène* contenant des *objets* d'une certaine *texture* éclairés par une *lumière* et vus d'un point de vue *caméra*. Une fois tous ces éléments connus, le moteur graphique des logiciels d'infographie peut effectuer un *rendu* de la scène, c'est à dire une impression à l'écran de la scène avec tous ses objets, ses textures et ses lumières. Lors du rendu, le logiciel détecte si les points de l'espace sont situés dans l'objet et leur affecte le cas échéant une couleur et une texture, c'est ce qu'il permet de "voir" l'objet.

Pour créer l'objet dans l'espace 3D, l'utilisateur le construit à partir d'objets élémentaires simples et de toute une panoplie de *primitives* et de *transformations* offertes par le logiciel. Il en résulte une forme plus ou moins complexe d'un polygone mais surtout la création d'un maillage, c'est à dire une distribution de points (resp. de polygones) qui, reliés entre eux dans le plan (resp. l'espace), déterminent le contour (resp. la surface) de l'obstacle/polygone. Ce maillage lagrangien va servir à déterminer si un point de l'espace  $\Omega_1$  est situé dans l'objet.

Le raytracing (ou *lancer de rayon* en bon français) est une technique principalement utilisée pour le rendu de scène 2D/3D en infographie. La méthode utilise le principe du retour inverse de la lumière. L'idée est de lancer un rayon à partir d'un point de l'espace (en l'occurrence un pixel) dans une certaine direction et de déterminer s'il intersecte un objet, en particulier le maillage surfacique qui le représente. Le nombre d'intersection de ce rayon avec l'objet détermine s'il le point source duquel a été lancé le rayon est dedans ou non. En effet, un nombre d'intersection pair indique que le rayon est entré puis ressorti de l'obstacle donc le point d'où a été tiré le rayon est en dehors de l'obstacle. A l'inverse, un nombre impair

signifie que le rayon est uniquement sorti de l'obstacle, par conséquent, le point duquel a été tiré le rayon se situe dans l'obstacle. Ce résultat se fonde sur le théorème de Jordan.

Le centre de la méthode de raytracing repose donc sur l'algorithme qui détermine l'intersection entre un rayon et un polygone de forme quelconque.

### 3.2.1 Algorithme de Feito-Torres (2D)

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer l'intersection d'un rayon avec un polygone. Un état de l'art à ce sujet sort du cadre de ce travail mais on pourra se référer à [62] et [98] et leurs références respectives pour se faire une idée de la littérature à ce sujet.

Dans ce travail, on choisit d'implémenter l'algorithme de Feito-Torres, présenté dans une version 2D dans [36] puis étendu en 3D dans [37], principalement pour sa simplicité et sa grande capacité d'optimisation [98].

#### Orientation et aire d'un polygone

On rappelle ici quelques principes élémentaires de géométrie indispensables à la construction de l'algorithme. On se place dans un premier temps dans le plan.

- ▶ Un polygone est une *séquence ordonnée* de *points* formant des *arêtes* dont les extrémités se rejoignent pour former une *courbe fermée*.
- ▶ Un triangle a une *orientation* positive lorsque tous ses points intérieurs sont situés à gauche de chacune de ses arêtes, négative sinon.
- ▶ On définit l'*aire* d'un triangle T formé des points  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  comme la valeur du *déterminant* suivant :

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- ▶ L'*aire signée* d'un triangle T est défini par le signe de son déterminant  $[T]$  et vaut  $+ [T]$  si son orientation est positive et  $- [T]$  lorsque son orientation est négative.
- ▶ Pour tout triangle ABC et tout point O, la relation suivante est vraie :

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA]$$

- ▶ L'orientation d'un polygone est déterminée par son *winding number*. Le winding number  $w(P, Q)$  d'un point Q par rapport au polygone P se calcule par la somme des angles  $\widehat{P_i Q P_{i+1}}$ . Si  $w(P, Q) = +2$  alors le polygone est orienté dans le sens



trigonométrique, son orientation est positive. Si  $w(P, Q) = -2$ , le polygone est orienté dans le sens horaire, son orientation est négative.

- De la même façon que pour un triangle, l'aire signée d'un polygone P est défini par le signe de son déterminant [P] et vaut +[P] si son orientation est positive et -[P] lorsque son orientation est négative.

On détaille maintenant comme on peut calculer l'aire d'un polygone à partir d'une décomposition de celui-ci en triangles élémentaires. Soit un point O dans le plan et un polygone P défini par sa suite ordonnée de points  $P = P_1 P_2 \dots P_k$ . La subtilité de la méthode consiste à construire chacun des triangles composés du point O et de chaque arête du polygone, c'est à dire les triangles  $OP_1 P_2, OP_2 P_3 \dots OP_k P_1$ . Alors l'aire signée du polygone P est égale à la somme des aires signées des triangles  $OP_1 P_2, OP_2 P_3 \dots OP_k P_1$  :

$$[P] = \sum_i^n [T_i]$$

et la somme des aires signées de chaque triangle  $T_i = P_{1i} P_{2i} P_{3i}$  est calculé par :

$$[T_i] = [OP_{1i}] + [OP_{2i}] + [OP_{3i}]$$

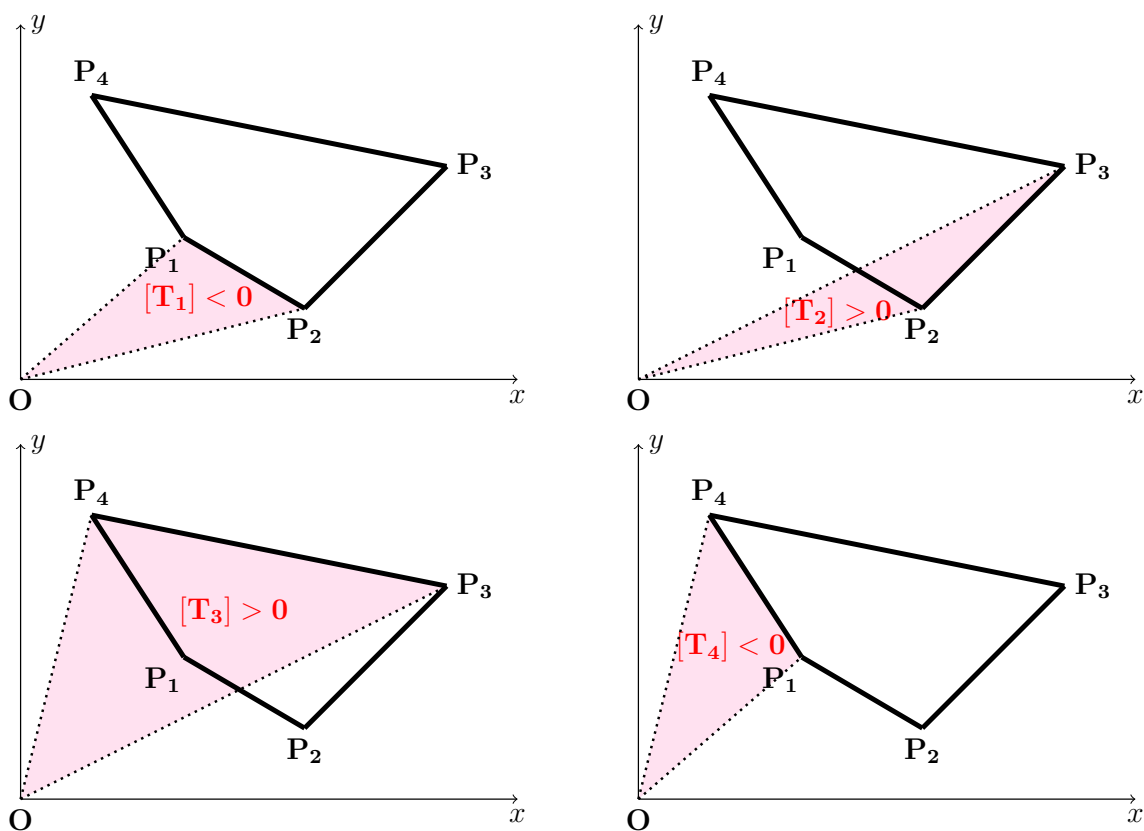


FIGURE 3.1 – Décomposition de l'aire d'un polygone en la somme des aires de ses triangles élémentaires

Pour s'en convaincre, on peut constater sur le schéma 3.1 que la somme des aires signées des triangles  $OP_1P_2$ ,  $OP_2P_3$ ,  $OP_3P_4$ ,  $OP_4P_1$  permet de calculer l'aire  $OP_1P_2P_3P_4$ . Les triangles  $OP_1P_2$  et  $OP_4P_1$  ont une orientation négative, leur aire est négative et on soustrait donc leur valeur à la somme totale ce qui permet de retrouver l'aire du polygone  $P_1P_2P_3P_4$ . Cette aire est signée positive car les points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  sont effectivement ordonnés dans le sens trigonométrique. Sans perte de généralité, le point O est pris comme l'origine du repère, cela permet notamment de simplifier le calcul des déterminants [36]. On écrira par la suite que tout triangle construit à partir du point O origine du repère est un triangle *élémentaire*.

### Test d'inclusion

On définit la fonction *sign* telle que :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Conformément à la définition de l'orientation d'un triangle, un point Q est à l'intérieur d'un triangle ABC s'il se situe à gauche de chaque arête du triangle, autrement dit si :

$$\begin{cases} \text{sign}([QAB]) > 0 \\ \text{sign}([QBC]) > 0 \\ \text{sign}([QCA]) > 0 \end{cases}$$

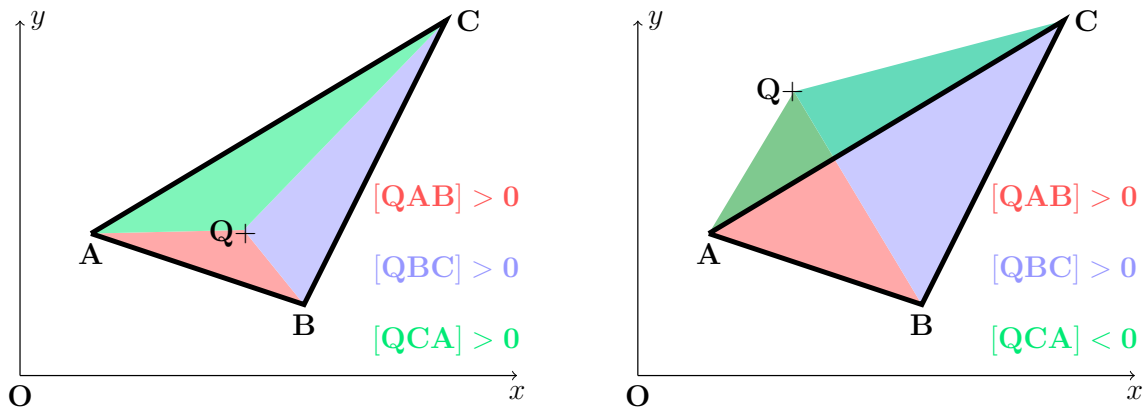


FIGURE 3.2 – Test d'inclusion d'un point dans un triangle : à gauche, les trois déterminants sont positifs, le point Q est dans le triangle. À droite, au moins un déterminant est négatif, le point Q est à l'extérieur de ABC

Ce test d'inclusion d'un point Q courant est effectué pour tous les triangles élémentaires construits à partir des arêtes du polygone P. Si le point Q est dans le triangle élémentaire  $T_i$  courant, un compteur d'inclusion pour ce point est incrémenté de la valeur de  $\text{sign}([T_i])$ .

Par conséquent, chaque triangle élémentaire qui recouvre le polygone et qui contient le point  $Q$  incrémentera le compteur de  $+1$ , et chaque triangle élémentaire qui ne recouvre pas le polygone mais qui contient le point  $Q$  incrémentera le compteur de  $-1$ . Le polygone étant construit comme la somme des triangles élémentaires, le compteur d'inclusion pour le point  $Q$  aura pour valeur finale  $1$  ou  $0$ , c'est à dire une valeur binaire : la fonction indicatrice est reconstruite.

Toute l'ingéniosité de la méthode repose sur l'équivalence entre compter le nombre d'intersections (c'est le but de la méthode de raytracing) et sommer les signes de chaque triangle élémentaire. On suggère au lecteur de se référer à [36] pour davantage de détails et pour le traitement de cas particuliers (point sur une arête, déterminant nul...).

---

**Algorithm 2** Algorithme de Feito-Torres

---

```
1: function INTERSECTION( $Q, O, A, B$ )
2:   Calcule  $|QOA|, |QBO|, |QAB|, |OAB|$ 
3:   if  $|QOA| > 0, |QBO| > 0, |QAB| > 0$  then
4:     compteur = compteur + sign( $|OAB|$ )
5:   if  $Q \in [AB]$  then
6:     compteur = 1
7:   return
8:   if  $Q \in [OA]$  ou  $Q \in [OB]$  then
9:     compteur = compteur +  $\frac{1}{2}$ sign( $|OAB|$ )
```

---

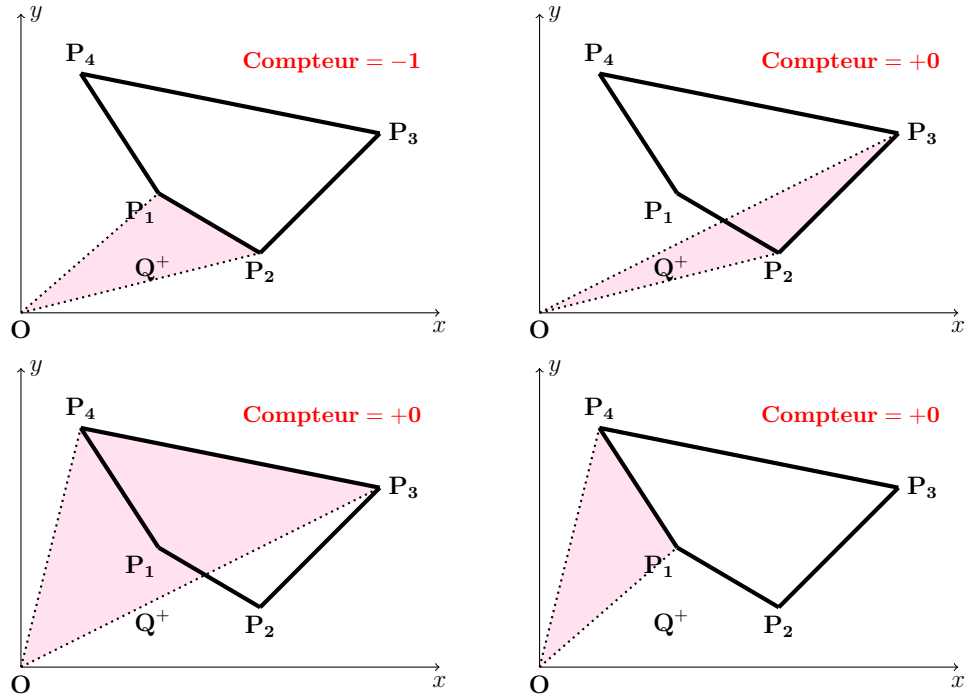


FIGURE 3.3 – La valeur finale du compteur vaut 0, le point  $Q$  est donc à l'extérieur du polygone  $P_1P_2P_3P_4$

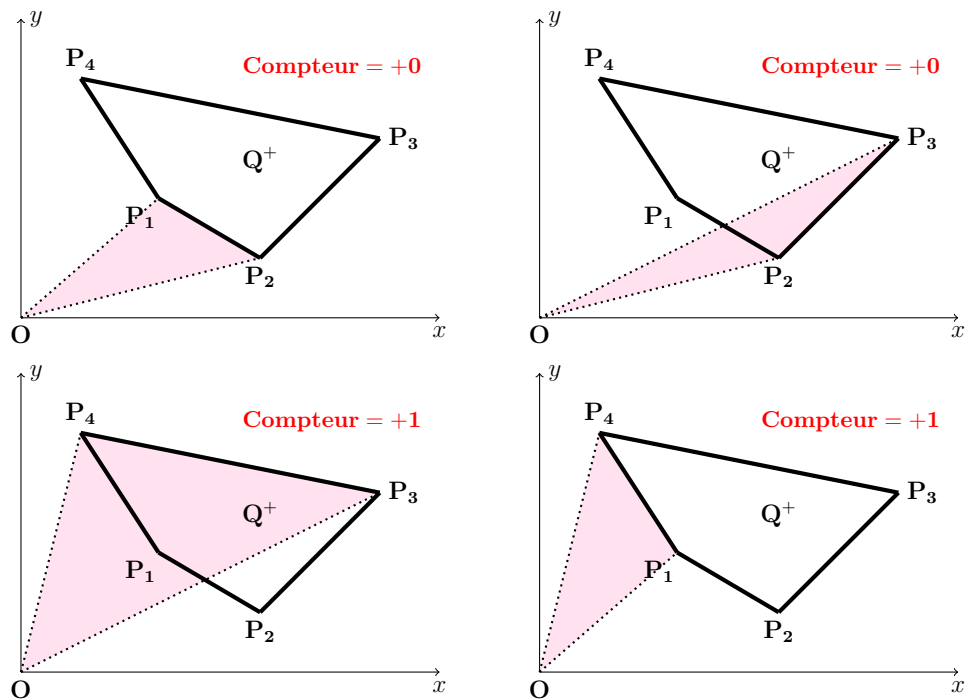


FIGURE 3.4 – La valeur finale du compteur vaut 1, le point  $Q$  est donc à l'intérieur du polygone  $P_1P_2P_3P_4$

### 3.2.2 Algorithme de Möller-Trumbore (3D)

#### Détection d'intersection droite-triangle

Pour reconstruire une fonction indicatrice en 3D, le code numérique bascule sur l'algorithme de Möller-Trumbore. Il s'agit d'un algorithme de détection d'intersection droite-triangle et ne s'applique en cela qu'à des maillages surfaciques triangulaires. Un maillage triangulaire décrit donc la surface du solide et pour un rayon de direction et d'orientation données, l'algorithme teste l'intersection de ce rayon avec chaque triangle du maillage. C'est ensuite le nombre d'intersection qui renseigne sur la position du point d'origine du rayon par rapport au solide :

- ▶ Si le nombre d'intersection est pair, cela signifie que le rayon a effectué plusieurs cycles d'entrée-sortie de l'obstacle. En l'occurrence, à chaque fois, le rayon est entré puis sorti du solide. Le point d'origine du rayon est donc à l'extérieur de l'obstacle. Dans le cas particulier où il n'y a pas d'intersection, alors le rayon ne rencontre jamais le solide et le point d'origine est donc forcément à l'extérieur de celui-ci.
- ▶ Si le nombre d'intersection est impair, cela signifie que le rayon a effectué plusieurs cycles de sortie-entrée-sortie. En l'occurrence, à la dernière intersection, le rayon entre dans le solide ce qu'il signifie que le point d'origine est dans l'obstacle. Dans le cas particulier où il n'y a qu'une intersection alors cela indique que l'on a obligatoirement quitté le solide et donc que le point d'origine est dans celui-ci.

L'algorithme de détection d'intersection est détaillé dans [92], on en rappelle ici les grandes lignes. Tout d'abord, la position d'un point le long d'un rayon d'origine  $\mathbf{O}$  et de direction  $\mathbf{D}$  peut être paramétrisé de la façon suivante :

$$R(t) = \mathbf{O}t + \mathbf{D}$$

La position d'un point  $T(u, v)$  sur un triangle composé des vertex  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  est donnée par :

$$T(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{V}_0 + u\mathbf{V}_1 + v\mathbf{V}_2$$

où  $u$  et  $v$  sont les coordonnées barycentriques qui doivent respecter  $u \geq 0, v \geq 0$  et  $u + v \leq 1$ . Alors l'intersection entre le triangle et le rayon s'écrit :

$$\mathbf{O}t + \mathbf{D} = (1 - u - v)\mathbf{V}_0 + u\mathbf{V}_1 + v\mathbf{V}_2$$

Il est possible d'écrire cette égalité sous forme vectorielle :

$$-\mathbf{D}, \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0 \begin{matrix} t \\ u \\ v \end{matrix} = \mathbf{O} - \mathbf{V}_0 \quad (3.1)$$

Résoudre ce système permet de trouver les coordonnées barycentriques  $(u, v)$  du point d'intersection sur le triangle mais permet également grâce au paramètre  $t$  de trouver la distance du point d'origine du rayon au point d'intersection sur le triangle. En notant  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0$ ,  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0$  et  $\mathbf{T} = \mathbf{O} - \mathbf{V}_0$ , la solution de l'équation (3.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{|\mathbf{D}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2|} |\mathbf{T}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2| \\ u &= \frac{1}{|\mathbf{D}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2|} |-\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{E}_2| \\ v &= \frac{1}{|\mathbf{D}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2|} |-\mathbf{D}, \mathbf{E}_1, \mathbf{T}| \end{aligned}$$

Par propriété du produit mixte, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{(\mathbf{D} \ \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1} (\mathbf{T} \ \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{E}_2 \\ u &= \frac{1}{(\mathbf{D} \ \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1} (\mathbf{D} \ \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{T} \\ v &= \frac{1}{(\mathbf{D} \ \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1} (\mathbf{T} \ \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{D} \end{aligned}$$

L'implémentation de l'algorithme est par la suite assez simple.

---

**Algorithm 3** Algorithme de Möller-Trumbore

---

```

1: function INTERSECTION( $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{O}, \mathbf{D}$ )
2:   Calcule  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{T}$ 
3:   if  $(\mathbf{D} \ \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1 = 0$  then
4:     return : Le rayon et le triangle sont dans le même plan et ne s'intersectent donc
       pas
5:   Calcule  $u$ 
6:   if  $u < 0$  ou  $u > 1$  then
7:     return : On est en dehors du triangle
8:   Calcule  $v$ 
9:   if  $v < 0$  ou  $u + v > 1$  then
10:    return : On est en dehors du triangle
11:  Calcule  $t$ 
12:  if  $t < 0$  then
13:    return : Il n'y a intersection que si  $t > 0$ 
14:  Intersection = 1

```

---

On notera que des algorithmes de raytracing ont été utilisés avec succès pour le calcul de la fonction indicatrice dans le cadre de l'interaction fluide-structure dans [15] et [119]. Ces algorithmes semblent relativement peu présents dans les travaux sur la pénalisation, les auteurs préférant souvent utiliser une *level-set* qu'ils transportent numériquement ou de manière lagrangienne [24]. L'utilisation d'une *level-set* dans [24] est justifiée par le développement d'un modèle de collision qui nécessite donc la connaissance d'une distance à l'interface. Calculer une *level-set*, donc une distance signée, représente un coup calculatoire supplémentaire qui n'a pas d'intérêt dans ce travail dans la mesure où seule une fonction de Heaviside est nécessaire.

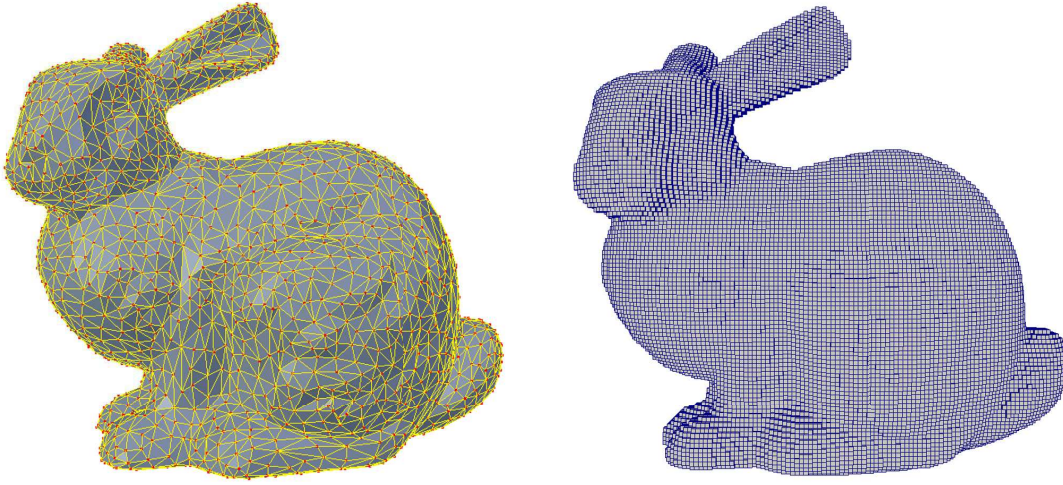
**Exemple**

FIGURE 3.5 – Exemple de reconstruction 3D (à droite) à partir d'un maillage surfacique triangulaire (à gauche)

**3.2.3 Transport de la fonction indicatrice**

A chaque instant, la dynamique de l'écoulement varie, la vitesse du fluide change ainsi que la vitesse de pénalisation par la relation (2.35). Le solide bouge et la fonction indicatrice qui permet de le repérer doit être transportée par le champ  $\bar{\mathbf{u}}$ . Ce transport peut se faire de manière numérique en résolvant l'équation de transport :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \chi = 0$$

Néanmoins cette équation est connue pour générer beaucoup de diffusion. La résoudre avec des schémas d'ordre élevé de type WENO comme c'est souvent le cas pour la résolution du transport d'une *level-set* [141], [128] permet de limiter le problème mais le risque est de voir la forme de l'obstacle ne pas se conserver et de voir celui-ci se déformer. A l'instar de [24], on propose donc de transporter la fonction indicatrice de manière lagrangienne en exploitant l'hypothèse de solide rigide. En effet, on peut aisément calculer la nouvelle position des nœuds du maillage surfacique du solide en multipliant la vitesse  $\bar{\mathbf{u}}$  du nœud considéré par le pas de temps. Connaissant la nouvelle répartition de ces nœuds dans l'espace, Coquerelle [24] propose d'effectuer une interpolation avec une erreur de l'ordre de la méthode d'interpolation. Compte tenu du possible coût prohibitif de telles interpolations notamment en 3D, on suggère plutôt d'effectuer une méthode de raytracing pour recalculer la distribution de la fonction indicatrice à partir de la nouvelle position des nœuds du solide.

Toutefois, la méthode de raycasting dans son application naïve peut s'avérer extrêmement coûteuse : en effet, l'approche *bruteforce* consiste à boucler sur chaque point de l'espace

et pour chacun de ces points, boucler sur les nœuds du maillage solide pour déterminer le nombre d'intersections. Si le nombre de nœuds est faible, cela signifie que l'obstacle a une forme plutôt simple, auquel cas l'impact de cette boucle est moindre. En revanche, elle est horriblement inefficace et très consommatrice en temps de calcul si le maillage de l'obstacle est composée d'un grand nombre de segments (2D) ou de triangles (3D). Néanmoins, il est possible de réduire considérablement le temps d'exécution de la méthode de raycasting.

Une optimisation très simple consiste à créer une "boîte" rectangulaire dont les dimensions sont déterminées par le minimum et le maximum des coordonnées des nœuds du maillage du solide dans chaque direction. Cette boîte inclue donc assurément au moins tous les points du solide. En dehors de cette boîte, on est certain d'être en dehors de l'obstacle, par conséquent, il n'est pas nécessaire d'effectuer l'algorithme de raytracing. L'efficacité de cette optimisation dépend évidemment de la forme de l'obstacle, le gain en temps étant moindre pour des obstacles aux formes élancées. Néanmoins, elle permet de réduire drastiquement le temps d'exécution de l'algorithme de raytracing en supprimant un nombre conséquent de mailles à parcourir dans les boucles. Dans l'exemple ci-dessous, le maillage contient 2500 mailles mais le raycasting n'est effectué que pour les 650 mailles contenues dans la *bounding-box*. Le gain par rapport à une approche brute-force est de près de 75%!

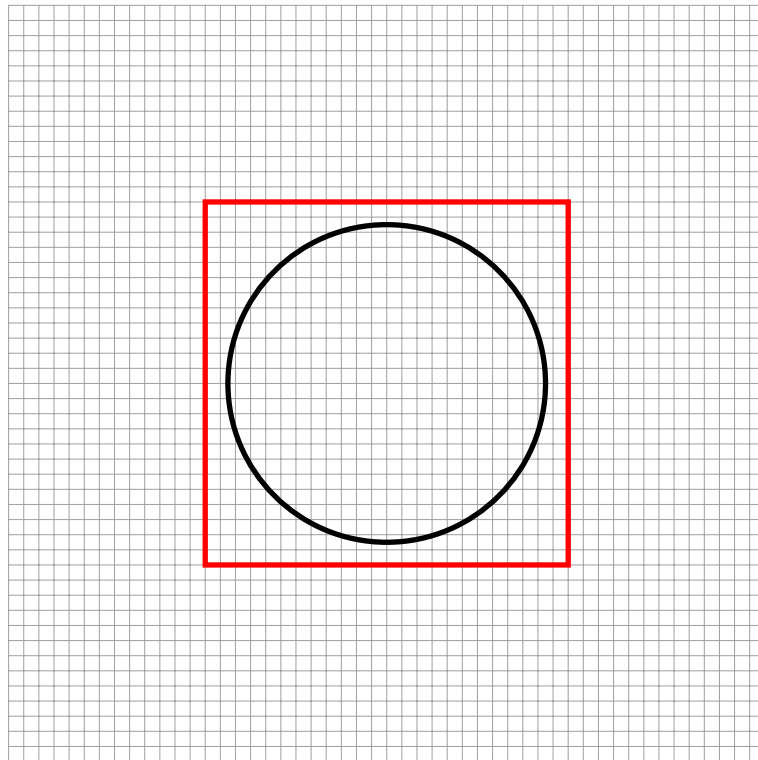


FIGURE 3.6 – Optimisation par *bounding-box* : il est inutile d'effectuer le raycasting pour les cellules à l'extérieur du rectangle contenant le cercle inscrit



### 3.3 Traitement numérique de l'interface

Le succès d'un solveur d'interaction fluide-structure repose dans sa capacité à correctement transmettre les efforts du fluide vers le solide par l'intermédiaire du gradient de pression qui est le véritable terme de forçage dans les équations. Il a été remarqué lors des premières expériences numériques que la pression devient discontinue au passage de l'interface fluide-solide et que le gradient de pression devient par conséquent singulier. Si aucune attention particulière n'est apportée à un traitement spécifique du gradient de pression dans l'étape de prédiction, un terme mesure apparaît et modifie le forçage du fluide sur le solide.

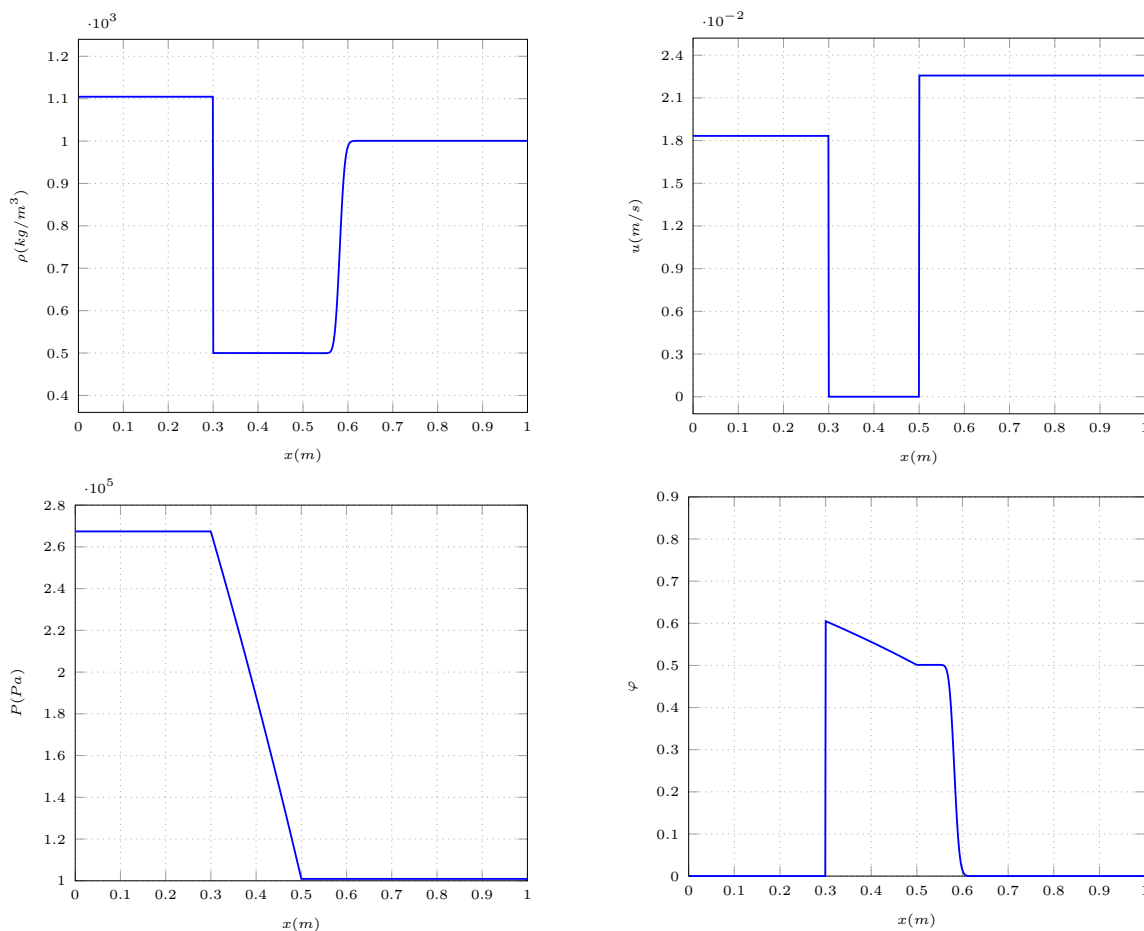


FIGURE 3.7 – Évolution des différentes variables pour un tube à choc sans traitement spécifique de l'interface à  $t=4s$

On considère un cas mono dimensionnel de type tube à choc, où un obstacle fixe est introduit dans un écoulement constitué uniquement d'eau. Une sollicitation en vitesse à hauteur de  $4\text{m/s}$  est imposée sur les dix premières mailles à partir de la frontière gauche. Les conditions limites sont de type sortie libre. Le domaine de calcul est de taille  $L=1$  et le maillage est uniforme constitué d'un unique bloc de degré de raffinement 10 (1024 mailles). L'obstacle, fixe et immobile de densité  $\rho = 500 \text{ kg m}^{-3}$ , est de largeur  $0.2L$  centré en  $0.4L$ . Le schéma

est d'ordre 1 en temps et en espace. La figure 3.7 illustre l'évolution des différentes variables au sein et à proximité de l'obstacle.

L'onde de choc générée par les conditions initiales se propage jusqu'à l'obstacle sur lequel elle se réfléchit pour finalement quitter le domaine de calcul. Après un certain temps (estimé à 4s) au-delà duquel l'écoulement est considéré comme stationnaire, la vitesse dans tout le domaine doit donc être nulle or on constate le contraire. Bien que l'ordre de grandeur soit faible, il existe une vitesse résiduelle dans tout le domaine fluide, y compris en aval de l'obstacle, ce qui est d'autant plus troublant que l'obstacle fixe ne peut transmettre de la quantité de mouvement au fluide en aval. La pression en amont et en aval de l'obstacle est constante et ne devrait donc pas générer de vitesse.

Ce phénomène s'explique par l'approche volumes finis décrit dans le chapitre 1. A l'interface de chaque interface, le flux est calculé à partir d'un état gauche et d'un état droit. Pour les cellules à l'interface entre le fluide et le solide, le flux dépend donc des valeurs des variables primitives entre la cellule fluide et la cellule solide. Entre ces deux dernières,  $\rho$  et  $\varphi$  sont des fonctions discontinues. Par conséquent, il résulte dans le flux une pression  $p = p(\rho, \varphi)$  présentant une discontinuité. Le gradient de pression pour ces cellules est donc singulier. Le bilan de quantité de mouvement pour les cellules à l'interface anime donc de manière inattendue le champ de vitesse. On rappelle que dans la modélisation, les conditions 2.12 et 2.13 sont absolument essentielles. Il est clair ici qu'on ne respecte ni la continuité des contraintes, ni la continuité des vitesses.

L'astuce utilisée pour résoudre ce problème est une méthode simplifiée dérivée des méthodes *ghost-cell* [35]. Lorsque le flux est calculé entre une cellule fluide et une cellule solide, le même état  $(\rho, \varphi)$  issu de la maille fluide est utilisé de part et d'autre de l'interface. La maille solide est considérée comme une maille fluide possédant les mêmes propriétés que la cellule fluide voisine. En effectuant un tel prolongement continu des variables, tout se déroule comme si la pression était continue à travers l'interface. L'idée sous-jacente est en fait de ne jamais s'appuyer sur les variables des cellules solides pour calculer les flux à l'interface.

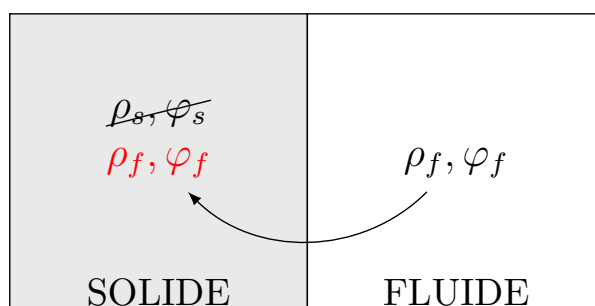


FIGURE 3.8 – Prolongement continu des variables par la méthode *ghost-cell*

L'amélioration est très nette, comme le prouve la figure 3.9. Il n'y a plus de vitesse résiduelle.

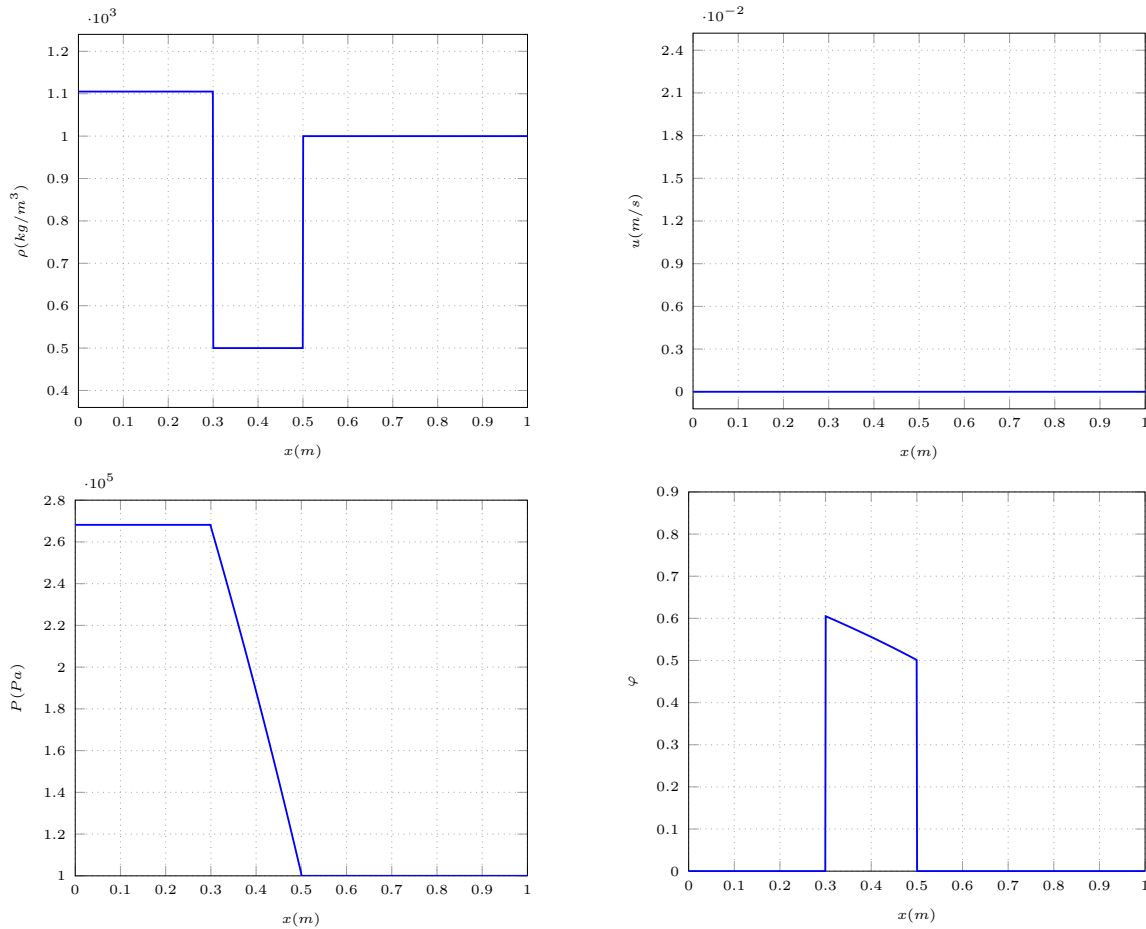


FIGURE 3.9 – Évolution des différentes variables pour un tube à choc avec traitement *ghost-uid* de l’interface à  $t=4s$

On reprend l’exemple précédent en autorisant cette fois-ci le déplacement du solide. Grâce à l’amélioration précédente, la vitesse est assurément continue à l’interface (figure 3.11) et elle est constante dans tout le domaine. On remarque néanmoins qu’au cours du déplacement, la masse volumique en amont de l’obstacle diffuse sur plusieurs mailles (idem pour  $p$ ). Ce problème, parfois référencé dans les publications sous le nom de *fresh cell problem* [61], est bien connu des méthodes d’interaction fluide-structure et se produit lorsque l’on considère des frontières mobiles. Il identifie deux processus qui peuvent se produire selon la nouvelle position de la frontière immergée :

- ▶ une cellule fluide à l’instant  $n$  se retrouve dans le solide à l’instant  $n+1$
- ▶ une cellule solide à l’instant  $n$  se retrouve dans le fluide à l’instant  $n+1$

Dans la première situation, la cellule "fraichement solide" au début de l’itération  $n+1$  contient encore l’état fluide  $\mathbf{w} = [\rho, \mathbf{u}, p, \dots]$  précédent. Cet état sert à la prédiction fluide au sein du solide mais la vitesse au sein de la cellule est pénalisée par l’équation de correction. Par ailleurs, si le transport de  $\rho$  était parfait, la masse volumique dans les cellules solides serait

constante et égale à la masse volumique initiale de l'obstacle  $\rho_s$ . En raison de la diffusion de l'équation 1.4, on profite donc de l'étape de pénalisation en vitesse pour pénaliser également la masse volumique en imposant  $\rho = \rho_s$  de façon à assurer une masse constante dans l'obstacle tout au long du mouvement de celui-ci. La pression  $p$  et la fonction de phase sont modifiées en conséquence pour s'adapter à la valeur  $\rho_s$ .

Dans la seconde situation, le problème est plus profond. La cellule qui était solide devient fluide. Elle garde au début de l'itération  $n+1$  l'état solide alors qu'elle ne se trouve plus dans celui-ci. La prédiction fluide qui est faite pour cette cellule s'appuie donc sur les valeurs d'un état solide qui n'a plus lieu d'être. En particulier ici, comme la masse volumique de cette cellule (donc de l'obstacle) est inférieure à la masse volumique du fluide environnant, on observe une diffusion de l'interface à proximité de cette cellule et une diminution de la masse totale (figure 3.10). Pour cette cellule, il faut donc non seulement reconstruire un état fluide qui produit une bonne prédiction et dont on n'a pas connaissance, mais le reconstruire de façon à n'introduire aucune nouvelle discontinuité dans l'écoulement. Pour ces cellules, une reconstruction fluide dans le cadre de ce modèle est proposée en s'appuyant sur la fonction de phase. Si l'état reconstruit doit être fluide (air ou eau), alors est totalement déterminée (1 ou 0). La variable est donc ajustée en fonction de la nature du fluide à reconstruire. Cette modification doit impérativement être effectuée en s'assurant que la pression reste inchangée afin de ne pas introduire de nouvelles discontinuités de pression.  $p$  et étant ainsi déterminés, il est finalement possible de reconstruire la variable  $\rho$  grâce à la loi de pression  $p = p(\rho, )$ . La vitesse, quant à elle, n'est pas modifiée car continue à l'interface.

Cette proposition de résolution du problème *fresh cell* permet d'améliorer sensiblement les résultats en annulant la diffusion qui avait lieu en amont de l'obstacle (figure 3.11) tout en assurant une conservation de la masse (figure 3.10). L'effet est encore plus spectaculaire sur un cas 2D de chute libre d'un obstacle dans un fluide (figure 3.12 et 3.13).

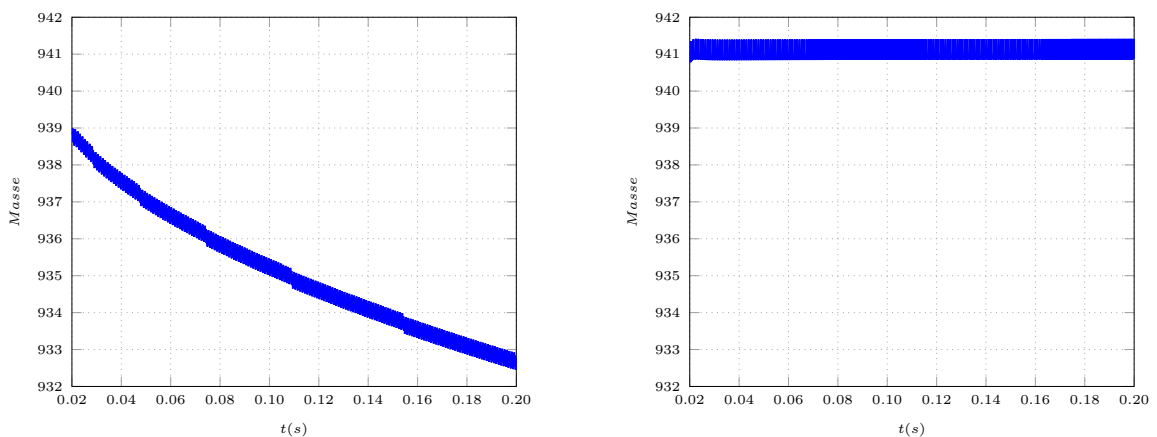


FIGURE 3.10 – Conservation de la masse dans sans correction (à gauche) et avec correction (à droite)

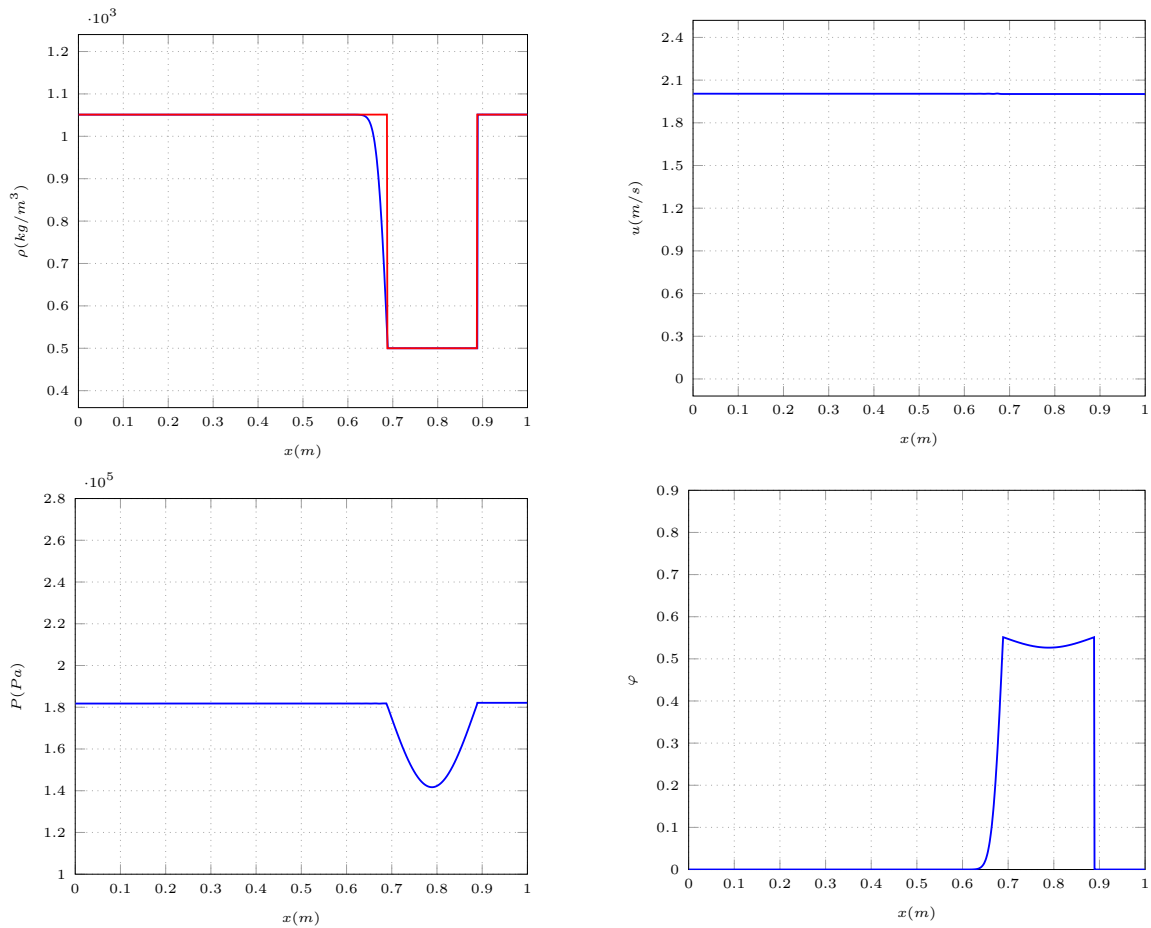


FIGURE 3.11 – Évolution des différentes variables pour un tube à choc avec obstacle mobile à  $t=0.2s$  sans correction (bleu) et avec correction (rouge)

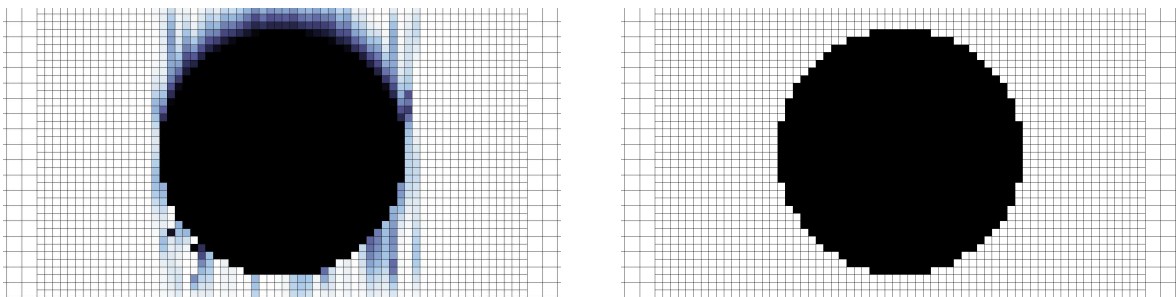


FIGURE 3.12 – Diffusion de l'interface fluide-solide sans correction (à gauche) et avec correction (à droite) pour un problème 2D

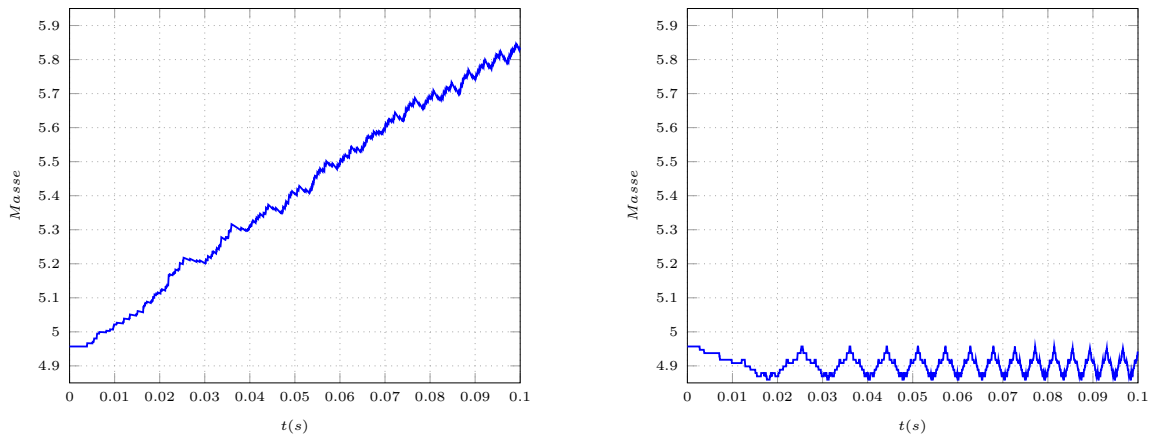


FIGURE 3.13 – Conservation de la masse sans correction (à gauche) et avec correction (à droite) pour un problème 2D

### 3.4 L interaction uide-structure dans un code parallèle

L'algorithme de reconstruction de la fonction indicatrice ainsi que la méthode de pénalisation sont immédiatement intégrés dans le code de calcul parallélisé et bénéficient donc de la répartition de domaines sur différents cœurs de calcul par la librairie MPI. L'effet pervers de l'algorithme d'interaction fluide-structure est qu'il crée un excès de charge pour les cœurs de calcul dont le sous-domaine recouvre tout ou partie l'obstacle puisque ceux-ci doivent effectuer en plus des autres la procédure de raytracing et de pénalisation. Cependant grâce au partitionneur METIS évoqué dans la section 1.3.6, il est possible de prendre en compte facilement cette nouvelle charge due à l'interaction fluide-structure.

Le partitionneur METIS permet, entre autres, d'affecter à chaque bloc un poids. Jusqu'à maintenant, ce poids était uniquement déterminé par le degré de raffinement du bloc (donc en l'occurrence son nombre de mailles) et constituait la charge locale d'un bloc. L'algorithme d'optimisation permettait ensuite de lisser la charge totale par sous-domaine. Lorsque l'interaction fluide-structure est activée, un deuxième poids est affecté à chaque bloc et sa valeur dépend du nombre de cellules du bloc qui sont dans l'obstacle à un instant donné (repérée grâce à la fonction indicatrice). On ajoute donc une seconde contrainte à l'algorithme d'optimisation évoqué dans la section 1.3.6 qui doit donc tenter de minimiser les zones de communication, sous contrainte de répartir les charges (ie. le nombre de mailles) entre les blocs mais également en tachant de répartir la charge supplémentaire imposée par l'interaction fluide-structure. Concrètement, cela signifie qu'un cœur de calcul peut traiter plus de mailles qu'un autre qui aurait à traiter l'interaction fluide-structure sans que l'un n'aille plus vite que l'autre.

## 3.5 Confrontations numériques

Cette section liste quelques résultats obtenus à partir de cas test spécifiquement choisis pour leur reproductibilité dans le cadre des hypothèses retenues dans le chapitre 1. La procédure pour valider ou ne pas valider le processus d'interaction fluide-structure est la suivante :

- ▶ Un premier cas test fera intervenir un obstacle fixe dans un écoulement mono-fluide à haut Reynolds constitué d'air uniquement sur maillage fixe. L'objectif de ce test est de comparer des valeurs de pression sur la structure et de les confronter avec des données expérimentales afin de vérifier que les efforts sur la structure sont bien retranscrits.
- ▶ Un second cas test impliquera un obstacle mobile dans un écoulement mono-fluide constitué d'air uniquement sur maillage fixe. L'objectif de ce test est de vérifier que les efforts sur une structure destinée à se mouvoir sont bien retranscrits en comparant la position de celle-ci avec ce qui est prédit théoriquement.
- ▶ Un troisième cas test met en jeu un écoulement bi-fluide air/eau et un obstacle cylindrique mobile dans une configuration 2D sur maillage fixe. L'objectif de ce test est de vérifier la flottabilité d'une structure flottante initialement éloignée de sa position au repos à travers une étude sur sa réponse en pilonnement par rapport à des données expérimentales disponibles.

Pour tous les cas, une étude de sensibilité à la vitesse du son est effectuée afin d'explicitement d'éventuels impacts de la compressibilité de l'écoulement sur l'interaction fluide-structure.

### 3.5.1 Impact du vent sur un immeuble

Au début des années 1970, un modèle pour la comparaison de l'impact du vent simulé par soufflerie sur un immeuble a été standardisé par le *Commonwealth Advisory Aeronautical Research Council* (CAARC). Ce modèle d'immeuble a servi de référence à plusieurs études d'aérodynamisme en soufflerie qui ont suivi et dont les résultats de six centres de recherche ont été synthétisés par Melbourne [87] en 1980. Ce vivier de données expérimentales constitue une base solide pour la confrontation et la validation de modèles numériques.

Le modèle du CAARC est un immeuble de  $H=180\text{m}$  de hauteur pour une base de  $30\text{m}$  de long et  $45\text{m}$  de large, de masse volumique  $160\text{ kg m}^3$  et de fréquence propre  $0.2\text{Hz}$ . La simulation que l'on veut effectuer se fonde sur la configuration numérique proposée par [17] qui est rappelée ci-après.

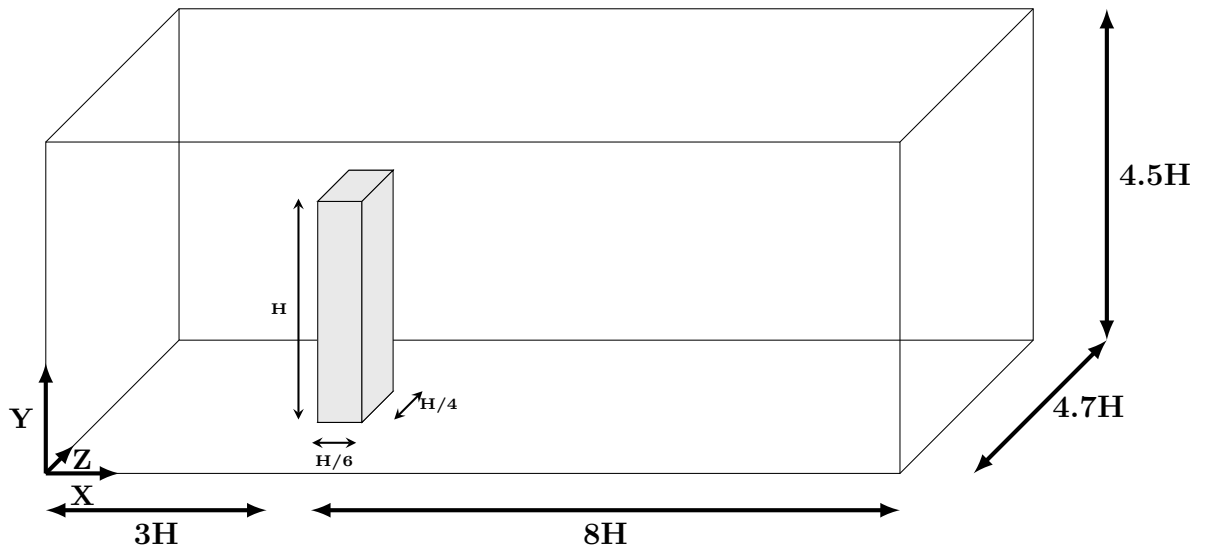


FIGURE 3.14 – Configuration numérique

Le domaine numérique de calcul est un domaine fermé excepté la face aval pour laquelle une condition de sortie libre est envisagée tandis que la face amont se voit attribuer une répartition logarithmique de la vitesse horizontale du vent telle que :

$$\mathbf{U}_{X=0} = \mathbf{U}_0 \frac{Z}{H}^n$$

où  $\mathbf{U}_0 = 100 \text{ m/s}$  et  $n = 0.19$ . Le paramètre  $\mathbf{U}_0$  correspond à la vitesse horizontale du vent à la hauteur  $H$  de l'immeuble. L'intensité de cette vitesse est purement numérique et ne caractérise en aucun cas un écoulement réel dans une soufflerie (cela représenterait un vent de plus de 360 km/h!). Cela permet en l'occurrence d'obtenir des écoulements pour lesquels le nombre de Mach reste suffisamment faible pour pouvoir considérer l'écoulement comme incompressible. Le choix du paramètre  $n$  dépend également suivant les études, sa valeur permet de modéliser le profil logarithmique du vent en entrée. Le choix d'un tel profil permet de considérer dans le cas réel la présence d'immeubles moins élevés que le modèle CAARC autour de celui-ci, modélisant ainsi une "couche limite atmosphérique basse".

Malgré la diversité des configurations expérimentales réalisées en soufflerie, on dispose dans tous les cas d'un paramètre adimensionnel comparable pour toutes les expériences. La comparaison expérimentale qui est envisagée concerne la répartition du coefficient de pression sur les faces amont, aval et latérale de l'immeuble, celui-ci étant défini par :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{0.5 \rho_A \mathbf{U}_\infty^2}$$

où  $P_\infty$  et  $\mathbf{U}_\infty$  correspondent respectivement à la pression et la vitesse "à l'infini", c'est à dire loin de toute modification de l'écoulement fluide causée par la présence de l'obstacle. Ici, en l'occurrence, on mesurera ces valeurs en amont de l'obstacle à proximité de la frontière



gauche. On définit le transect suivant, intersection du plan horizontal à hauteur  $2H/3 = 120\text{m}$  avec l'immeuble le long duquel la valeur du coefficient de pression sera considérée :

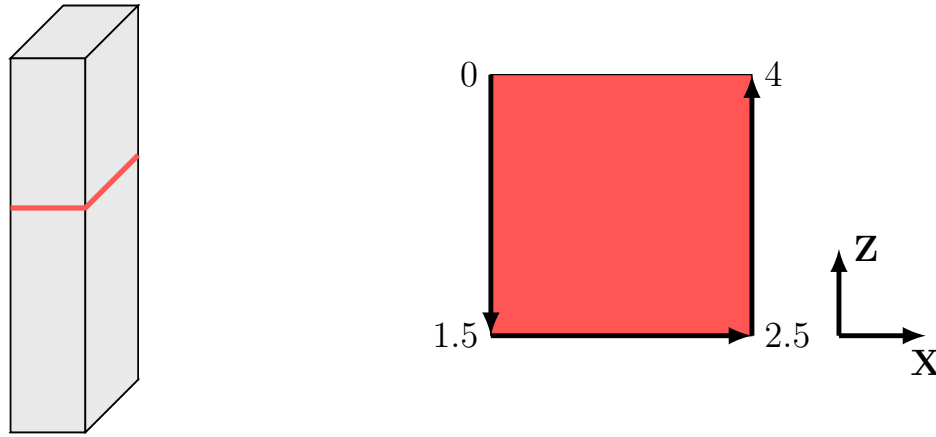


FIGURE 3.15 – Définition du transect de mesure

On définit un nouvel axe de coordonnées qui correspond au parcours du contour de l'intersection entre l'immeuble et le plan horizontal à  $Z=2H/3$ . Ainsi, pour une distance de 0 à 1.5, on parcourt la face amont, de 1.5 à 2.5 la face latérale et de 2.5 à 4 la face aval (figure 3.15)

L'ensemble du domaine est maillé par des blocs de degré de raffinement 2, avec une augmentation du raffinement à 4 pour les blocs à proximité de l'immeuble. Le maillage représente 1120 blocs, totalisant 1 632 632 mailles pour une résolution maximale sur l'obstacle de 3m. La simulation est envisagée sur maillage fixe, sur une période de 40s afin d'obtenir l'état stationnaire avec des méthodes d'ordre 2 en temps et en espace. Le calcul est parallélisé sur 16 processeurs Xeon. L'obstacle (l'immeuble) est pénalisé à chaque pas de temps par une vitesse de translation et une rotation nulles afin que celui-ci reste immobile (l'algorithme de raycasting est à ce titre shunté). La simulation est effectuée pour quatre vitesses du son différentes (165, 330, 495 et 660m/s). Ces vitesses ont été choisies en fonction de la vitesse d'entrée afin de faire en sorte que le nombre de Mach reste dans des valeurs acceptables pour considérer l'écoulement comme incompressible ( $M_a < 0.3$ ). On prendra pour référence "physique" la configuration pour laquelle la vitesse du son dans l'air est de 330 m/s. La figure 3.16 montre la répartition du coefficient de pression le long du transect défini ci-dessus pour les 4 vitesses du son dans l'air :

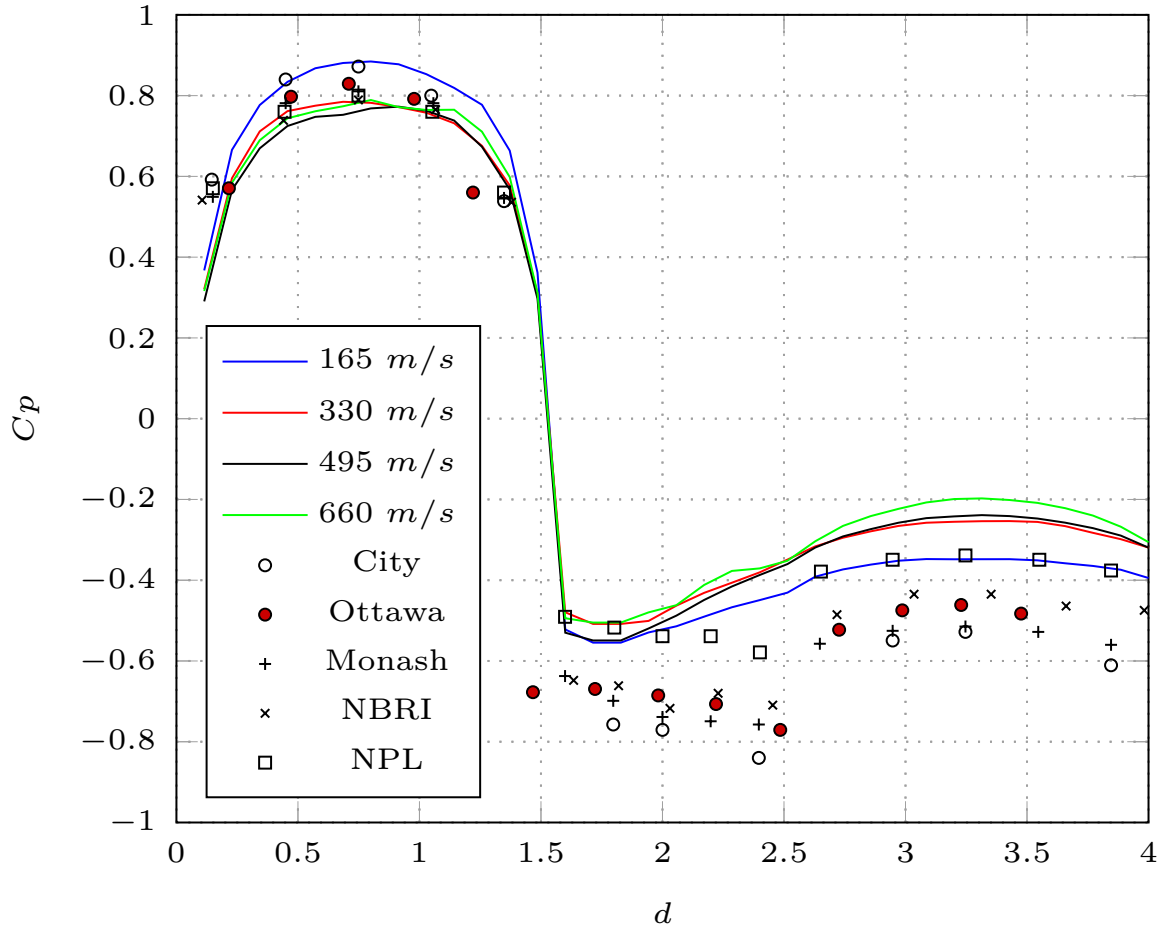


FIGURE 3.16 – Répartition du coefficient de pression

Ces premiers résultats montrent un bon accord de la valeur du coefficient de pression avec les valeurs expérimentales sur la face amont de l'immeuble, c'est à dire la face sur laquelle le vent impacte directement, quelque soit la vitesse du son. Sur la face aval, les différentes courbes se comportent globalement de la même façon mais surestiment nettement le coefficient de pression par rapport à ce que les expériences laissent indiquer. Les résultats sur la face latérale ne sont pas très bons et leur évolution vont à l'encontre de la diminution observée. Les mauvais résultats obtenus sur les faces latérale et aval peuvent s'expliquer en grande partie par l'hypothèse de fluide parfait. En effet, ni la viscosité, ni un modèle de turbulence n'est considéré ici, ce qui rend impossible la capture de la couche limite ou de vortex de recirculation qui sont autant de phénomènes locaux qui peuvent expliquer la différence observée sur le coefficient de pression. En particulier, sur la face latérale, il paraît évident de ne pas être dans la possibilité d'obtenir les bonnes pressions compte tenu des frottements qu'exerce le vent et du décollement de la couche limite qui en résulte, modifiant profondément la dynamique de l'écoulement à l'arrière de l'immeuble. La simplicité du modèle d'Euler ne permet pas de récupérer des structures de recirculation ou de destabilisation complexes de l'écoulement qui pourraient naître en aval de l'immeuble, ce que des modèles plus riches de

type LES ou RANS sont capables de traiter ([17],[70]).

La sensibilité du coefficient de pression à la vitesse du son semble relativement faible, excepté pour le cas 165m/s. En fait, il n'est pas surprenant que cette courbe présente un caractère différent puisque le nombre de Mach associé est en moyenne de  $100 / 165 = 0,6$ , ce qui est largement au delà de la limite communément admise pour considérer un écoulement incompressible. Pour de telles valeurs du nombre de Mach, l'écoulement est clairement compressible et la formule de calcul du coefficient de pression nécessite d'être modifiée afin de prendre en compte les effets compressibles.

La pression ou le coefficient de pression correspondent à des valeurs de sorties directes du modèle mais ce qui est intéressant d'un point de vue interaction fluide-structure concerne les efforts, qui sont des valeurs qui nécessitent traditionnellement des opérations de post-traitement pour être calculées (intégration de la pression sur la surface). Un des intérêts de l'approche par pénalisation est de pouvoir obtenir directement les forces aéro/hydrodynamiques en intégrant le terme de pénalisation sur le volume de l'obstacle ([3], [95]). Les forces dans les trois directions sont présentées sur les figures 3.17, 3.18 et 3.19 pour les quatre vitesses du son :

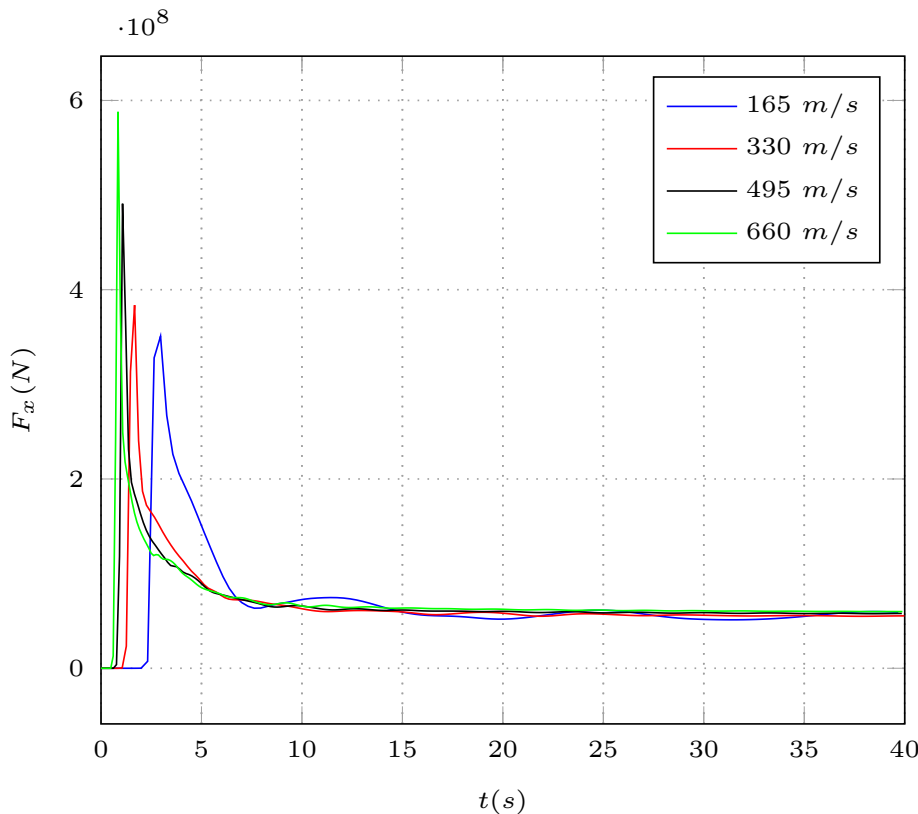


FIGURE 3.17 – Évolution de la force horizontale en fonction du temps

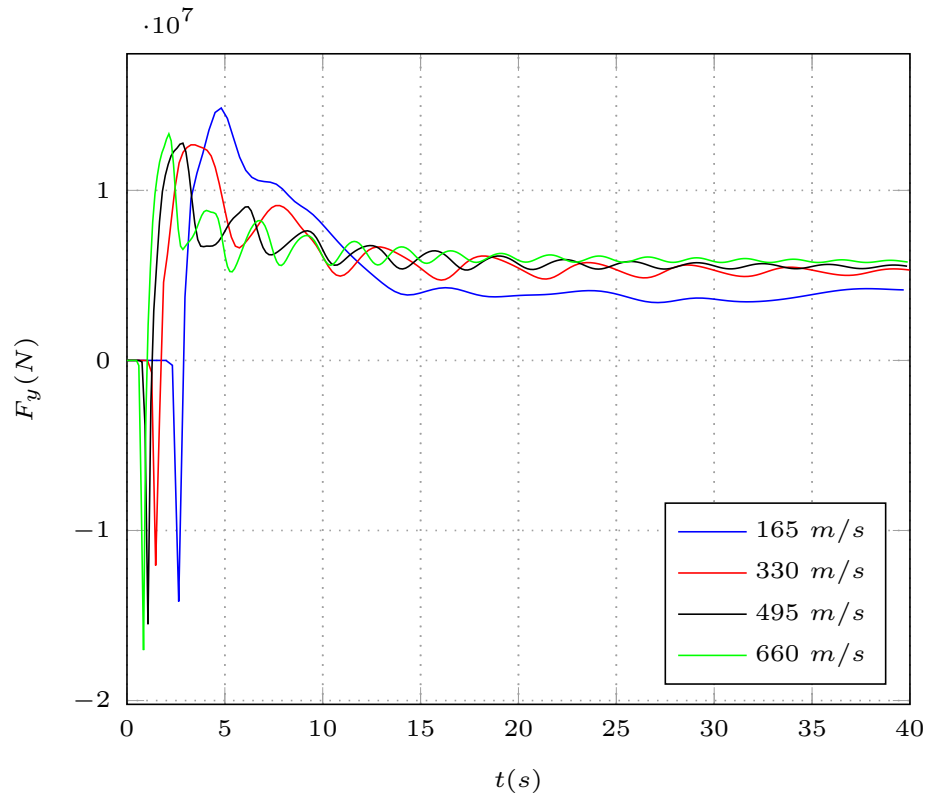


FIGURE 3.18 – Évolution de la force verticale en fonction du temps

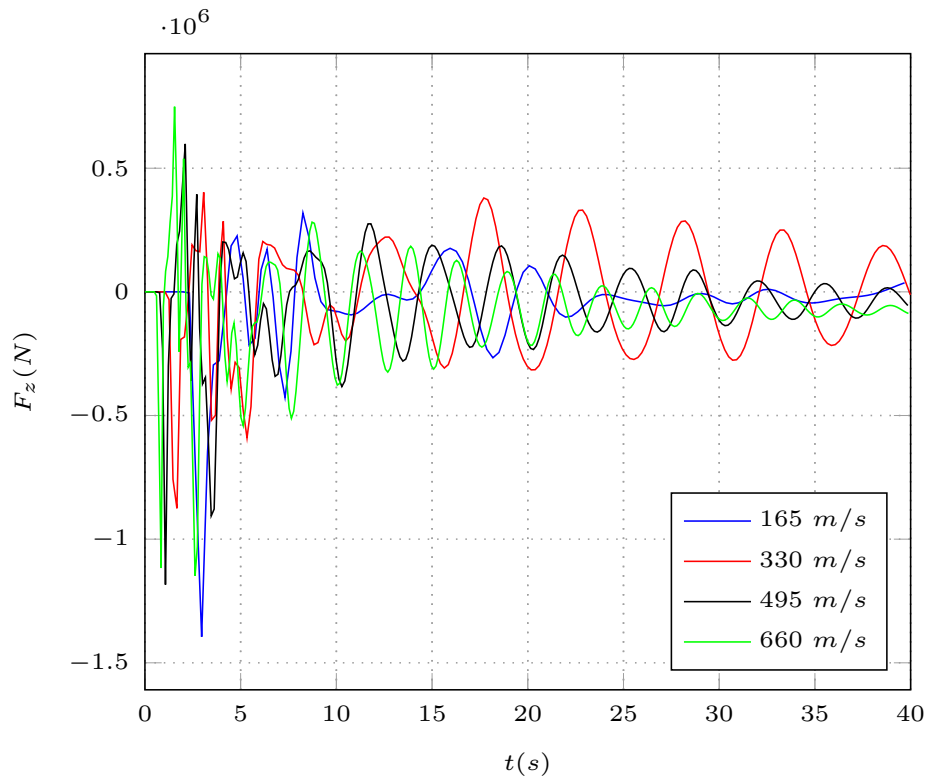


FIGURE 3.19 – Évolution de la force suivant Z en fonction du temps

On distingue clairement sur la figure 3.17 un régime transitoire avant 10s puis un régime stationnaire au delà duquel la force horizontale semble converger vers une valeur constante pour toutes les configurations retenues de vitesse du son. Le régime transitoire présente un pic de force dont l'intensité et la rapidité d'apparition est d'autant plus élevée que la vitesse du son est faible (et donc que l'écoulement est compressible). L'existence d'un régime transitoire s'explique par le fait que les conditions initiales pour cette simulation ont été mal préparées. En l'occurrence, à l'instant  $t=0$ , un forçage de vent est appliqué sur la frontière gauche tandis que la vitesse partout dans le domaine de calcul est initialisée à une valeur nulle. Cela correspond à la définition d'un choc dont on rappelle que la vitesse de propagation est  $u+c$ , ce qui explique que le pic de force pour une vitesse du son de 660m/s apparaît plus tôt que celui pour une vitesse de 330m/s. L'intensité de ce choc en fonction de la compressibilité de l'écoulement n'est cependant pas comprise. Il existe également un régime transitoire pour la force verticale (figure 3.18), celle-ci convergeant également vers une valeur constante, bien qu'un caractère oscillatoire soit plus prononcé. La courbe représentant une vitesse du son de 165m/s se distingue des autres probablement pour les mêmes raisons que précédemment, à savoir un nombre de Mach trop élevé pour considérer l'écoulement comme incompressible. Enfin, la figure 3.19 présente des courbes beaucoup plus chaotiques. Difficiles à analyser et présentant un fort caractère oscillatoire, il apparaît néanmoins qu'elles semblent osciller (et peut être à plus long terme converger) autour de zéro. Sur une période de temps suffisamment longue, il n'y a pas d'efforts résultants suivant Z, ce qui intuitivement semble correct car l'écoulement est a priori symétrique sur chacune des parties latérales de l'immeuble.

En conclusion, il ressort de ce cas test que les forces s'exerçant sur l'obstacle ne dépendent pas de la vitesse du son. En revanche, il n'y a pas de certitude sur la capacité du modèle à pouvoir retranscrire les bons efforts.

### 3.5.2 Déplacement d un ressort

Ce second cas test va permettre de tester les capacités du modèle d'interaction fluide-structure dans une configuration où la structure est mobile. Pour cela on modélise un obstacle de forme carrée de côté L dans un domaine de calcul en deux dimensions de taille  $10L \times 6L$ . Les frontières haute et basse sont fermées et la frontière droite est à sortie libre. Un écoulement d'air de vitesse horizontale 30 m/s entre par la frontière gauche et est entretenu durant toute la durée de la simulation. Initialement, l'obstacle est à la position 0.3 et on modélise un ressort exerçant une force de rappel autour de cette position initiale dont la raideur est calculée de façon à autoriser un déplacement de l'obstacle de 0.1. A  $t=0$ , les conditions initiales sont bien préparées et la vitesse est initialisée à 30 m/s sur tout le domaine de calcul. La gravité n'est pas prise en compte. Le raffinement du maillage est concentré autour de la zone de mouvement du ressort.

On rappelle que la force de rappel d'un ressort de raideur  $k$  autorisant un déplacement de  $l$  autour de sa position d'équilibre s'exprime :

$$\mathbf{F} = k \mathbf{l}$$

La prise en compte de la force de rappel de l'obstacle se fait en modifiant le terme source dans l'équation de quantité de mouvement. L'application du principe fondamental de la dynamique sur un ressort de masse  $m$  montre que l'accélération de rappel s'exprime :

$$= \frac{k}{m} \mathbf{l}$$

Cette accélération ne s'exerce que sur l'obstacle, c'est à dire pour les valeurs de  $\chi = 1$ . L'équation fluide de la quantité de mouvement avec force de rappel s'écrit donc :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \chi \rho \frac{k}{m} \mathbf{l}$$

On s'intéresse à la position horizontale de l'obstacle au cours du temps en fonction de trois vitesses du son (170, 340 et 510 m/s). En particulier, on s'attend à ce que l'obstacle s'immobilise à 0.4 puisque la raideur a été calculée de façon à autoriser un allongement de 0.1. Si tel est le cas, cela signifie que les efforts ont été bien retransmis à l'obstacle. Les forces exercées sur l'obstacle par un tel écoulement sont d'abord calculées dans une simulation séparée pour un obstacle fixe jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire. Ces efforts sont respectivement de 125N, 130N et 136N pour les vitesses du son de 170, 340 et 510 m/s. Ensuite, la simulation est reproduite avec ces efforts permettant de calculer la raideur du ressort correspondant à un allongement de 0.1. L'évolution de la position horizontale de l'obstacle est observable sur la figure 3.20.

La pression dynamique exercée par le fluide sur l'obstacle entraîne le mouvement de celui-ci dans un mouvement oscillatoire amorti qui semble se stabiliser autour de la position finale escomptée. Si on ne note pas de différences significatives de l'amplitude de la première oscillation entre les différentes vitesses du son, en revanche à partir de 0.3s, les courbes se distinguent en amplitude et en phase. La vitesse du son la plus élevée semble autoriser une réaction de la structure en amplitude la plus importante avec une période plus courte. En comparaison avec des nombres de Mach plus haut et donc des écoulements plus compressible (170m/s), le déphasage et l'amortissement devient conséquent. On peut raisonnablement admettre que la position finale est précise à une ou deux mailles près et à ce titre, l'ensemble des courbes semble converger vers la valeur attendue. Cela correspond à un résultat encourageant témoignant de la qualité de la modélisation et du traitement numérique de l'interaction fluide-structure. Il reste néanmoins, comme pour le cas test précédent, des différences notables dans le régime transitoire liées aux effets compressibles qui ne permettent pas de conclure sur le choix d'une vitesse du son plutôt qu'une autre.

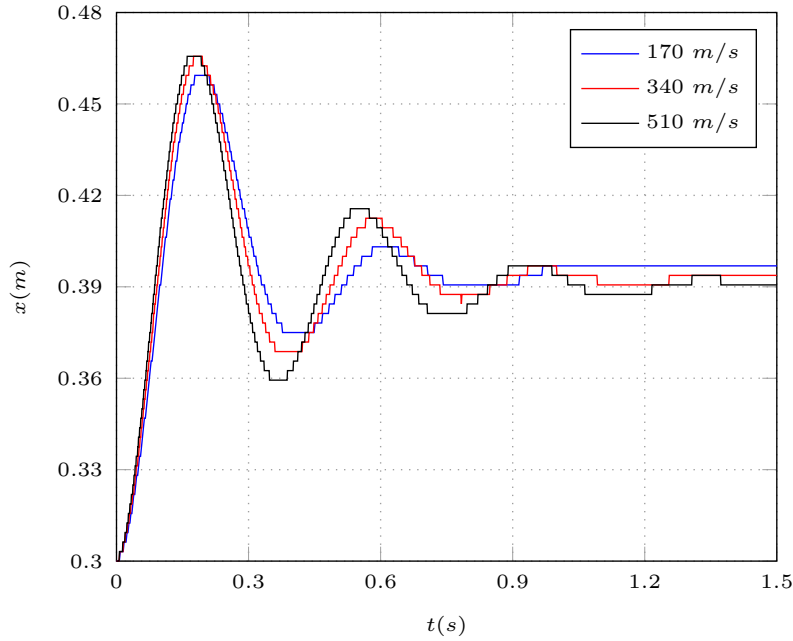


FIGURE 3.20 – Évolution de la position horizontale en fonction du temps

### 3.5.3 Pilonnement d une structure cylindrique

Le cas test suivant fait intervenir un cylindre de diamètre  $D=0.1524$ m et de masse volumique  $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$  immergé dans un écoulement bi-fluide air-eau et dont le centre de gravité est initialement situé à 2.54 cm au-dessus de la surface de l'eau, celle-ci étant initialement au repos. Sous l'action de la gravité qui est la seule force volumique extérieure s'appliquant sur le système, le cylindre est censé amorcer un mouvement vertical vers le bas puis remonter sous l'effet de la poussée d'Archimède avant de se stabiliser dans un mouvement oscillant autour de sa position d'équilibre correspondant à la ligne de flottaison. On s'intéresse à la réaction en pilonnement et à la réponse oscillatoire de la structure, l'étude est donc réduite à un seul mouvement de liberté. On dispose de données expérimentales et de résultats numériques de [18]. On utilise le modèle bi-fluide pénalisé décrit dans cette étude pour étudier le comportement de la structure et constater les possibilités du solveur d'interaction fluide-structure à reproduire le caractère oscillatoire du cylindre dans son mouvement de pilonnement. Numériquement, le domaine de calcul est une boîte de dimension  $5.4L \times 0.8L$  dont les conditions limites sont des frontières ouvertes et sont placées suffisamment loin de la structure pour éviter d'éventuels phénomènes de réflexion. L'eau est initialisée sur une profondeur de  $0.376L$ . Le niveau de raffinement des blocs est choisi de telle sorte que la taille de maille à proximité de l'obstacle et à l'interface air-eau soit de l'ordre du millimètre. Le nombre de mailles est d'environ 750 000 et le maillage est fixe dans le temps. Des tests de sensibilité sur la vitesse du son sont effectués. Les simulations sont parallélisées sur 16 coeurs Intel Xeon. Elles sont effectuées pour quatre vitesses du son différentes.

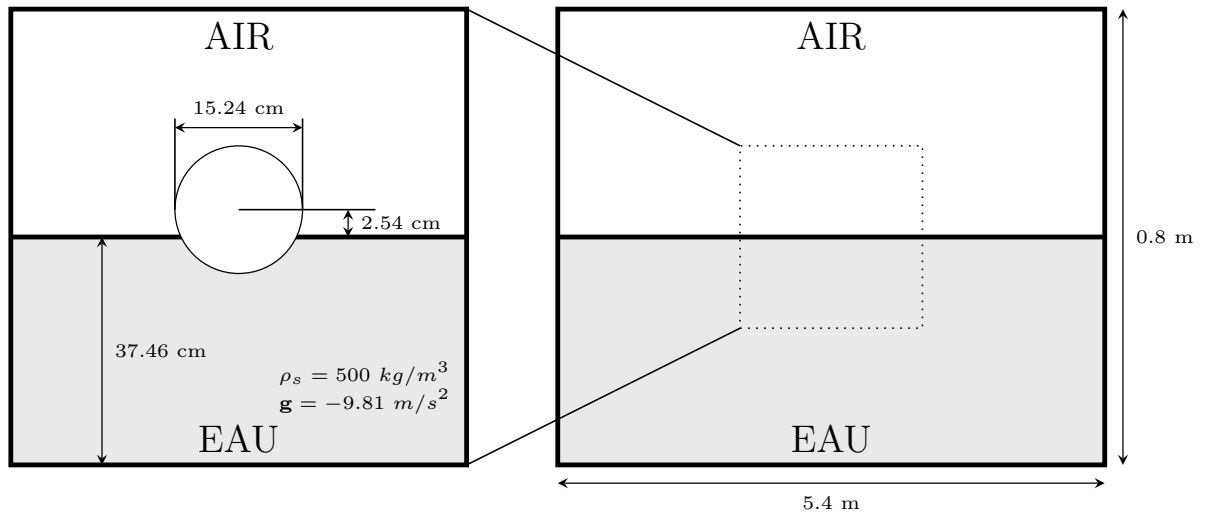


FIGURE 3.21 – Configuration expérimentale

Il convient de noter selon l'auteur des essais expérimentaux que ce cas test représente une dynamique non-visqueuse [71], ce qui rend l'approximation numérique avec un modèle d'Euler possible. La figure 3.22 montre la réaction en pilonnement de la structure en fonction de plusieurs valeurs de la vitesse du son.

Le cylindre sous son propre poids s'enfonce dans l'eau où la poussée d'Archimède agit d'autant plus intensément que le cylindre passe sous la ligne de flottaison. S'en suit un caractère oscillatoire amorti dont les caractéristiques en période et en amplitude dépendent fortement de la vitesse du son. En effet, le mouvement du cylindre est davantage amorti et sa période d'oscillation davantage rallongée pour des vitesses du son importante. Au delà d'une période, toutes les courbes s'éloignent significativement des données expérimentales, un déphasage est présent et se fait de plus en plus ressentir. Une vitesse du son de 5 m/s semble donner les meilleurs résultats sur les deux premières oscillations, en phase et en amplitude, ce qui semble paradoxal car il s'agit de la valeur pour laquelle on s'éloigne le plus de l'incompressibilité réelle de l'écoulement et pour laquelle l'approximation faible nombre de Mach devient de moins en moins justifiée. En effet, pour une telle valeur de la vitesse du son, la masse volumique est autorisée à varier de près de 15% de sa valeur de référence. C'est la raison pour laquelle on ne peut retenir cette solution. Pour des vitesses du son importantes (donc pour des nombres de Mach faibles), la solution se dégrade lorsque l'on tend vers l'asymptotique et donc vers l'incompressibilité de l'écoulement. Ce résultat est à mettre en relation avec le constat de Guillard dans [60] sur le mauvais comportement des schémas volumes finis pour des écoulements à faible Mach.

Notons par ailleurs que le mouvement amorti du cylindre résulte d'une dissipation énergétique due à la diffusion numérique et non pas à la viscosité physique qui n'entre pas dans la modélisation sous l'hypothèse de fluide parfait. L'évolution de l'amortissement en fonction de



la vitesse du son n'est donc qu'une mesure de la dissipation numérique du modèle qui ne représente en soi que peu d'intérêt. En l'occurrence, plus la vitesse du son augmente, plus la diffusion numérique est importante et ce constat corrobore parfaitement celui effectué par Helluy [65].

Ces résultats ne permettent pas de valider le modèle d'interaction fluide-structure car les résultats semblent extrêmement dépendants de l'approche compressible choisie. On ne peut se satisfaire de l'impossibilité du modèle à capturer les extremas locaux de chaque oscillation de la figure 3.22. En l'occurrence, des modèles plus simples et incompressibles parviennent à valider ce cas test [28]. Toutefois, le comportement général (mouvement oscillatoire amorti) semble bien reproduit ce qui semble indiquer que la procédure d'interaction fluide-structure retranscrit bien les efforts du fluide vers la structure. L'échec de la validation semble davantage lié à un mauvais comportement du solveur fluide et à l'incapacité du modèle compressible à traiter des écoulements à faible vitesse.

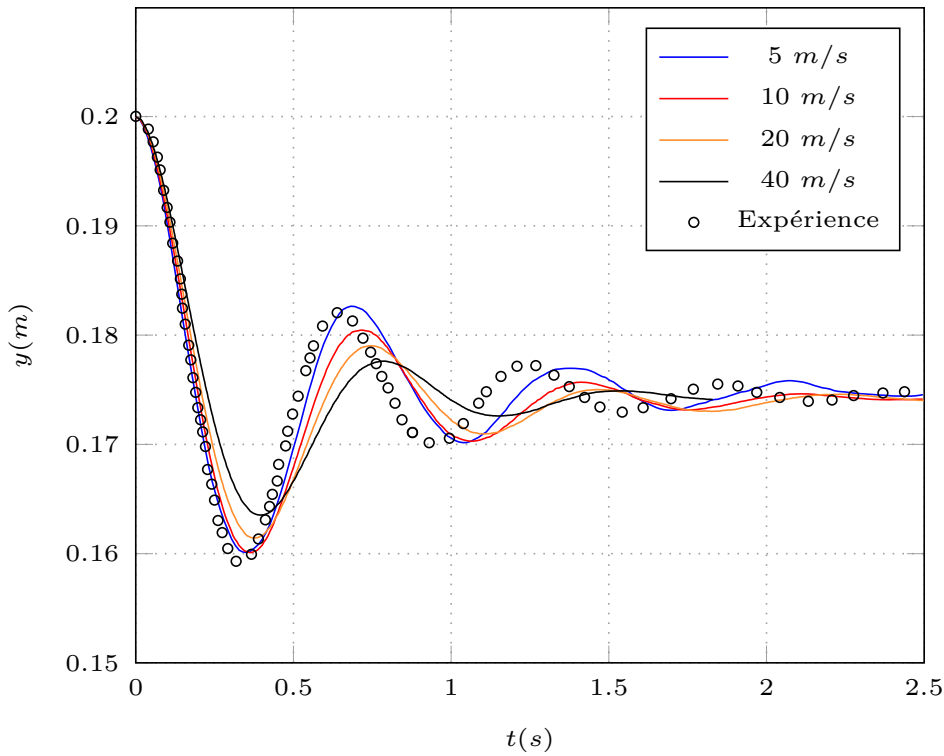


FIGURE 3.22 – Évolution du pilonnement en fonction du temps

### 3.5.4 Dépendance de la poussée d Archimède à la vitesse du son

Compte tenu des résultats décevants obtenus sur la réaction en pilonnement d'une structure flottante, une investigation supplémentaire a été poussée afin de mettre en évidence l'effet de la vitesse du son sur le gradient de pression pour des configurations où la pression hydrostatique fluide est prépondérante dans la retranscription des efforts sur la structure. Le cas test considéré ici fait intervenir une structure cylindrique initialement de vitesse nulle totalement immergée dans une colonne d'eau en configuration bidimensionnelle. La poussée d'Archimède exerce une poussée verticale tendant à faire remonter l'obstacle vers la surface.

Il est important ici de préciser comment les conditions initiales sont déterminées. A l'instant  $t=0$ , la masse fluide doit être statique et immobile (aucune vitesse résiduelle). La pression doit être répartie de façon hydrostatique quelque soit la vitesse du son. Pour établir cette répartition de pression, il convient donc d'assurer initialement l'équilibre entre le gradient de pression et le terme de gravité dans l'équation de quantité de mouvement et la nullité des vitesses :

$$\nabla p = \rho g$$

or d'après la loi de pression 1.5, on a :

$$\nabla p = c^2 \nabla \rho$$

On obtient alors une équation différentielle en  $\rho$  dont la solution est :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{gy}{c^2}}$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique de référence,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $y$  la coordonnée verticale et  $c$  la vitesse du son. Il s'agit de l'expression de la densité à appliquer initialement pour qu'il y ait équilibre entre le terme de gravité et le gradient de pression et s'assurer ainsi qu'aucune masse d'eau ne vienne se mouvoir initialement. Cette répartition de la densité par une exponentielle décroissante traduit une stratification de la masse volumique en fonction de la profondeur d'eau. Si cette stratification est bien réelle dans la nature, elle reste cependant extrêmement petite vu la très faible compressibilité physique de l'eau.

On trace sur la figure 3.23 l'évolution de la position verticale de l'obstacle dont le mouvement est piloté par le gradient de pression hydrostatique. On remarque aisément que la dynamique de l'obstacle dépend fortement de la vitesse du son. En l'occurrence, l'obstacle remonte d'autant plus vite que la vitesse du son est faible. L'explication provient de la valeur du gradient de pression en fonction de la compressibilité de l'écoulement. On trace sur la figure 3.24 l'évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse du son.

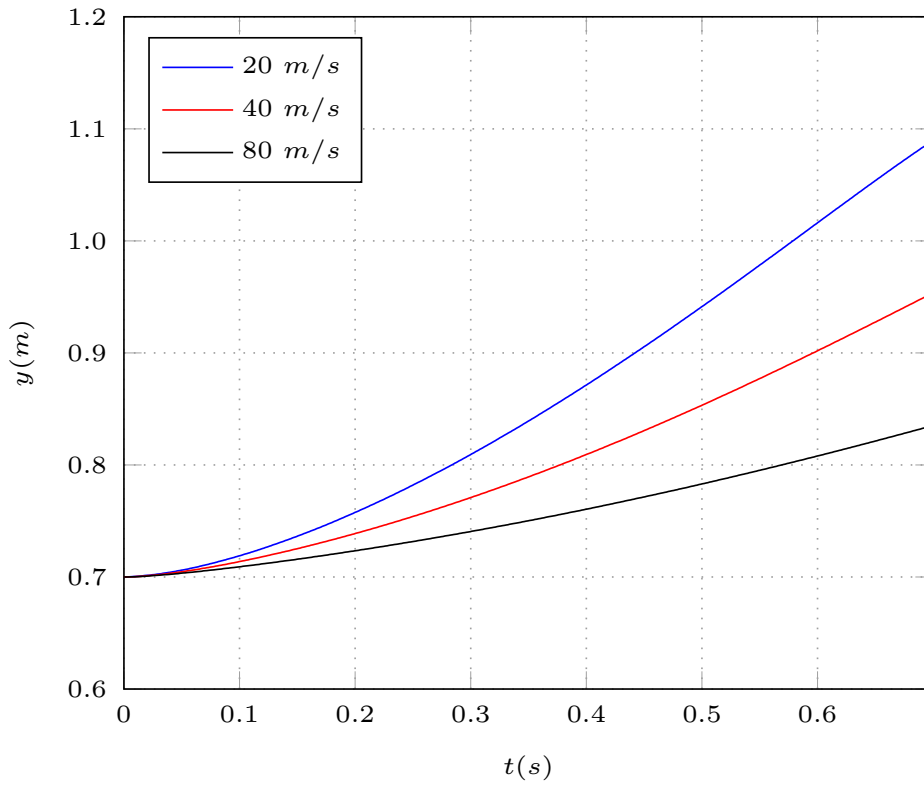


FIGURE 3.23 – Évolution de la position verticale du solide en fonction de la vitesse du son

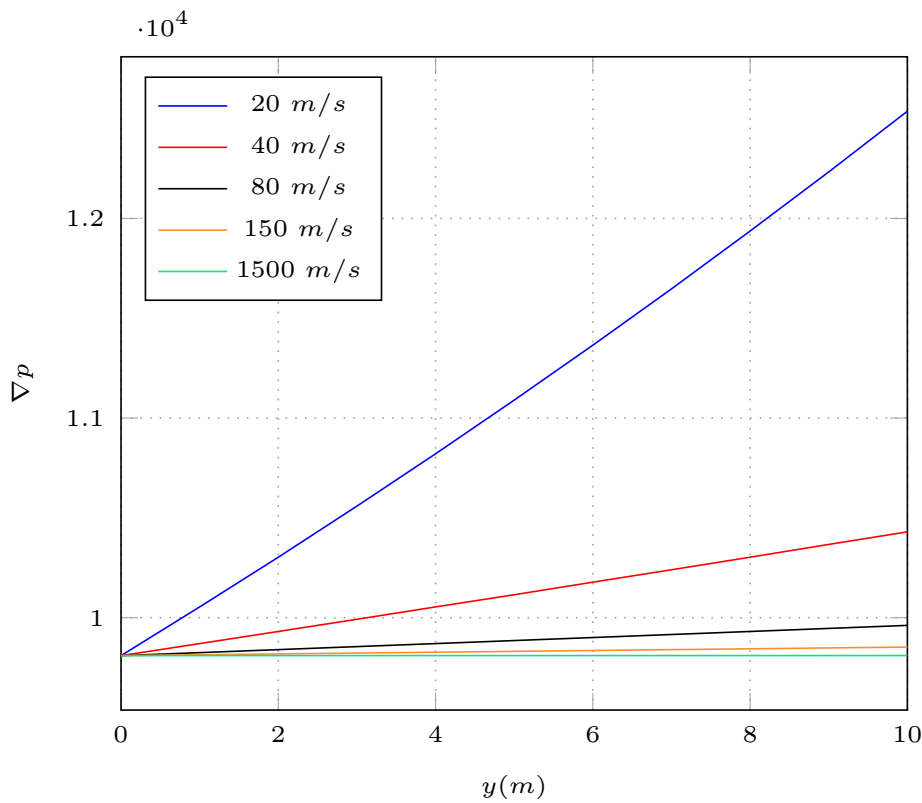


FIGURE 3.24 – Évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse du son

On remarque que pour des valeurs de vitesse du son faibles, le gradient de pression devient largement surestimé. En conséquence, la masse volumique est elle aussi largement surestimée dans les couches basses où la compressibilité est exagérée. D'un point de vue des forçages hydrostatiques, il est nécessaire de garder une vitesse du son importante afin de ne pas surestimer la poussée d'Archimède qui engendrerait des efforts hydrodynamiques beaucoup trop importants. C'est pour cette raison que l'obstacle remonte beaucoup plus vite à faible vitesse du son.

Ce constat constitue un sérieux rempart sur la possibilité d'envisager des cas de simulations où les effets hydrostatiques sont prépondérants. En l'occurrence, en l'état actuel de la modélisation, il paraît impossible de considérer des cas simples de flottaison car le choix de la compressibilité artificielle modifie irrémédiablement les forçages fluides sur la structure.

## 3.6 Conclusion

Le développement d'une méthode pour approximer numériquement le modèle d'interaction fluide-structure a nécessité tout d'abord de penser à un moyen de repérer l'obstacle dans le domaine de calcul et d'imaginer comment mettre à jour sa position en fonction de sa vitesse issue de la pénalisation de la vitesse prédite du fluide. Deux algorithmes (respectivement en 2D et en 3D) ont été proposés et implémentés pour construire la fonction indicatrice  $\chi$  servant à repérer le solide dans le domaine de calcul. Fondées sur des méthodes de *raycasting*, ces approches combinent des calculs géométriques et des optimisations arithmétiques permettant de déterminer si une maille de calcul est présente ou non dans le domaine que l'on définit comme le domaine solide. De par sa nature,  $\chi$  est une fonction de Heaviside qui introduit une discontinuité entre les mailles fluides et les mailles solides. Si la modélisation dans le domaine continu s'est attachée à assurer une continuité des contraintes et des vitesses à l'interface fluide-solide, le choix d'une méthode de splitting en deux temps (prédiction puis correction) et l'introduction d'une fonction indicatrice discontinue sans fonction de lissage introduit des difficultés supplémentaires qui nécessitent un traitement numérique particulier des mailles à l'interface fluide-solide.

A l'instar des méthodes *ghost-uid*, en extrapolant l'état fluide pour les cellules fluides possédant une cellule voisine solide, l'idée est de faire en sorte de ne jamais s'appuyer sur les variables des cellules solides pour calculer une solution dans une cellule fluide. Cela assure une transition continue de toutes les variables à l'interface et ne génère pas d'oscillations. Une deuxième difficulté numérique apparaît lorsque l'obstacle est mis en mouvement et que des mailles changent d'état. Lorsqu'une cellule anciennement solide devient fluide, il est nécessaire de reconstruire un état fluide pour cette cellule. Ce nouvel état fluide doit être créé sans perturber l'écoulement et donc sans valeurs de pression ou de masse volumique qui

entraînerait de nouvelles discontinuités. C'est l'imposition de la fonction de phase et d'une pression constante qui permet de reconstruire cet état.

A l'issue des confrontations numériques, il s'avère que le modèle d'interaction fluide-structure et son approximation numérique semblent bien réagir aux forçages fluides pour des écoulements monofluides constitués d'air. Le modèle parvient à reproduire convenablement le comportement d'obstacles fixes ou mobiles sous l'hypothèse d'un écoulement bien construit respectant les hypothèses de départ. On note néanmoins quelques disparités dans les résultats lorsque la vitesse du son varie, en particulier lors du régime transitoire où les effets compressibles sont mal compris. En revanche, les écoulements faisant intervenir de l'eau sont beaucoup plus sensibles à la vitesse du son. En particulier, on a montré l'incapacité du modèle à pouvoir simuler des cas de flottaison. Une étude de sensibilité de la vitesse du son pour une configuration où la pression hydrostatique est seul moteur du mouvement a montré que la poussée d'Archimède est largement surestimée pour de faibles vitesses du son. Cette limite est très pénalisante car elle ne permet pas d'envisager ce modèle pour l'application à des cas réels. Cela témoigne également du fait qu'il ne suffit pas de prendre une vitesse du son arbitraire pour respecter la limite incompressible comme dans [50], du moins pour envisager des simulations d'interaction fluide-structure car alors les efforts sur la structure s'en retrouvent complètement faussés. On note que cette limitation n'est pas due à la façon d'appréhender l'interaction fluide-structure mais du manque de robustesse du modèle compressible à pouvoir traiter certains types d'écoulements académiques. Les capacités du solveur d'interaction fluide-structure, malgré des résultats en demi-teinte, sont encourageantes.

# Conclusion

A partir d'un modèle bi-fluide fondé sur la résolution des équations d'Euler dans un cadre de travail compressible et une dynamique non visqueuse, un module indépendant permettant de traiter des problèmes d'interaction fluide-structure a été proposé. La méthode repose sur une approche unifiée permettant de modéliser avec une seule équation le mouvement du fluide et du solide simultanément. Un terme supplémentaire dans l'équation de quantité de mouvement permet de rendre compte de la présence de la structure dans l'écoulement. Beaucoup d'attention a été apportée au bien fondé de cette modélisation à travers notamment l'analogie avec des formulations variationnelles provenant de travaux existants en incompressible. Cette analogie s'est poursuivie avec l'utilisation d'une méthode de splitting en temps de type prédiction-correction à l'instar de ce qui se fait dans les modèles incompressibles pour le découplage vitesse-pression. La méthode de pénalisation qui en résulte est simple à mettre en place et assure une continuité des contraintes et des vitesses, s'assurant par là une bonne retranscription des efforts du fluide vers la structure.

Le terme de pénalisation fait intervenir une fonction indicatrice qu'il est nécessaire de reconstruire. Cela se fait par l'intermédiaire d'un algorithme de raycasting, dérivé des méthodes utilisées en infographie pour reconstruire une scène 3D. Deux algorithmes de reconstruction en 2D et 3D ont été implémentés et leur exécution a été optimisée à travers le choix d'instructions arithmétiques rapides à traiter pour le processeur et en adaptant les paramètres de décomposition de domaine pour une parallélisation optimale. Des traitements numériques de l'interface sont nécessaires car aucune fonction de régularisation ne vient lisser les discontinuités imposées par la fonction indicatrice. Un prolongement de l'état fluide pour les cellules en question grâce à une méthode de type *ghost cell* permet de s'affranchir de tout saut de variable qui pourrait entraîner l'apparition d'un terme mesure dans les équations et fausser ainsi les forçages hydrodynamiques. Une reconstruction des états fluides a également été envisagée pour les cellules changeant d'état.

Au terme des confrontations numériques, il est apparu que pour des écoulements monofluides contenant de l'air, les forçages sont relativement bien reproduits sur la structure et ce indépendamment de la compressibilité de l'écoulement. En revanche, pour des écoulements d'eau, une grosse sensibilité des résultats à la vitesse du son se fait sentir. Une étude plus poussée sur les conséquences du choix d'une vitesse du son artificielle sur la stratification

de la densité dans des configurations où la pression hydrostatique est prépondérante dans le mouvement de la structure révèle que la poussée d'Archimède peut être largement faussée, mettant en péril la fiabilité d'une telle approche compressible pour des cas de flottaison. L'interaction fluide-structure semble malgré tout bien réagir numériquement, les écarts avec les données expérimentales sont davantage dus à des erreurs sur le solveur fluide compressible.

Il convient de rappeler que le choix et le développement de la méthode d'interaction fluide-structure proposée dans ce travail étaient intimement liés et influencés par le modèle bi-fluide et par le souhait de pouvoir bénéficier de l'approche compressible, qui reste numériquement intéressante, et des capacités de raffinement dynamique du maillage, le tout sans modification majeure du code numérique pré-existant. Cela a été rendu possible grâce à une programmation modulaire. Les résultats numériques ont cependant fait émerger un paradoxe. D'une part, les modèles compressibles perdent de leur précision dans la limite faible nombre de Mach, la littérature à ce sujet est d'ailleurs abondante. C'est pour cette raison que l'on fait toujours en sorte de rester dans une plage de valeur du nombre de Mach acceptable ( $M_a \approx 0.1$ ) en modifiant arbitrairement la vitesse du son. D'autre part, une vitesse du son trop faible exagère les effets compressibles et modifie significativement les efforts subis par la structure. Le compromis paraît difficile à obtenir car augmenter la vitesse du son, si cela permet de contenir les effets compressibles et d'améliorer l'interaction fluide-structure, augmente également la diffusion numérique et contraint énormément le pas de temps à travers la CFL acoustique.

Par ailleurs, la possibilité de confronter le module d'interaction fluide-structure avec des cas tests académiques s'est avérée plus difficile que prévue dans la mesure où celui-ci souffre des hypothèses imposées par le modèle décrit dans [50]. Le problème de la vitesse du son artificielle a déjà été évoqué. La diffusion numérique du modèle reste élevée malgré une méthode de compression d'interface difficilement généralisable, et ne permet pas d'envisager des solutions longues en temps sans que la solution ne soit irrémédiablement dégradée. Les expériences numériques ne peuvent excéder quelques secondes, ce qui rend impossible la simulation de quelques vagues même de petite période, ce qui aurait été une confrontation intéressante pour constater le mouvement à moyen terme d'une structure dans un état de mer. Le choix d'une méthode explicite, si elle séduit par sa simplicité, induit une condition CFL très contraignante et implique des pas de temps de l'ordre de la microseconde. Le modèle souffre également de conditions aux limites de sortie libre mal envisagées, les travaux menés durant cette étude ont notamment montré de graves problèmes de réflexion d'ondes sur les bords du domaine de calcul.

Il existe cependant des perspectives d'améliorations. La principale limitation de ce modèle provient de son mauvais comportement à bas Mach, à l'instar de tous les modèles compressibles tendant asymptotiquement vers l'incompressible. En l'occurrence, il faudrait considérer des méthodes de préconditionnement permettant de s'affranchir d'un choix arbitraire de la vitesse du son quelquefois un peu hasardeux. Les travaux de Turkel [132], Guillard [60] et Dellacherie

---

[27] expliquent le comportement des modèles compressibles à bas Mach et proposent des techniques de préconditionnement pour des solveurs de Godunov. L'implication de la méthode d'intégration en temps semble être une modification qu'il faut envisager, non seulement parce que la majorité de la communauté bas Mach travaille en implicite, y compris pour les méthodes suscitées, mais également parce que la méthode explicite utilisée dans ce travail est véritablement pénalisante, les ondes acoustiques imposant une restriction très sévère sur le pas de temps. D'un autre côté, on peut utiliser cette contrainte venant de l'explicite comme un avantage pour traiter un terme visqueux sans coût numérique supplémentaire. Il serait intéressant d'identifier à partir de quelle résolution de maillage le pas de temps n'est plus affecté par la contrainte visqueuse, la contrainte acoustique prenant le dessus.

Il demeure une volonté affichée et assumée de simplicité, héritière de la philosophie initiée dans [50]. Le modèle mathématique présenté est simple. En l'occurrence, on a montré qu'on pouvait aisément s'inspirer des méthodes incompressibles pour dériver une approche de l'interaction fluide-structure dans une configuration compressible et c'est ce qui fait l'originalité de ce travail. La méthode numérique pour approximer ce modèle reste également peu complexe, gage de rapidité de déploiement des simulations et de facilité de programmation. La possibilité de traiter plusieurs obstacles se conçoit aisément grâce à une programmation orientée objet et bien que le choix d'une fonction *level-set* ait été écarté pour le transport de la fonction indicatrice, l'utilisation de telles courbes de niveau permettrait de traiter des collisions entre objets [23]. Enfin, l'extension des simulations en trois dimensions est immédiate. On admet que de possibles améliorations des méthodes numériques utilisées dans ce travail pourraient être appréciables et que la considération d'une autre physique pourrait être envisagée grâce à la souplesse permise par la loi de fermeture. Les possibilités d'évolutions et d'améliorations du travail exposé dans ce manuscrit sont importantes et le champ d'application vaste.





# Bibliographie

- [1] R. ABGRALL. How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations : A Quasi Conservative Approach . *Journal of Computational Physics* 125.1 (1996), p. 150–160 (cf. p. [25](#)).
- [2] T. ALTAZIN et al. Numerical investigation of BB-AMR scheme using entropy production as refinement criterion . *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 30.3 (2016), p. 256–271 (cf. p. [21](#), [43](#)).
- [3] P. ANGOT, C.-H. BRUNEAU et P. FABRIE. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows . *Numerische Mathematik* 81.4 (1999), p. 497–520 (cf. p. [59](#), [64](#), [88](#), [110](#)).
- [4] P. ANGOT et J. CALTAGIRONE. *New Graphical and Computational Architecture Concept for Numerical Simulation of Supercomputers*. CERFACS, 1990 (cf. p. [58](#)).
- [5] E. ARQUIS et J. CALTAGIRONE. Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle . *CR Acad. Sci. Paris II* 299 (1984), p. 1–4 (cf. p. [58](#)).
- [6] T. BARBERON. Modélisation mathématique et numérique de la cavitation dans les écoulements multiphasiques compressibles . Thèse de doct. Université de Toulon et du Var, 2002 (cf. p. [13](#)).
- [7] T. BARBERON, P. HELLUY et S. ROUY. Practical computation of axisymmetrical multifluid flows . *International Journal of Finite Volumes* 1 (2003), p. 1–34 (cf. p. [36](#)).
- [8] G. BARRAS. Interaction fluide-structure : Application aux explosions sous-marines en champ proche . Thèse de doct. Lille 1, 2012 (cf. p. [13](#)).
- [9] M. J. BERGER et P. COLELLA. Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics . *Journal of Computational Physics* (1988) (cf. p. [22](#)).
- [10] R. P. BEYER et R. J. LEVEQUE. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method . *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29.2 (1992), p. 332–364 (cf. p. [57](#)).

- [11] B. BIAUSSER, S. GRILLI et P. FRAUNIE. Numerical simulations of three-dimensional wave breaking by coupling of a VOF method and a boundary element method . *The Thirteenth International Offshore and Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore et Polar Engineers, 2003 (cf. p. 11).
- [12] B. BIAUSSER. Suivi d'interface tridimensionnel : application au déferlement . Thèse de doct. Université du Sud Toulon-Var. UFR de Sciences et Techniques, 2003 (cf. p. 8).
- [13] B. BIAUSSER et al. 3D two phase flows numerical simulations by SL-VOF method . *International Journal for numerical methods in fluids* 45.6 (2004), p. 581–604 (cf. p. 11).
- [14] N. BOOIJ, R. RIS et L. H. HOLTHUIJSEN. A third-generation wave model for coastal regions : 1. Model description and validation . *Journal of geophysical research : Oceans* 104.C4 (1999), p. 7649–7666 (cf. p. 19).
- [15] I. BORAZJANI, L. GE et F. SOTIROPOULOS. Curvilinear immersed boundary method for simulating fluid structure interaction with complex 3D rigid bodies . en. *Journal of Computational Physics* 227.16 (2008), p. 7587–7620 (cf. p. 97).
- [16] J. BRACKBILL, D. KOTHE et C. ZEMACH. A continuum method for modeling surface tension . en. *Journal of Computational Physics* 100.2 (1992), p. 335–354 (cf. p. 12).
- [17] A. L. BRAUN et A. M. AWRUCH. Aerodynamic and aeroelastic analyses on the CAARC standard tall building model using numerical simulation . *Computers & Structures* 87.9–10 (2009), p. 564–581 (cf. p. 106, 110).
- [18] A. CALDERER, S. KANG et F. SOTIROPOULOS. Level set immersed boundary method for coupled simulation of air/water interaction with complex floating structures . *Journal of Computational Physics* 277 (2014), p. 201–227 (cf. p. 114).
- [19] J. CALTAGIRONE et S. VINCENT. Tensorial penalisation method for solving Navier-Stokes equations . *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series IIB Mechanics* 329.8 (2001), p. 607–613 (cf. p. 59, 64).
- [20] G. CARBOU, P. FABRIE et al. Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow . *Advances in Differential equations* 8.12 (2003), p. 1453–1480 (cf. p. 59).
- [21] A. J. CHORIN. Numerical solution of the Navier-Stokes equations . *Math. Comp.* 22.104 (1968), p. 745–762 (cf. p. 81).
- [22] J. COIRIER et C. NADOT-MARTIN. *Mécanique des milieux continus-4e édition : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2013 (cf. p. 67).

- 
- [23] M. COQUERELLE et G.-H. COTTET. A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies . en. *Journal of Computational Physics* 227.21 (2008), p. 9121–9137 (cf. p. [123](#)).
- [24] M. COQUERELLE. Calcul d’interaction fluide-structure par méthode de vortex et application en synthèse d’images . Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Grenoble, 2008 (cf. p. [97](#), [98](#)).
- [25] J.-P. CROISILLE. Contribution à l’étude théorique et à l’approximation par éléments finis du système hyperbolique de la dynamique des gaz multidimensionnelle et multiespèces . Thèse de doct. Paris 6, 1990 (cf. p. [22](#)).
- [26] B. J. DALY. Numerical study of the effect of surface tension on interface instability . *The Physics of Fluids* 12.7 (1969), p. 1340–1354 (cf. p. [7](#)).
- [27] S. DELLACHERIE. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number . *Journal of Computational Physics* 229.4 (2010), p. 978–1016 (cf. p. [123](#)).
- [28] E. DOMBRE et al. Simulation of floating structure dynamics in waves by implicit coupling of a fully non-linear potential flow model and a rigid body motion approach . en. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy* 1.1 (2015), p. 55–76 (cf. p. [116](#)).
- [29] R. DRESSLER. Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave . *Int. Ass. Sci. Hydrol. Publi.* 38.3 (1954), p. 319–328 (cf. p. [46](#)).
- [30] T. ENGELS et al. FluSI : A novel parallel simulation tool for flapping insect flight using a Fourier method with volume penalization . *arXiv preprint arXiv :1506.06513* (2015) (cf. p. [59](#)).
- [31] T. ENGELS et al. Numerical simulation of fluid–structure interaction with the volume penalization method . en. *Journal of Computational Physics* 281 (2015), p. 96–115 (cf. p. [59](#)).
- [32] T. ENGELS et al. Two-dimensional simulation of the fluttering instability using a pseudospectral method with volume penalization . *Computers & Structures* 122 (2013), p. 101–112 (cf. p. [59](#)).
- [33] M. ERSOY, F. GOLAY et L. YUSHCHENKO. Adaptive scheme based on entropy production : robustness through severe test cases for hyperbolic conservation laws (2013) (cf. p. [21](#), [22](#), [43](#)).
- [34] E. A. FADLUN et al. Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations . *Journal of Computational Physics* 161.1 (2000), p. 35–60 (cf. p. [61](#), [64](#)).

- [35] R. P. FEDKIW et X.-d. LIU. The Ghost Fluid Method for Viscous Flows (1998) (cf. p. 101).
- [36] F. FEITO, J. C. TORRES et A. URENA. Orientation, simplicity, and inclusion test for planar polygons . *Computer and Graphics* 19.4 (1995), p. 595–600 (cf. p. 91, 93, 94).
- [37] F. R. FEITO et J. C. TORRES. Inclusion test for general polyhedra . *Computers & Graphics* 21.1 (1997), p. 23–30 (cf. p. 91).
- [38] C. A. FELIPPA, K. C. PARK et C. FARHAT. Partitioned analysis of coupled mechanical systems . *Computer methods in applied mechanics and engineering* 190.24 (2001), p. 3247–3270 (cf. p. 54).
- [39] M. B. FRIESS et al. A second order anti-diffusive Lagrange-remap scheme for two-component flows . *ESAIM : Proceedings*. T. 32. EDP Sciences, 2011, p. 149–162 (cf. p. 38).
- [40] S. F. FRISKEN et R. N. PERRY. Simple and efficient traversal methods for quadtrees and octrees . *Journal of Graphics Tools* 7.3 (2002), p. 1–11 (cf. p. 21).
- [41] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN. Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography . *Computers & Fluids* 32.4 (2003), p. 479–513 (cf. p. 10).
- [42] J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME. *Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water ; Numerical Validation*. Research Report RR-4084. INRIA, 2000 (cf. p. 10).
- [43] A. GILMANOV, F. SOTIROPOULOS et E. BALARAS. A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids . *Journal of Computational Physics* 191.2 (2003), p. 660–669 (cf. p. 64).
- [44] A. GILMANOV et F. SOTIROPOULOS. A hybrid Cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3D, geometrically complex, moving bodies . *Journal of Computational Physics* 207.2 (2005), p. 457–492 (cf. p. 64).
- [45] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN et J. PERIAUX. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by Navier-Stokes equations . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 112.1–4 (1994), p. 133–148 (cf. p. 63, 64).
- [46] R. GLOWINSKI et al. A distributed Lagrange multiplier fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies : application to particulate flow (2000) (cf. p. 63, 64, 73, 88).
- [47] R. GLOWINSKI et al. A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies : Application to

- Particulate Flow . en. *Journal of Computational Physics* 169.2 (2001), p. 363–426 (cf. p. [63](#), [64](#)).
- [48] G. GODINAUD et al. Une technique nouvelle d’antidiffusion dynamique . *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics* 333.10 (2001), p. 957–960 (cf. p. [38](#)).
- [49] F. GOLAY. Numerical entropy production and error indicator for compressible flows . *Comptes Rendus Mécanique* 337.4 (2009), p. 233–237 (cf. p. [22](#)).
- [50] F. GOLAY et P. HELLUY. Numerical schemes for low Mach wave breaking . *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 21.2 (2007), p. 69–86 (cf. p. [4](#), [13](#), [14](#), [18](#), [44](#), [51](#), [120](#), [122](#), [123](#)).
- [51] F. GOLAY et al. Block-based adaptive mesh refinement scheme using numerical density of entropy production for three-dimensional two-fluid flows . *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 29.1 (2015), p. 67–81 (cf. p. [21](#), [43](#)).
- [52] D. GOLDSTEIN, R. HANDLER et L. SIROVICH. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field . *Journal of Computational Physics* 105.2 (1993), p. 354–366 (cf. p. [58](#), [64](#)).
- [53] S. GRILLI. Fully nonlinear potential flow models used for long wave runup prediction (1997) (cf. p. [11](#)).
- [54] S. GRILLI et I. SVENDSEN. Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows . *Engineering Analysis with Boundary Elements* 7.4 (1990), p. 178–195 (cf. p. [11](#)).
- [55] S. T. GRILLI, P. GUYENNE et F. DIAS. A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom . *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 35.7 (2001), p. 829–867 (cf. p. [11](#)).
- [56] S. T. GRILLI, J. SKOURUP et I. A. SVENDSEN. An efficient boundary element method for nonlinear water waves . *Engineering Analysis with Boundary Elements* 6.2 (1989), p. 97–107 (cf. p. [11](#)).
- [57] S. T. GRILLI et R. SUBRAMANYA. Numerical modeling of wave breaking induced by fixed or moving boundaries . *Computational Mechanics* 17.6 (1996), p. 374–391 (cf. p. [11](#)).
- [58] S. GUIGNARD et al. Solitary wave breaking on sloping beaches : 2-D two phase flow numerical simulation by SL-VOF method . *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 20.1 (2001), p. 57–74 (cf. p. [11](#)).
- [59] S. GUIGNARD et al. Computation of shoaling and breaking waves in nearshore areas by the coupling of BEM and VOF methods . *The Ninth International Offshore and*

- Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore et Polar Engineers, 1999 (cf. p. 11).
- [60] H. GUILLARD et C. VIOZAT. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit . *Computers & Fluids* 28.1 (1999), p. 63–86 (cf. p. 18, 115, 122).
- [61] S. HAERI et J. SHRIMPTON. On the application of immersed boundary, fictitious domain and body-conformal mesh methods to many particle multiphase flows . *International Journal of Multiphase Flow* 40 (2012), p. 38–55 (cf. p. 102).
- [62] E. HAINES. Point in polygon strategies . *Graphics gems IV* 994 (1994), p. 24–26 (cf. p. 91).
- [63] F. H. HARLOW et J. E. WELCH. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible flow of fluid with free surface . *The physics of fluids* (1965) (cf. p. 6).
- [64] A. HARTEN et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III . *Journal of computational physics* 71.2 (1987), p. 231–303 (cf. p. 10).
- [65] P. HELLUY. Simulation numérique des écoulements multiphasiques : de la théorie aux applications - Habilitation à diriger des recherches . 2005 (cf. p. 116).
- [66] C. W. HIRT et B. D. NICHOLS. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries . *Journal of computational physics* 39.1 (1981), p. 201–225 (cf. p. 7).
- [67] D. HOLMES et S. CONNELL. Solution of the 2D Navier-Stokes equations on unstructured adaptive grids . *9th Computational Fluid Dynamics Conference*. 1989, p. 1932 (cf. p. 36).
- [68] G. HOU, J. WANG et A. LAYTON. Numerical Methods for Fluid-Structure Interaction A Review . en. *Communications in Computational Physics* 12.02 (2012), p. 337–377 (cf. p. 54).
- [69] J. HOVNANIAN. Méthode de frontières immergées pour la mécanique des fluides. Application à la simulation de la nage. Thèse de doct. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2012 (cf. p. 62).
- [70] S. HUANG, Q. LI et S. XU. Numerical evaluation of wind effects on a tall steel building by CFD . en. *Journal of Constructional Steel Research* 63.5 (2007), p. 612–627 (cf. p. 110).
- [71] S. ITO. Study of the transient heave oscillation of a floating cylinder. Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology, 1977 (cf. p. 115).
- [72] JAUSE LABERT. Simulation numérique d'écoulements turbulents en rotation, confinement et forçage à l'aide d'une méthode de pénalisation . Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2012 (cf. p. 59).

- 
- [73] B. KADOCH et al. A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving obstacles . en. *Journal of Computational Physics* 231.12 (2012), p. 4365–4383 (cf. p. 59).
- [74] G. KARYPIS et V. KUMAR. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs . *SIAM Journal on scientific Computing* 20.1 (1998), p. 359–392 (cf. p. 43).
- [75] K. KHADRA et al. Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier–Stokes equations . en. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 34.8 (2000), p. 651–684 (cf. p. 58, 64).
- [76] S.-E. KIM. A Multi-Dimensional Linear Reconstruction Scheme for Arbitrary Unstructured Mesh . *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. 2003, p. 3990 (cf. p. 37).
- [77] M. KIRKPATRICK, S. ARMFIELD et J. KENT. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid . *Journal of Computational Physics* 184.1 (2003), p. 1–36 (cf. p. 64).
- [78] S. KOKH et F. LAGOUTIÈRE. An anti-diffusive numerical scheme for the simulation of interfaces between compressible fluids by means of a five-equation model . en. *Journal of Computational Physics* 229.8 (2010), p. 2773–2809 (cf. p. 38).
- [79] S. KOKH. Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d’interface.pdf . Anglais. Thèse de doct. 2001 (cf. p. 38, 40).
- [80] M.-C. LAI et C. S. PESKIN. An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity . *Journal of Computational Physics* 160.2 (2000), p. 705–719 (cf. p. 57).
- [81] D. V. LE. *An immersed interface method for solving viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries*. 2005 (cf. p. 62).
- [82] B. P. LEONARD. The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection . *Computer methods in applied mechanics and engineering* 88.1 (1991), p. 17–74 (cf. p. 9).
- [83] X.-D. LIU, S. OSHER et T. CHAN. Weighted essentially non-oscillatory schemes . *Journal of computational physics* 115.1 (1994), p. 200–212 (cf. p. 10).
- [84] L. LOBOVSKÝ et al. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break . en. *Journal of Fluids and Structures* 48 (2014), p. 407–434 (cf. p. 45, 46, 48).



- [85] P. LUBIN et al. Fully three-dimensional direct numerical simulation of a plunging breaker . *Comptes Rendus Mecanique* 331.7 (2003), p. 495–501 (cf. p. 12).
- [86] J. MARTIN et W. MOYCE. Part IV. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane . *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 244.882 (1952), p. 312–324 (cf. p. 46).
- [87] W. H. MELBOURNE. Comparison of measurements on the CAARC standard tall building model in simulated model wind flows . *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 6.1-2 (1980), p. 73–88 (cf. p. 106).
- [88] C. MICHLER et al. A monolithic approach to fluid–structure interaction . en. *Computers & Fluids* 33.5-6 (2004), p. 839–848 (cf. p. 54).
- [89] R. MITTAL et G. IACCARINO. Immersed boundary methods . en. *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1 (2005), p. 239–261 (cf. p. 54, 56, 57, 62).
- [90] R. MITTAL et al. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries . *Journal of computational physics* 227.10 (2008), p. 4825–4852 (cf. p. 64).
- [91] J. MOHD-YUSOF. Combined immersed boundaries . *B-Splines Methods for Simulations of Flow in Complex Geometries, CTR Annual Research Briefs, NASA Ames* (1997) (cf. p. 61, 64).
- [92] T. MÖLLER et B. TRUMBORE. Fast, minimum storage ray/triangle intersection . *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*. ACM, 2005, p. 7 (cf. p. 96).
- [93] J. J. MONAGHAN. Simulating free surface flows with SPH . *Journal of computational physics* 110.2 (1994), p. 399–406 (cf. p. 12).
- [94] J. J. MONAGHAN. Smoothed particle hydrodynamics . *Annual review of astronomy and astrophysics* 30.1 (1992), p. 543–574 (cf. p. 12).
- [95] F. MORENCY et H. BEAUGENDRE. Further validations of penalization and VIC based methods for aeronautic application . *6th. European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI)*. 2014, p. 5344–5355 (cf. p. 110).
- [96] S. MUZAFERIJA et al. A two-fluid Navier-Stokes solver to simulate water entry . *Proceedings of the 22nd symposium on naval hydrodynamics, Washington, DC*. 1998, p. 277–289 (cf. p. 9).
- [97] W. F. NOH et P. WOODWARD. SLIC (simple line interface calculation) . *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28 July 2, 1976 Twente University, Enschede*. Springer, 1976, p. 330–340 (cf. p. 8).

- 
- [98] C. J. OGAYAR, R. J. SEGURA et F. R. FEITO. Point in solid strategies . en. *Computers & Graphics* 29.4 (2005), p. 616–624 (cf. p. 91).
- [99] S. OSHER et R. P. FEDKIW. Level Set Methods : An Overview and Some Recent Results . *Journal of Computational Physics* 169.2 (2001), p. 463–502 (cf. p. 10).
- [100] S. OSHER et J. A. SETHIAN. *Fronts propagating with curvature-dependent speed*. Rapp. tech. 1988 (cf. p. 9).
- [101] N. A. PATANKAR et al. A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows . *International Journal of Multiphase Flow* 26.9 (2000), p. 1509–1524 (cf. p. 63, 64, 73, 75, 88).
- [102] N. A. PATANKAR. *A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows*. Rapp. tech. 2001 (cf. p. 63, 64).
- [103] B. PERTHAME et C. SIMEONI. A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term . *Calcolo* 38.4 (2001), p. 201–231 (cf. p. 10).
- [104] C. S. PESKIN. Flow patterns around heart valves : a digital computer method for solving the equations of motion . Thèse de doct. Sue Golding Graduate Division of Medical Sciences, Albert Einstein College of Medicine, Yeshiva University, 1972 (cf. p. 57, 64).
- [105] C. S. PESKIN. Numerical analysis of blood flow in the heart . *Journal of computational physics* 25.3 (1977), p. 220–252 (cf. p. 57, 64).
- [106] C. S. PESKIN. The immersed boundary method . en. *Acta Numerica* 11 (2002) (cf. p. 57, 64).
- [107] K. PONS et M. ERSOY. Adaptive mesh refinement method. Part 1 : Automatic thresholding based on a distribution function (2016) (cf. p. 23).
- [108] K. PONS et al. Adaptive mesh refinement method. Part 2 : Application to tsunamis propagation (2016) (cf. p. 23).
- [109] S. POPINET. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries . *Journal of Computational Physics* 190.2 (2003), p. 572–600 (cf. p. 21).
- [110] E. G. PUCKETT. A volume-of-fluid interface tracking algorithm with applications to computing shock wave refraction . *Proceedings of the Fourth International Symposium on Computational Fluid Dynamics*. 1991, p. 933–938 (cf. p. 8).
- [111] G. PUPPO. Numerical entropy production for central schemes . *SIAM Journal on Scientific Computing* 25.4 (2004), p. 1382–1415 (cf. p. 22).
- [112] G. PUPPO. Numerical entropy production on shocks and smooth transitions . *Journal of scientific computing* 17.1-4 (2002), p. 263–271 (cf. p. 22).

- [113] RANDRIANARIVELO. Etude numérique des interactions fluide-solide . Thèse de doct. Université Bordeaux 1, 2005 (cf. p. 59).
- [114] T. N. RANDRIANARIVELO et al. Numerical modelling of solid particle motion using a new penalty method . *International journal for numerical methods in fluids* 47.10-11 (2005), p. 1245–1251 (cf. p. 59).
- [115] J. RITZ et J. CALTAGIRONE. A numerical continuous model for the hydrodynamics of fluid particle systems . *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 30.8 (1999), p. 1067–1090 (cf. p. 59).
- [116] S. ROUY. Modélisation mathématique et numérique d’écoulements diphasiques compressibles. Application au cas industriel d’un générateur de gaz . Thèse de doct. Université de Toulon, 2001 (cf. p. 13).
- [117] E. M. SAIKI et S. BIRINGEN. Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow : Application of a Virtual Boundary Method . *Journal of Computational Physics* 123.2 (1996), p. 450–465 (cf. p. 57, 58, 64).
- [118] A. N. SAMBE. Développement d’un modèle de simulation 3D d’impact de vagues en zones côtières et offshores . Thèse de doct. Université de Toulon et du Var, 2011 (cf. p. 4, 38, 39).
- [119] A. SARTHOU. Méthodes de domaines fictifs d’ordre élevé pour les équations elliptiques et de Navier-Stokes. Application au couplage fluide-structure . Thèse de doct. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2009 (cf. p. 97).
- [120] K. SCHNEIDER. Numerical simulation of the transient flow behaviour in chemical reactors using a penalisation method . en. *Computers & Fluids* 34.10 (2005), p. 1223–1238 (cf. p. 59).
- [121] K. SCHNEIDER et al. Numerical simulation of flows past flat plates using volume penalization . en. *Computational and Applied Mathematics* 33.2 (2014), p. 481–495 (cf. p. 59).
- [122] N. SHARMA et N. A. PATANKAR. A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows . en. *Journal of Computational Physics* 205.2 (2005), p. 439–457 (cf. p. 63, 64).
- [123] K.-M. SHYUE. An Eulerian Interface-Sharpener Algorithm for Compressible Gas Dynamics . en. *Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes - HPSC 2012*. Sous la dir. de H. G. BOCK et al. Springer International Publishing, 2014, p. 221–231 (cf. p. 39, 40).
- [124] K. K. SO, X. Y. HU et N. A. ADAMS. Anti-diffusion Method for Interface Steepening in Two-phase Incompressible Flow . *J. Comput. Phys.* 230.13 (2011), p. 5155–5177 (cf. p. 38).

- 
- [125] K. SO, X. HU et N. ADAMS. Anti-diffusion interface sharpening technique for two-phase compressible flow simulations . en. *Journal of Computational Physics* 231.11 (2012), p. 4304–4323 (cf. p. 38).
- [126] D. SUN et W. TAO. A coupled volume-of-fluid and level set (VOSET) method for computing incompressible two-phase flows . *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53.4 (2010), p. 645–655 (cf. p. 10).
- [127] M. SUSSMAN et E. G. PUCKETT. A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows . *Journal of Computational Physics* 162.2 (2000), p. 301–337 (cf. p. 10).
- [128] S. TANGUY. Développement d’une méthode de suivi d’interface. Applications aux écoulements diphasiques . Thèse de doct. Université de Rouen, 2004 (cf. p. 98).
- [129] H. L. TOLMAN et al. User manual and system documentation of WAVEWATCH III TM version 3.14 . *Technical note, MMAB Contribution 276* (2009), p. 220 (cf. p. 19).
- [130] E. F. TORO. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. 3rd ed. Dordrecht ; New York : Springer, 2009 (cf. p. 24).
- [131] Y.-H. TSENG et J. H. FERZIGER. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry . *Journal of Computational Physics* 192.2 (2003), p. 593–623 (cf. p. 64).
- [132] E. TURKEL. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations . *Journal of computational physics* 72.2 (1987), p. 277–298 (cf. p. 18, 122).
- [133] O. UBBINK et R. ISSA. A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes . *Journal of Computational Physics* 153.1 (1999), p. 26–50 (cf. p. 9).
- [134] H. UDAYKUMAR, R. MITTAL et P. RAMPUNGGON. Interface tracking finite volume method for complex solid–fluid interactions on fixed meshes . *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 18.2 (2002), p. 89–97 (cf. p. 62, 64).
- [135] H. UDAYKUMAR, R. MITTAL et W. SHYY. Computation of solid–liquid phase fronts in the sharp interface limit on fixed grids . *Journal of computational physics* 153.2 (1999), p. 535–574 (cf. p. 62, 64).
- [136] H. UDAYKUMAR et al. A sharp interface Cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries . *Journal of Computational Physics* 174.1 (2001), p. 345–380 (cf. p. 62, 64).
- [137] M. UHLMANN. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows . *Journal of Computational Physics* 209.2 (2005), p. 448–476 (cf. p. 61).

- [138] S. O. UNVERDI et G. TRYGGVASON. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows . *Journal of computational physics* 100.1 (1992), p. 25–37 (cf. p. 7).
- [139] B. VAN LEER. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method . *Journal of computational Physics* 32.1 (1979), p. 101–136 (cf. p. 36).
- [140] R. VERZICCO et al. LES in complex geometries using boundary body forces . *Center for Turbulence Research Proceedings of the Summer Program, NASA Ames= Stanford University* (1998), p. 171–186 (cf. p. 61, 64).
- [141] P. VIGNEAUX. Méthodes Level Set pour des problèmes d’interface en microfluidique . Thèse de doct. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2007 (cf. p. 98).
- [142] S. VINCENT et al. Local penalty methods for flows interacting with moving solids at high Reynolds numbers . *Computers & Fluids* 36.5 (2007), p. 902–913 (cf. p. 60).
- [143] T. WACLAWCZYK et T. KORONOWICZ. Modeling of the wave breaking with CIC-SAM and HRIC high resolution schemes . *ECCOMAS CFD 2006, The Netherlands, September 5-8, 2006*. 2006 (cf. p. 9).
- [144] Z. WANG, J. FAN et K. LUO. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles . *International Journal of Multiphase Flow* 34.3 (2008), p. 283–302 (cf. p. 64).
- [145] H. WELLER. Derivation, modelling and solution of the conditionally averaged two-phase flow equations . *Nabla Ltd, No Technical Report TR/HGW/02* (2002) (cf. p. 9).
- [146] T. YE et al. An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries . *Journal of computational physics* 156.2 (1999), p. 209–240 (cf. p. 62).
- [147] X. D. ZHANG, J.-Y. TRÉPANIÉ et R. CAMARERO. A posteriori error estimation for finite-volume solutions of hyperbolic conservation laws . *Computer methods in applied mechanics and engineering* 185.1 (2000), p. 1–19 (cf. p. 22).



Thomas ALTAZIN

IMATH/MIO, Université de Toulon

## Un modèle d'interaction fluide-structure en régime compressible faible Mach

L'objectif de cette étude est de modéliser et de simuler numériquement des phénomènes d'interaction fluide-structure dans un cadre compressible pour des écoulements non-visqueux. La modélisation proposée repose sur une formulation monolithique du couplage fluide-structure en considérant une unique équation permettant de résoudre simultanément le mouvement du fluide et du solide. Un terme supplémentaire dans l'équation de quantité de mouvement traduit la présence de l'obstacle dans l'écoulement. La contribution de ce terme de pénalisation est étudiée à travers l'analogie avec une formulation variationnelle et un intérêt est porté à la rigueur physique, mathématique et numérique de l'unification des deux milieux, en particulier à l'interface. L'approche numérique correspond à une méthode à pas fractionnaire, en tout point identique aux méthodes de prédiction-corrrection utilisées en incompressible. Quelques résultats numériques clôturent ce travail et permettent de préciser les conditions d'application de ce modèle d'interaction fluide-structure en régime compressible.

**Mot clés :** interaction fluide-structure, écoulement compressible, Euler, pénalisation, domaines fictifs, faible Mach

### A fluid-structure interaction model for low-Mach compressible flows

This study deals with the modeling and simulation of fluid-structure interactions in a compressible framework for inviscid flows. A monolithic approach has been chosen for treating the coupling between the fluid and the solid through a single equation that solves the motion of both simultaneously. An additional term in the momentum equation allows to take into account the obstacle in the flow. A weak formulation is derived from previous similar works that confirms the unification problem is mathematically well-posed, especially on the interface. The numerical procedure relies on a time-splitting method similar to prediction-correction methods for incompressible flows. Some numerical examples illustrate this work and allows to conclude on the feasibility of this fluid-structure interaction model for compressible flows.

**Keywords :** fluid-structure interaction, compressible flow, Euler, penalization, fictitious domains, low-Mach