
Optimisation topologique de forme et raffinement de maillage

Frédéric Golay

Laboratoire ANAM/MNC
Université de Toulon BP 56
F-83162 La Valette du Var cedex
frederic.golay@univ-tln.fr

RÉSUMÉ. Nous abordons le problème d'optimisation topologique de forme, par l'approche des matériaux fictifs. Cette approche conduit à une formulation de matériaux à blocage, qui est traitée numériquement par éléments finis, comme un problème d'élasticité non linéaire. La topologie étant inconnue et le problème fortement non linéaire, le temps de calcul et la qualité de la solution dépendent très fortement du maillage. C'est pourquoi nous utilisons une méthode de raffinement de maillage local automatique, ce qui permet de cerner rapidement la topologie optimale sur un maillage grossier, puis d'affiner la solution aux fortes non-linéarités géométriques ou numériques. Nous testons en premier lieu des critères de raffinement liés à la physique du problème, comme l'épaisseur ou le gradient d'épaisseur, puis des critères issus d'un calcul d'erreur a posteriori développé par R. Verfürth, cette dernière approche s'avérant très performante.

ABSTRACT. We present the problem of topological optimization with fictitious materials. This approach leads to a formulation of blocking materials that is treated numerically by finite elements as a problem of non-linear elasticity. The computing time and the quality of the solution depend strongly on the mesh, because the topology is unknown and the problem is highly non-linear. For these reasons we use a local automatic mesh refinement method that allows to quickly determine an optimal topology on a coarse grid and then to refine the solution according to strong geometrical or numerical non-linearities. We test initially some refinement criteria related to the physics of the problem, such as the thickness or the thickness gradient, and then a criterion resulting from a posteriori error analysis developed by R. Verfürth.

MOTS-CLÉS : optimisation topologique, éléments finis, raffinement de maillage, erreurs a posteriori.

KEYWORDS: topological optimisation, finite element, mesh refinement, a posteriori error.

1. Introduction

L'optimisation topologique de forme est un problème récurrent en ingénierie : comment déterminer, à chargement et volume donnés, la forme d'une structure élastique qui présente la rigidité maximale ? Ce problème, abordé initialement par des techniques de variations de frontières, l'est depuis quelques décennies par des méthodes de relaxation, sans a priori quant à la topologie de la structure. La relaxation par homogénéisation en est la plus étudiée (Allaire *et al.*, 1993, 1997 ; Bendsoe, 1995 ; Bendsoe, 2002). Elle autorise des approches de multichargement, de mécanismes, d'optimisation de matériaux... Pour notre part, nous étudions le cas de structures planes qui peuvent être traitées par une approche de matériaux fictifs (Golay *et al.*, 2001), ce qui conduit à une formulation de matériau à blocage, traité numériquement par éléments finis comme un problème d'élasticité non linéaire. On constate que la qualité de la solution et la convergence du schéma numérique sont conditionnées par le maillage utilisé.

C'est pourquoi nous utilisons par la suite une procédure de raffinement de maillage automatique couplée à un critère de raffinement issu de la physique du problème ou d'une estimation a posteriori. En effet, dans le but de s'affranchir de la définition du maillage et de maîtriser la qualité des calculs éléments finis réalisés, les travaux sur les estimateurs d'*erreur a posteriori* connaissent depuis (Babuska *et al.*, 1978) un essor justifié. Très étudié par les mathématiciens, (Pichelin *et al.*, 2000 ; Bernardi *et al.*, 2000 ; Verfürth, 1996...) le domaine d'application est en général la mécanique des fluides et curieusement plus rarement des applications en mécanique du solide (Aubry *et al.*, 2002). Trois approches principales peuvent être discernées : l'approche hiérarchique, l'approche loi de comportement et l'approche des résidus. Nous n'avons pas utilisé les approches hiérarchique (Pichelin *et al.*, 2000) et loi de comportement (Ladevèze *et al.*, 1999) qui nécessitent des patches d'éléments, ce qui est contraignant dans l'écriture de notre code. Nous avons préféré la méthode des résidus qui permet une approche locale, et en particulier des estimateurs d'*erreur a posteriori* adaptés aux problèmes elliptiques quasi linéaires du second ordre proposés dans les travaux de (Verfürth, 2000). Ces travaux sont à l'origine, par exemple, d'estimateurs sur des problèmes de p-Laplacien (Liu *et al.*, 2001), problème similaire à notre approche.

Comme nous le constaterons, l'utilisation d'un maillage à raffinement adaptatif permet de diminuer le temps de calcul et d'appréhender les singularités du problème. Les performances de la démarche sont conditionnées par la qualité du remaillage et le choix du critère de raffinement.

2. Approche des matériaux fictifs

Dans cette section, nous rappelons les étapes principales qui conduisent à la formulation du problème d'optimisation topologique que nous considérons, une démonstration détaillée se trouvant dans (Golay *et al.*, 2001).

2.1. Problème initial

Soit une plaque plane d'épaisseur variable $h(x)$ occupant un domaine, constituée d'un matériau élastique homogène isotrope, de module d'Young E et coefficient de poisson ν . Sous l'hypothèse des contraintes planes, l'énergie élastique s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_v(x) : D : \varepsilon_v(x) h(x) ds, \quad [1]$$

où v est un champ de déplacement cinématiquement admissible, $\varepsilon_v = (\nabla v + \nabla^T v)/2$ est le tenseur des déformations et D est le tenseur d'élasticité sous l'hypothèse des contraintes planes.

La plaque est soumise à une densité de force F s'appliquant le long d'une ligne \mathcal{L} et à des conditions de Dirichlet bloquant au moins les déplacements rigides. A l'équilibre, le champ de déplacement u solution du problème d'élasticité minimise l'énergie potentielle,

$$J(v, h) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_v(x) : D : \varepsilon_v(x) h(x) ds - \int_{\mathcal{L}} F \cdot v dl \quad [2]$$

et l'énergie élastique \mathcal{E} peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(h) = -J(u, h) = -\inf_v J(v, h) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_u(x) : D : \varepsilon_u(x) h(x) ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} F \cdot u dl. \quad [3]$$

Nous cherchons, pour un volume V et un chargement F donnés, la répartition de matière qui maximise la rigidité de la plaque, ou encore, de manière équivalente qui minimise l'énergie élastique. Le problème d'optimisation topologique de forme s'écrit donc :

$$\inf_{\substack{h \geq 0 \\ \int_{\Omega} h ds = V}} \mathcal{E}(h). \quad [4]$$

2.2. Formulation matériau à blocage

Nous allons montrer rapidement comment le problème d'optimisation peut se reformuler en un problème de type matériaux à blocage. En injectant [3] dans [4], puis en utilisant le théorème du « min-max », le problème d'optimisation devient :

$$-\text{Inf}_v \sup_{\substack{h \geq 0 \\ \int_{\Omega} h ds = V}} J(v, h). \quad [5]$$

Pour maximiser [2], à un champ de déplacement cinématiquement admissible v donné, il suffit de concentrer h là où l'énergie élastique locale est maximale. Donc, [5] est réécrit :

$$-\text{Inf}_v \left\{ \frac{V}{2} \|\varepsilon_v(x) : D : \varepsilon_v(x)\|_{\infty} - \int_{\mathcal{L}} F \cdot v \, dl \right\}. \quad [6]$$

Et enfin, après un changement de variable normalisant [6], nous aboutissons à :

$$-\frac{1}{2V} \text{Inf}_w \left\{ - \int_{\mathcal{L}} F \cdot w \, dl \right\}_{\|\varepsilon_w : D : \varepsilon_w\|_{\infty} \leq 1}^2. \quad [7]$$

Donc, avec [4] nous cherchons la répartition de matière $h(x)$ qui minimisait la compliance (travail des forces extérieures) pour un volume V donné ; ce que nous reformulons en la recherche du champ de déplacement élastique cinématiquement admissible w minimisant la compliance pour une énergie locale bloquée.

3. Formulation éléments finis

3.1. Relaxation du problème

Pour résoudre numériquement [7], nous proposons de régulariser la norme infinie en introduisant une fonction indicatrice $I(t)$, telle que :

$$I(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{sin on} \end{cases},$$

que l'on approchera par la fonction polynomiale $t^p/2p$ (p grand). Le problème de minimisation devient alors :

$$\text{Inf}_w \left\{ - \int_{\mathcal{L}} F \cdot w \, dl + \int_{\Omega} I(\varepsilon_w : D : \varepsilon_w) \, ds \right\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{Inf}_w \left\{ - \int_{\mathcal{L}} F \cdot w \, dl + \int_{\Omega} \frac{1}{2p} (\varepsilon_w : D : \varepsilon_w)^p \, ds \right\}. \quad [8]$$

Pour un paramètre p donné, la formulation variationnelle de [8] s'écrit :

$$\int_{\Omega} H(u) \varepsilon_u : D : \varepsilon_w \, ds = \int_{\mathcal{L}} F \cdot w \, dl \quad [9]$$

où

$$H(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u}} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u}})^{p-1}. \quad [10]$$

On reconnaît en [9] la formulation variationnelle d'un problème d'élasticité sous l'hypothèse des contraintes planes, où l'épaisseur H dépend de la densité d'énergie élastique [10]. Par identification, H représente l'épaisseur h du problème d'optimisation topologique [4] que nous recherchons. Le problème [9] et [10] est certes non linéaire, mais sa formulation permet aisément l'application d'une méthode éléments finis. Plutôt qu'un algorithme itératif d'optimisation sous contraintes, nous pourrions donc utiliser très simplement les outils numériques classiques en mécanique des structures.

3.2. Formulation éléments finis

Grâce à la relaxation du problème d'optimisation topologique sous la forme [9] et [10], nous pouvons facilement mettre en œuvre une formulation éléments finis. En utilisant les notations habituelles (Dhatt *et al.*, 1984, Batoz *et al.*, 1995), nous notons $\{\mathbf{u}\}$ le vecteur des inconnues nodales et N^e les fonctions d'interpolation de l'élément e . Alors le champ de déplacement est approché sur e par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \right] \{\mathbf{u}\}, \quad [11]$$

et par différentiation nous définissons la matrice élémentaire B^e telle que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \right] \{\mathbf{u}\}. \quad [12]$$

En utilisant [11] et [12] la densité d'énergie élastique sur un élément e s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{u}} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{w}} = \{\mathbf{u}\}^T \left[\mathbf{B}^e \right]^T \left[\mathbf{D} \right] \left[\mathbf{B}^e \right] \{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{u}\}^T \left[\mathbf{K}^e \right] \{\mathbf{w}\}, \quad [13]$$

où K^e représente la matrice de rigidité élémentaire en élasticité plane. Nous décomposons alors le domaine Ω en éléments finis e , de support V^e , et la formulation variationnelle [9] devient :

$$\sum_e \int_{V^e} \left(\{\mathbf{u}\}^T \left[\mathbf{K}^e \right] \{\mathbf{u}\} \right)^{p-1} \{\mathbf{w}\}^T \left[\mathbf{K}^e \right] \{\mathbf{u}\} ds = \sum_e \int_{\partial V^e} \{\mathbf{w}\}^T \left[\mathbf{N}^e \right]^T \{\mathbf{F}\} dl. \quad [14]$$

Comme [14] est écrit quel que soit le champ de déplacement w , nous cherchons en définitive le champ de déplacement u qui annule le résidu R_p ,

$$\{R_p(u)\} = \sum_e \int_{V^e} \left(\{u\}^T [K^e] \{u\} \right)^{p-1} [K^e] \{u\} ds - \sum_e \int_{\partial V^e} [N^e]^T \{F\} dl, \quad [15]$$

par une méthode de Newton-Raphson, dont la matrice tangente est calculée explicitement par :

$$\left[\frac{\partial \{R_p\}}{\partial \{u\}} \right] = \sum_e \int_{V^e} \left(\{u\}^T [K^e] \{u\} \right)^{p-1} [K^e] ds + 2(p-1) \sum_e \int_{V^e} \left(\{u\}^T [K^e] \{u\} \right)^{p-2} [K^e] \{u\} \left([K^e] \{u\} \right)^T ds \quad [16]$$

Comme annoncée, la programmation de [15] et [16] est très simple à implanter puisqu'elle ne nécessite que les matrices et vecteurs élémentaires d'une formulation éléments finis de l'élasticité classique.

Le problème est fortement non linéaire, si bien que le schéma de Newton-Raphson ne converge pas pour une forte valeur de p . C'est pourquoi, nous initialisons le calcul par la solution élastique ($p = 1$), puis nous incrémentons progressivement le paramètre p . Le calcul de la matrice tangente à chaque itération est nécessaire, en particulier au début du calcul.

4. Validation

4.1. Exemple analytique

Afin de valider notre modèle numérique, nous le confrontons à un problème résolu analytiquement (Golay *et al.*, 2001). On considère une plaque carrée, centrée à l'origine, de côté 2, soumise à une pression sur sa frontière ($F(\pm 1, y) = (2 + y^2)^{-1}$, $F(x, \pm 1) = (2 + x^2)^{-1}$). La solution analytique du problème d'optimisation topologique est de la forme :

$$h(x, y) = \sqrt{\frac{1}{(2+x)^4} + \frac{1}{(2+y)^4}}. \quad [17]$$

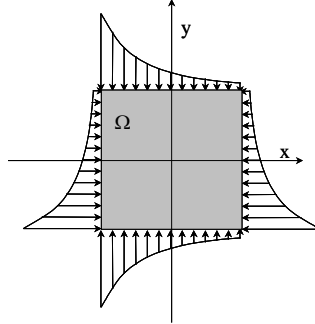


Figure 1. *Pression*

Pour initialiser le calcul nous annulons [15] pour $p = 1$, qui est la solution élastique, puis nous incrémentons p de 2 et résolvons (15) par un schéma de Newton-Raphson ; puis l'incrément/résolution est réitérée jusqu'à la valeur de p désirée. Si les premiers calculs ($p = 2, 4, \dots$) nécessitent une vingtaine d'itérations car le système est fortement non linéaire, très rapidement le schéma converge en 4 à 5 itérations. Nous avons étudié cet exemple sur trois grilles régulières à interpolation quadratique (20x20, 40x40, 80x80).

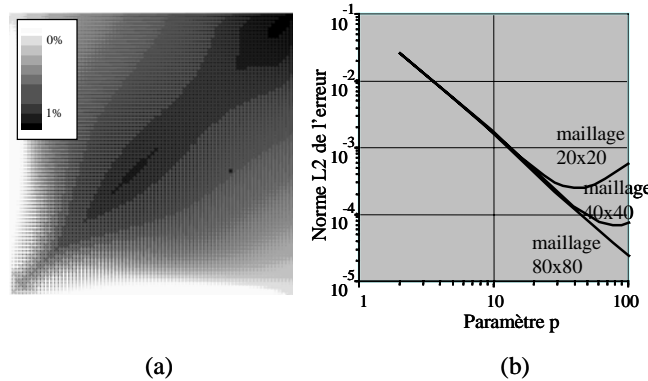


Figure 2. (a) *Ecart relatif Analytique/Numérique maillage 80x80 ($p = 20$)* (b) *Norme L2 de l'erreur en fonction du paramètre p pour 3 maillages*

L'analyse de l'erreur relative entre les solutions numériques et analytiques en chacun des points du domaine a été faite pour chacune des trois grilles (figure 2a) ce qui valide la formulation numérique du problème d'optimisation topologique. En comparant la norme L2 de l'erreur sur l'épaisseur de la plaque pour les trois types de grilles, on constate une bonne convergence lorsque le paramètre p augmente (figure 2b). Même dans le cas où p est petit (environ 10), la conception obtenue est proche de la solution exacte. Il est donc pertinent de calculer les premières solutions

en se basant sur un maillage grossier, puis de raffiner le maillage afin d'obtenir une meilleure précision, car la qualité du maillage permettra ou non d'atteindre certaines valeurs de p , c'est-à-dire la convergence du schéma de Newton-Raphson.

4.2. Exemple du moyeu

Nous cherchons dans un domaine Ω infini, la répartition de matière optimale pour résister à trois forces égales et concourantes. C'est le cas par exemple d'un moyeu d'hélicoptère reprenant les efforts dus à la rotation des pales (figure 3).

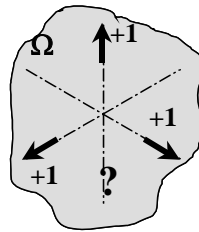


Figure 3. Position du problème

La géométrie obtenue respecte bien les symétries (figure 4), si bien qu'un raffinement de maillage a été effectué en tenant compte des symétries afin d'utiliser le plus grand nombre d'éléments possible, pour atteindre de grandes valeurs du paramètre p . On constate que très rapidement ($p = 25$) la topologie optimale est définie, même sur un maillage grossier (figure 5). Une plus grande précision nécessite une augmentation du paramètre p , augmentation qui est conditionnée par la finesse du maillage. De plus, on constate que le point d'application des forces présente numériquement une singularité qui perturbe le système et donc la convergence du schéma de Newton-Raphson. On passe en ce point brutalement d'une forte épaisseur à du vide (point B).

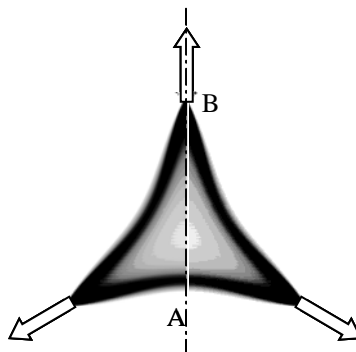


Figure 4. Epaisseur (Foncé épais, blanc pas de matière)

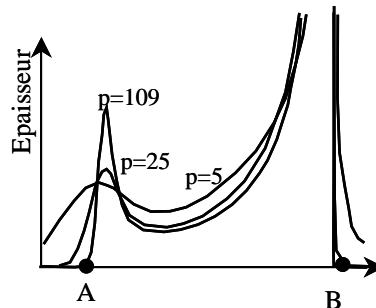


Figure 5. *Epaisseur sur un axe de symétrie pour 3 valeurs du paramètre p*

En définitive, nous constatons d'une part, que les premières étapes de la méthode (environ jusqu'à $p = 10$) sont très coûteuses en temps de calcul mais permettent de définir la topologie ; puis, d'autre part, que l'augmentation du paramètre p affine la géométrie si le maillage l'autorise. C'est pourquoi, par la suite, nous utiliserons une technique de raffinement de maillage, permettant de calculer les premières étapes sur un maillage très grossier, puis d'affiner la topologie sur un maillage adéquat suivant des critères à définir.

5. Raffinement de maillage

5.1. Principe

Notre but ici n'est pas de recréer et optimiser un maillage global (par exemple, (Frey *et al.*, 1999), mais de raffiner localement un maillage existant (créé par un logiciel du marché) suivant des critères à définir. Pour des raisons purement d'architecture logicielle, nous appliquerons ces critères sur les éléments et non pas les arêtes des éléments. Le logiciel que nous codéveloppons, SIC, par son approche « orientée objet » (Breitkopf *et al.*, 1992) est plutôt adapté à une approche locale. La procédure de raffinement de maillage est particulièrement simple à énoncer, même si dans les faits la procédure est plus astucieuse :

- 1) Définir les éléments à raffiner ;
- 2) Raffiner les éléments ;
- 3) Vérifier la conformité de chaque élément et arrêter en cas de succès ;
- 4) En cas de non-conformité d'un élément, subdiviser cet élément si possible, puis refaire l'étape 3.

Lors de l'étape 1, nous choisissons le pourcentage d'éléments du maillage à raffiner, ainsi que le critère de raffinement à utiliser.

Pour raffiner les éléments lors de l'étape 2, nous subdivisons un élément quadrilatère en quatre éléments quadrilatères et un élément triangulaire en trois éléments triangulaires (figure 6). La qualité des éléments triangulaires générés est maîtrisée par deux critères. D'une part, nous contrôlons la géométrie des éléments par le rapport entre le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit de l'élément. D'autre part, nous contrôlons la disparité de taille des éléments du maillage par le rapport du rayon du cercle inscrit de l'élément et le plus grand rayon des éléments du maillage. Dans le cas des quadrilatères, nous utilisons les rayons des triangles contenus dans le quadrilatère.

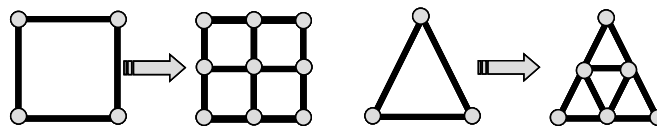


Figure 6. Raffinement élémentaire

Lors de l'étape 3, nous nous ramenons à une des configurations présentées ci-après (figure 7), afin de subdiviser au minimum les éléments ayant des nœuds surabondants.

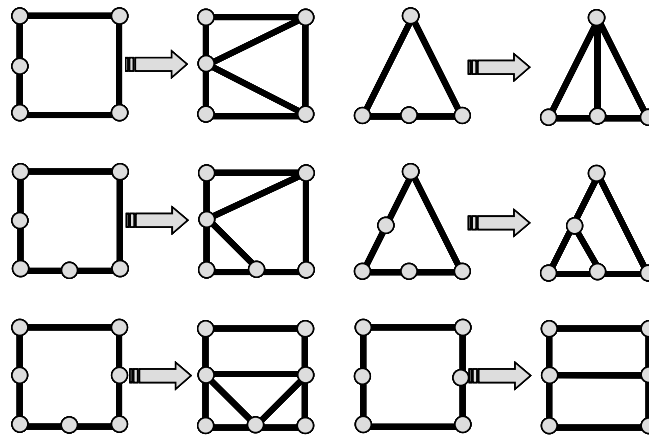


Figure 7. Mise en conformité des éléments

Cette procédure de raffinement a été développée pour des éléments 1D ou 2D, à interpolation linéaire ou quadratique. Grâce à l'approche orientée objet du code, chaque nœud créé sur une arête hérite des propriétés, des conditions aux limites ou

sollicitations et des degrés de liberté interpolés des nœuds de l'arête ; de même chaque élément créé hérite des propriétés, des sollicitations et des variables internes de l'élément initial. Le maillage ainsi obtenu est enfin amélioré en rééquilibrant la position de certains nœuds ou en inversant des triangles aplatis (figure 8).

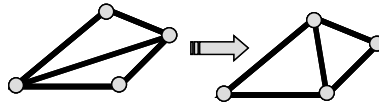


Figure 8. *Inversion des triangles*

5.2. Critères de raffinement

5.2.1 Critère d'épaisseur moyenne

Dans un premier temps, il paraît intuitif et simple de chercher à raffiner là où il y a de la matière. C'est pourquoi nous utilisons comme critère de raffinement, sur l'élément e , l'épaisseur moyenne :

$$\sqrt{\frac{1}{e} \int H^2 de} . \quad [18]$$

Ce critère est assez efficace sur le cas analytique, mais il est peu performant en cas de sollicitations ponctuelles avec de fortes variations de matière. En particulier la transition vide/matière est mal appréhendée.

5.2.2. Critère de Zienkiewicz

Dans un deuxième temps, nous nous inspirons de l'approche de (Zienkiewicz *et al.*, 1991), qui cherche en élasticité à qualifier l'écart entre le champ de contrainte numérique discontinu obtenu par le calcul éléments finis, et un champ continu l'approchant au mieux. Par analogie, nous cherchons donc l'épaisseur continue $h_c(x,y)$ qui minimise en tout point du domaine d'étude l'écart avec l'épaisseur numérique discontinue H :

$$\text{Min}_{h_c} |H - h_c| . \quad [19]$$

Pour résoudre ce problème, nous utilisons une méthode éléments finis. A partir de la formulation variationnelle,

$$\forall \varphi , \quad \int_{\Omega} (H - h_c) \varphi d\Omega = 0 ; \quad [20]$$

nous construisons une formulation numérique, avec l'interpolation,

$$h_c(x) = \left\{ N^e(x) \right\}^T \left\{ h_c \right\}, \quad [21]$$

et nous obtenons le système :

$$\sum_e \int_{V^e} \left\{ N^e \right\}^T \left\{ N^e \right\} \left\{ h_c \right\} ds = \sum_e \int_{V^e} \left\{ N^e \right\} H ds. \quad [22]$$

Le calcul du critère (23) nécessite donc la résolution d'un système linéaire (22) dont la matrice de rigidité est une matrice masse, et dont le second membre est l'épaisseur discontinue du problème d'optimisation. Le maillage utilisé pour ce calcul est bien évidemment exactement le même que pour le problème d'optimisation, si bien que la numérotation est déjà optimisée. Nous avons donc testé le critère :

$$\sqrt{\frac{1}{e} \int (H - h_c)^2 de}. \quad [23]$$

La construction de ce champ continu, nous autorise par ailleurs à déterminer facilement le gradient de l'épaisseur sur chaque élément e , qui est un autre critère que nous avons testé.

$$\sqrt{\frac{1}{e} \int \left\| \nabla h_c \right\|^2 de} \quad [24]$$

Les premiers tests effectués ne permettent pas de différencier significativement les trois critères [18], [22], [23] exposés ici. Dans l'ensemble ils sont appropriés, sauf à la frontière de la topologie calculée, où un maillage plus fin serait souhaitable. C'est pourquoi, par la suite, nous étudions un critère issu d'un calcul d'erreur a posteriori.

5.2.3 Critère de Verfürth

Travaillant avec des éléments à interpolation quadratique, nous ne souhaitons pas utiliser des estimateurs d'erreur a posteriori hiérarchiques, et pour garder un critère local élémentaire nous écartons également les critères de type loi de comportement. Nous avons donc préféré la méthode des résidus, et en particulier les travaux de (Verfürth, 2000) qui propose des estimateurs d'erreur a posteriori adaptés aux problèmes elliptiques quasi linéaires du second ordre. (Verfürth, 2000) propose donc sur l'élément e , d'arêtes a de normale n_a l'estimateur local suivant :

$$\left\{ r_e^2 \int_e R_e^2 ds + \frac{1}{2} \sum_a \int_a R_a^2 dl \right\}^{\frac{1}{2}} \quad [25]$$

où r_e représente le rayon de l'élément, R_e le vecteur résidu élémentaire et R_a le saut de contrainte normale sur l'arête; soit avec notre formulation éléments finis :

$$\int_e R_e^2 de = \int_e \left\| H(u) \left[K^e \right] \left\{ u^e \right\} \right\|^2 ds \quad [26]$$

et

$$\int_a R_a^2 da = \int_a \left[\langle n_a \rangle H(u) [D] [B^e] \left\{ u^e \right\} \right]^2 dl. \quad [27]$$

6. Résultats

6.1 Cas analytique

Pour traiter ce cas test (figure 1), nous partons d'un maillage grossier de 96 nœuds, puis nous raffinons successivement 20 % du maillage pour $p = 4, 8, 12, 16$, si bien qu'au final nous résolvons le problème avec 933 nœuds. Nous constatons d'une part que le critère de Verfürth est le plus précis (figure 9), et le plus rapide (figure 10). D'autre part, ce critère uniformise sur le domaine l'erreur commise. Si on résout dès le départ le problème avec le maillage optimisé, on atteint $p = 10$ après 22 secondes et $p = 20$ après 35 secondes. La procédure de raffinement automatique est évidemment plus rapide au début pour une précision analogue, mais surtout, au final, le temps de calcul est comparable malgré tous les calculs supplémentaires inhérents au raffinement automatique.

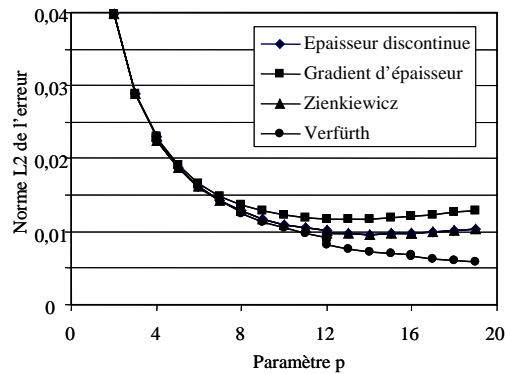


Figure 9. Ecart par rapport à la solution analytique pour quelques critères

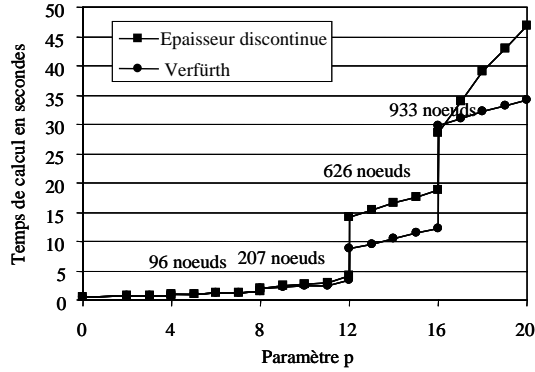


Figure 10. Temps de calcul pour les critères 'épaisseur' et 'Verfürth'

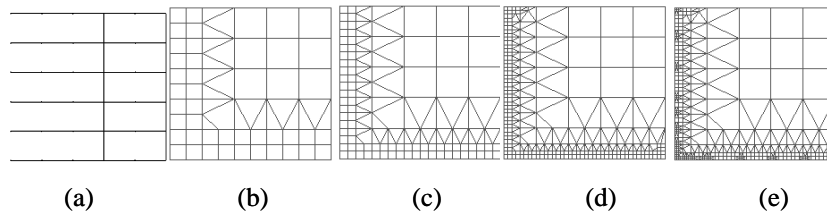


Figure 11. Critères 'épaisseur': maillage (a) $p = 0$; (b) $p = 4$; (c) $p = 8$; (d) $p = 12$; (e) $p = 16$

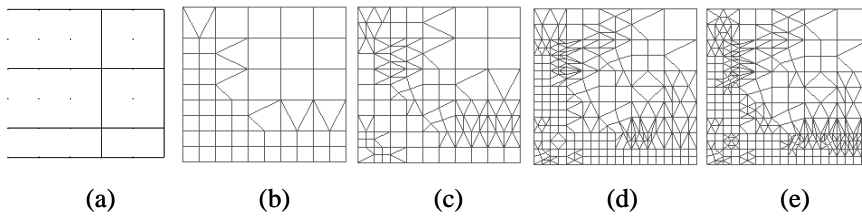


Figure 12. Critères 'Verfürth': maillage (a) $p = 0$; (b) $p = 4$; (c) $p = 8$; (d) $p = 12$; (e) $p = 16$

6.2. Cas du moyeu

Sur cette étude (figure 13), nous cherchons à vérifier que la procédure de raffinement automatique permettra d'appréhender correctement l'interface vide/matière (figure 13d). Le maillage initial utilisé est quelconque (figure 13c),

puis nous raffinons après trois incrémentations du paramètre p . Le premier raffinement concerne 20 % du maillage et les suivants 10 % du maillage. Les critères d'épaisseur moyenne ou de Zienkiewicz, raffinent essentiellement aux points d'applications des forces. Ces critères ne sont efficaces que si la taille de l'élément le plus petit reste de l'ordre de $1/20$, sinon le raffinement est trop localisé. Le critère de Verfürth par contre, raffine non seulement là où il y a de la matière, mais il permet de plus d'approcher au mieux la frontière vide/matière, c'est pourquoi nous ne présentons que ces résultats (figure 14).

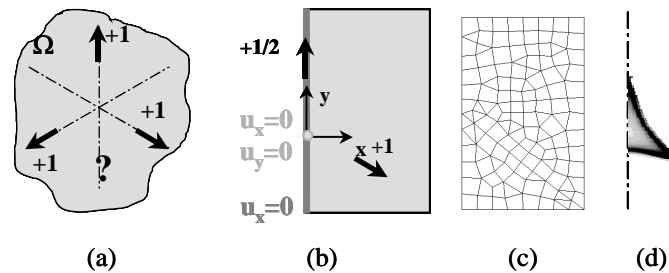


Figure 13. (a) *Problème initial* (b) *Conditions aux limites* (c) *Maillage initial* (d) *Solution*

Avec ce maillage, nous constatons que le schéma de Newton-Raphson converge plus rapidement. Ainsi une simulation utilisant le critère de Verfürth nécessite 50 secondes CPU au lieu de 65 secondes avec le critère de Zienkiewicz. Dans certains cas, lorsque p est grand, la reprise des calculs est perturbée par l'interpolation du champ solution. Un lissage du maillage devrait être envisagé.

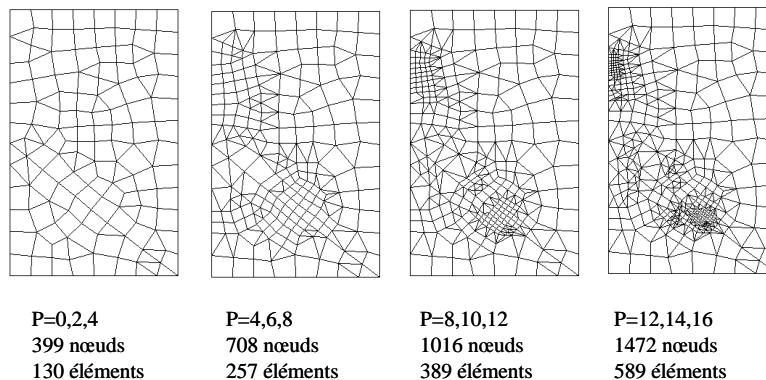


Figure 14. *Evolution du maillage pour le critère de Verfürth*

7. Conclusion

Après avoir présenté le problème d'optimisation topologique de forme par l'approche des matériaux fictifs et sa formulation éléments finis, nous avons proposé une procédure de raffinement automatique de maillage. Les critères de raffinement testés sont issus de la physique du problème ou d'une estimation d'erreur a posteriori. On constate que cette procédure permet une meilleure convergence du schéma numérique, car le maillage est mieux adapté (erreur uniforme). De plus le temps de calcul est globalement conservé, voir fortement diminué pour des calculs où p est de l'ordre de 10. Notre procédure pourra être enrichie par une étape de lissage du maillage, améliorant la géométrie des éléments par déplacement des nœuds et par une meilleure interpolation de la solution sur les nœuds créés.

8. Bibliographie

- Allaire G., Bonnetier E., Francfort G., Jouve F., "Shape optimization by the homogenization method", *Numerische Mathematik*, vol. 76, 1997, p. 27-68.
- Allaire G., Kohn R., "Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructure", *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 12, n° 6, 1993, p. 839-878.
- Aubry D., Tie B., Jay G., Muzzolini R., « Méthodes adaptatives pour les déformations localisées », *Mécanique & industrie*, vol. 3, 2003, p. 425-430.
- Babuska I., Rheinboldt W.C., "Error estimates for adaptive finite element computations", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15, 1978, p. 736-754.
- Batoz J.L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, éd. Hermes, 1995.
- Bendsoe M.P., *Optimization of structural topology, shape, and material*, éd. Springer, 1995.
- Bendsoe M.P., "Recent developments in topology design of materials and mechanisms", *Canum 2000 ESAIM Proceedings*, vol. 11, 2002, p. 41-60.
- Bernardi C., Métivet B., « Indicateurs d'erreur pour l'équation de la chaleur », *Revue européenne des éléments finis*, 9, n° 4, 2000, p. 425-438.
- Breitkopf P., Touzot G., « Architecture des Logiciels et Langages de Modélisation, *Revue européenne des éléments finis* », vol. 1, n° 3, 1992, p. 333-368.
- Dhatt G., Touzot G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, éd. Maloine, 1984.
- Frey P., Georges P.L., *Maillages, Applications aux éléments finis*, éd. Hermes science publication, 1999.
- Pichelin E., Fortin M., Boivin S., « Etude numérique d'estimations d'erreur a posteriori », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 4, 2000, p. 467-486.
- Golay F., Seppecher P., "Locking materials and the topology of optimal shapes", *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 20, 2001, p. 631-644.

- Ladevèze P., Rougeot P., Blanchard P., Moreau J.P., "Local error estimators for finite element linear analysis", *Comput. Methods Appl. Eng.*, vol. 176, 1999, p. 231-246.
- Liu W.B., Yan N.N., "Quasi-norm local error estimator for p-laplacian", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 39, n° 1, 2001, p. 100-127.
- Verfürth R., *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, éd. Wiley-teubner, 1996.
- Verfürth R., "A posteriori error estimation techniques for non-linear elliptic and parabolic pdes", *Revue européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 4, 2000, p. 377-402.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *La méthode des éléments finis - formulation de base et problèmes linéaires*, AFNOR, 1991.